COURS COMPLET

DE

MATHÉMATIQUES PURES.

COURS COMPLET

DE

MATHÉMATIQUES PURES,

par L.-B. Francoeur,

PROFESSEUR DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS, CHEVALIER DE LA LÉGION D'HONNEUR, OFFICIER DE L'UNIVERSITÉ, EX-EXAMINATEUR DES CANDIDATS DE L'ÉCOLE ROYALE POLYTECHNIQUE, MEMBRE HONORAIRE DU DÉPARTEMENT DE LA MARINE RUSSE, CORRESPONDANT DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE SAINT-PÉTERSBOURG, DES SOCIÉTÉS PHILOMATHIQUE, D'ENCOURAGEMENT POUR L'INDUSTRIE NATIONALE, D'INSTRUCTION ÉLÉMENTAIRE ET DES MÉTHODES D'ENSEIGNEMENT, DES ACADÉMIES DE ROUEN, CAMBRAI, TOULOUSE, LISBONNE, ETC.

OUVRAGE DESTINÉ AUX ÉLÈVES DES ÉCOLES NORMALE ET POLYTECHNIQUE, ET AUX CANDIDATS QUI SE PRÉPARENT A Y ÊTRE ADMIS.

CINQUIÈME ÉDITION.

Préférez, dans l'enseignement, les méthodes générales ; attachez-vous à les présenter de la manière la plus simple, et vous verrez en même temps qu'elles sont toujours les plus faciles.

LAPLACE, *Écoles norm.*, tome IV, p. 49.

TOME DEUXIÈME.

BRUXELLES.

MÉLINE, CANS ET COMPAGNIE.

IMPRIMERIE, LIBRAIRIE ET FONDERIE.

1838

TABLE DES MATIÈRES

CONTENUES

DANS LE SECOND VOLUME.

LIVRE CINQUIÈME.

ALGÈBRE SUPÉRIEURE.

LIVRE SIXIÈME.

ANALYSE A TROIS DIMENSIONS.

LIVRE SEPTIÈME.

CALCUL DIFFÉRENTIEL ET INTÉGRAL.

FIN DE LA TABLE DU SECOND VOLUME.

COURS COMPLET

DE

MATHÉMATIQUES PURES.

LIVRE CINQUIÈME.

ALGÈBRE SUPÉRIEURE.

CHAPITRE I[er].

DES COMBINAISONS ET DES PUISSANCES.

Permutations et Combinaisons.

475. Lorsque des termes sont composés de lettres semblables ou différentes, placées dans divers ordres, nous nommerons ces assemblages des *Arrangements*, ou des *Permutations ;* mais si l'une de ces lettres au moins est différente dans chaque terme, et qu'on n'ait point égard aux rangs des lettres, ces termes seront des *Combinaisons* *. Ainsi *abc, bac, cba, bca,* sont 4 permutations, et *abc, abd, bcd, acd,* 4 combinaisons 3 à 3.

Pour désigner le nombre des permutations qu'on peut faire avec

* Les combinaisons sont aussi appelées *Produits différents ;* nous rejetons cette expression défectueuse ; car *ab* et *cd,* qui sont les combinaisons différentes de deux lettres, peuvent cependant former des produits égaux, comme $3 \times 8 = 6 \times 4 = 12 \times 2$. On a distingué aussi les *permutations* des *arrangements,* réservant le 1[er] nom aux arrangements de p lettres entre elles, ou p à p : mais cette distinction n'a aucun but utile, et nous n'en ferons pas usage, non plus que de plusieurs autres dénominations.

m lettres, en les prenant p à p, nous écrirons $[mPp]$; le nombre des combinaisons sera indiqué par $[mCp]$.

Proposons-nous de *trouver le nombre* y *de toutes les permutations de* m *lettres prises* p *à* p, ou $y = [mPp]$. Considérons d'abord les arrangements qui commencent par une lettre telle que a, mais qui diffèrent, soit par quelque autre lettre à droite de a, soit seulement par l'ordre suivant lequel elles sont rangées. Si l'on supprime cette initiale a, on aura un égal nombre d'assemblages de $p - 1$ lettres; ce seront visiblement tous les arrangements possibles des $m - 1$ autres lettres $b, c, d, \ldots$ prises $p - 1$ ensemble; désignons-en le nombre par $\varphi = [(m - 1) P (p - 1)]$. Donc si l'on prend ces $m - 1$ lettres $b, c, d, \ldots$ qu'on forme avec elles toutes les permutations $p - 1$ à $p - 1$, qu'enfin on place a en tête de chaque terme, on aura toutes celles des permutations p à p qui ont a pour initiale. En effet, pour que l'une de celles-ci fût omise ou répétée plusieurs fois, il faudrait qu'après y avoir supprimé a, qui est en tête, les assemblages restants présentassent la même erreur, et que quelque permutation $p - 1$ à $p - 1$ des lettres $b, c, d, \ldots$ fût elle-même omise ou répétée; ce qui est contre la supposition.

Il y a donc autant d'arrangements de $m - 1$ lettres prises $p - 1$ à $p - 1$, que d'arrangements de m lettres p à p, où a est initial : soit φ ce nombre. Or, si l'on raisonne pour b comme on a fait pour a, on trouvera de même φ permutations qui commencent par b; il y en a φ qui ont c en tête, etc.... ; et comme chaque lettre doit être initiale à son tour, le nombre cherché y est composé d'autant de fois φ qu'il y a de lettres,

$$y = m\varphi, \quad \text{ou } [mPp] = m \, . \, [(m - 1) P (p - 1)].$$

Il suit de là que, 1° pour obtenir le nombre y'' d'arrangements de m lettres 2 à 2, φ est alors le nombre d'arrangements de $m - 1$ lettres prises 1 à 1, ou $\varphi = m - 1$; donc $y'' = m(m - 1)$.

2° Si l'on veut le nombre y''' d'arrangements de m lettres 3 à 3, p est 3, et φ désigne la quotité d'arrangements de $m - 1$ lettres 2 à 2, quotité qu'on tire de y'' en changeant m en $m - 1$;

$$\varphi = (m - 1)(m - 2); \quad \text{d'où } y''' = m(m - 1)(m - 2).$$

3° On trouve de même pour le nombre des arrangements 4 à 4, $y^{\text{iv}} = m(m - 1)(m - 2)(m - 3)$, et ainsi de suite.

Il est visible que pour passer de l'une de ces équ. à la suivante,

il faut y changer m en $m-1$, puis multiplier par m; ce qui revient à joindre aux facteurs m, $m-1,\ldots$ l'entier qui suit le dernier de ces nombres; ainsi, pour p lettres, ce dernier multiplicateur sera $m-(p-1)$, d'où

$$y=[mPp]=m(m-1)(m-2)\ldots\times(m-p+1);\ldots\quad(1)$$

le nombre des facteurs est p. C'est ainsi que 9 choses peuvent se permuter 4 à 4 d'autant de façons différentes qu'il est marqué par le produit des 4 facteurs $9.8.7.6=[9P4]=3024$; c'est le nombre de manières dont 9 personnes peuvent occuper 4 places. Les arrangements de m choses 1 à 1 et 2 à 2 réunis, sont en nombre $m+m(m-1)=m^2$.

En faisant $m=p$, on obtient le nombre z d'arrangements de p lettres p à p, toutes les p lettres entrant dans chaque terme,

$$z=[pPp]=p(p-1)\ldots 3.2.1=1.2.3.4\ldots p\ldots(2)$$

Le nombre d'arrangements des 7 notes de la gamme musicale est $1.2.3\ldots 7=5040$: en comptant les demi-tons, on a 479 001 600.

476. Cherchons *le nombre* x *des combinaisons différentes de* m *lettres prises* p *à* p, ou $x=[mCp]$. Supposons ces x combinaisons effectuées, et écrites successivement sur une ligne horizontale: inscrivons au-dessous de la 1re toutes les permutations des p lettres qui s'y trouvent, et nous aurons une colonne verticale formée de z termes (équ. 2). Le second terme de la ligne horizontale donnera de même une colonne verticale de z termes composant toutes les permutations des p lettres qui y sont comprises, et dont une lettre au moins est différente de celles qui entrent dans la combinaison déjà traitée. La 3e combinaison donnera aussi z termes différents des autres, etc. On formera donc ainsi un tableau composé de x colonnes, ayant chacune z termes; en tout xz résultats, qui constituent visiblement tous les arrangements possibles de nos m lettres prises p à p, sans qu'aucun soit omis ni répété. Le nombre de ceux-ci étant y (équ. 1), on a $xz=y$, d'où $x=\frac{y}{z}=\frac{[mPp]}{[pPp]}$, savoir,

$$x=[mCp]=\frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}\cdot\frac{m-2}{3}\ldots\times\frac{m-p+1}{p}\ldots\quad(3)$$

Les équ. 1 et 2 étant composées chacune de p facteurs, l'équ. (3) en a aussi p, qui sont des fractions dont les termes sont entiers et

suivent l'ordre naturel, décroissants à partir de m pour le numérateur, et croissants jusqu'à p pour le dénominateur. Comme, par sa nature, x doit être un nombre entier, *la formule* (1) doit *être exactement divisible par* (2) : au reste, c'est ce qu'on pourrait prouver directement.

477. On a

$$[mCq] = x' = \frac{m}{1} \cdot \frac{m-1}{2} \cdot \frac{m-2}{3} \cdots \frac{m-q+1}{q}.$$

Soit $p > q$, tous les facteurs de cette équ. entrent dans l'équ. (3), qu'on peut par conséquent écrire

$$x = x' \cdot \frac{m-q}{q+1} \cdot \frac{m-q-1}{q+2} \cdots \frac{m-p+1}{p}.$$

I. Cherchons d'abord s'il se peut que $x = x'$: il est clair qu'il faut que le produit de toutes ces fractions se réduise à 1, ou que les numérateurs forment le même produit que les dénominateurs ; si l'on prend ceux-ci en ordre inverse, on a

$$(m-q)(m-q-1)\ldots = p(p-1)\ldots(q+1).$$

Or, ces deux membres admettent un égal nombre de facteurs continus et décroissants ; si chaque facteur d'une part n'était pas égal à celui qui a même rang de l'autre part, l'égalité serait impossible, puisque, suppression faite des facteurs communs, il resterait des facteurs tous plus grands d'un côté que de l'autre et en pareil nombre. Ainsi, cette équ. exige que $m - q = p$, pour que $x = x'$; de là ce théorème :

$$[mCp] = [mCq] \quad \text{quand } m = p + q.$$

100 lettres prises 88 à 88, et prises 12 à 12, donnent un égal nombre de combinaisons ; et, en effet, [100 C 88] a pour numérateur 100 . 99 .... 89 . 88 .... 13, et pour dénom. 1 . 2 . 3 .... 12 . 13....88; supprimant les facteurs communs 13 . 14 . 15........88, il reste $\frac{100 . 99 \ldots . 89}{1 . 2 . 3 \ldots . 12} = 100\ C\ 12$. Cette remarque sert à rendre plus faciles les calculs de la formule (3), quand $p > \frac{1}{2} m$. On a plutôt trouvé 100 C 4 que 100 C 96 = 3 921 225.

Concluons de là que si l'on écrit successivement les nombres de combinaisons de m lettres 1 à 1, 2 à 2, 3 à 3, ... *les mêmes valeurs*

se reproduiront en ordre rétrograde au delà du terme du milieu. Par ex., pour 8 lettres, ces nombres sont 8, 28, 56, 70, 56, 28, 8 (*voy.* le tableau ci-après).

II. Supposons $q = p - 1$; x n'a qu'un seul facteur de plus que x', et l'on a

$$x = x' \cdot \frac{m - p + 1}{p},$$

ou $$[mCp] = [mC\ (p - 1)] \cdot \frac{m - p + 1}{p} \quad \ldots\ (4)$$

1° On en tire cette règle, qui sert à déduire successivement les unes des autres les quotités de combinaisons de m lettres 1 à 1, 2 à 2, 3 à 3.... *Écrivez les fractions* $\frac{m}{1}$, $\frac{m-1}{2}$, $\frac{m-2}{3}$.... *et multipliez chacune par le produit de toutes les précédentes.* Par ex., pour 8 lettres à combiner, on écrit $\frac{8}{1}$, $\frac{7}{2}$, $\frac{6}{3}$, et l'on a 8; $8 \times \frac{7}{2} = 28$; $28 \times \frac{6}{3} = 56$....; c'est ainsi qu'on trouve que 8 numéros de la loterie forment 8 *extraits,* 28 *ambes,* 56 *ternes,* 70 *quaternes* et 56 *quines.* Les 90 numéros donnent 90 extraits, 4005 ambes, 117 480 ternes, 2 555 190 quaternes, 43 949 268 quines.

2° Nos facteurs successifs m, $\frac{m-1}{2}$, $\frac{m-2}{3}$,.... ont des numérateurs décroissants et des dénominateurs croissants : tant que ces fractions sont > 1, le produit augmente ; il va en diminuant, dès que le rang i du terme est tel qu'on ait

$$\frac{m - i + 1}{i} < 1, \quad \text{d'où } i > \frac{m+1}{2};$$

et nous savons qu'on retrouve les mêmes produits en sens rétrograde.

1er cas, m *pair* $= 2\alpha$: on a $i > \alpha + \frac{1}{2}$; ainsi les termes croissent jusqu'au rang $i = \alpha$, où le dernier facteur est $\frac{\alpha + 1}{\alpha}$: ce terme est $[m\, C\, \frac{1}{2} m]$, ou

$$M = \frac{2\alpha\,(2\alpha - 1)\ldots.(\alpha + 1)}{1.2.3\ldots.\alpha} = \frac{(\alpha + 1)(\alpha + 2)\ldots.2\alpha}{1.2.3\ldots.\alpha}.$$

On écrit au dénominateur la suite naturelle $1.2.3\ldots.\alpha$, et on la

continue au numérateur jusqu'à 2α. Complétons le numérateur par les facteurs $1 . 2 . 3 \ldots \alpha$,

$$M = \frac{1.2.3.4 \ldots 2\alpha}{(1.2.3 \ldots \alpha)^2};$$

or les facteurs pairs qui, en haut, sont en rangs alternatifs sont $2.4.6 \ldots 2\alpha = 2^\alpha \times 1.2.3.4 \ldots \alpha$; donc enfin *le plus grand terme, ou celui du milieu, est*

$$M = [m\ C\ \tfrac{1}{2} m] = 2^{\frac{1}{2}(m)} \frac{1.3.5.7 \ldots (m-1)}{1.2.3.4 \ldots \frac{1}{2} m}.$$

2e CAS, m *impair* $= 2\alpha + 1$. La condition indiquée devient $i > \alpha + 1$; ainsi les termes ne décroissent que si le rang i dépasse $\alpha + 1$; et comme, pour ce rang, le dernier facteur se réduit à $\frac{\alpha+1}{\alpha+1} = 1$, ce terme est égal au précédent, en sorte qu'il se répète aux rangs $\alpha + 1$ et α, ou $\frac{1}{2}(m \pm 1)$. Faisons donc $i = \alpha$ et nous aurons pour *les deux termes du milieu, qui sont les plus grands* $[m\ C\ \frac{1}{2}(m \pm 1)]$,

$$M = \frac{(2\alpha+1)\, 2\alpha \ldots \alpha+2}{1.2.3 \ldots \alpha} = \frac{(\alpha+2)(\alpha+3) \ldots (2\alpha+1)}{1.2.3 \ldots \alpha}.$$

En opérant comme ci-dessus, on trouve

$$M = [m\ C\ \tfrac{1}{2}(m \pm 1] = 2^{\frac{1}{2}(m-1)} \frac{1.3.5.7 \ldots m}{1.2.3.4 \ldots \frac{1}{2}(m+1)}.$$

C'est ainsi que les plus grands nombres de combinaisons qu'on puisse faire avec 18 et avec 19 lettres sont

$$M = [18\ C\ 9] = 2^9 \times \frac{1.3.5 \ldots 17}{1.2.3 \ldots 9} = 48620;$$

$$M = [19\ C\ 9] = 2^9 \times \frac{1.3.5 \ldots 19}{1.2.3 \ldots 10} = 92378;$$

du reste chacun des nombres de combinaisons doit toujours être entier.

3° L'équ. (4) donne aussi

$$x + x' = x' . \frac{m+1}{p} = \frac{m+1}{1} . \frac{m}{2} \ldots \frac{m-p+2}{p},$$

à cause de l'équ. n° 477 et de $q = p - 1$; ce 2ᵉ membre, comparé à l'équ. (3), donne

$$[(m + 1)\ Cp] = [mCp] + [mC(p - 1)].$$

Cette relation apprend à déduire, par une simple addition, les combinaisons de $m + 1$ lettres de celles de m lettres ; c'est ainsi que dans le tableau suivant, qu'on nomme *le Triangle arithmétique de Pascal, chaque nombre est la somme des deux termes correspondants de la ligne précédente.* Ainsi on a

7ᵉ ligne. . . . 1, 7, 21, 35, 35, 21, 7, 1.

Pour composer la 8ᵉ ligne, on fera $1 + 7 = 8$, $7 + 21 = 28$, $21 + 35 = 56$, $35 + 35 = 70$, etc. . . .

Cette loi explique le retour des mêmes termes en sens inverse, puisqu'il suffit qu'il ait lieu dans une ligne pour qu'il se trouve aussi dans la suivante. Du reste, nous savons déduire les termes d'une même ligne les uns des autres, et de proche en proche (1°), ou à l'aide des termes de la ligne qui précède (3°), ou enfin directement à l'aide de l'équ. (3) qui en est le *terme général.*

COEFFICIENTS DU BINOME,

ou *Quotités de Combinaisons.*

1	1									
1	2	1								
1	3	3	1							
1	4	6	4	1						
1	5	10	10	5	1					
1	6	15	20	15	6	1				
1	7	21	35	35	21	7	1			
1	8	28	56	70	56	28	8	1		
1	9	36	84	126	126	84	36	9	1	
1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1
1	11	55	165	330	462	462	330	165	55	11
1	12	66	220	495	792	924	792	495	220	66
1	13	78	286	715	1287	1716	1716	1287	715	286
1	14	91	364	1001	2002	3003	3432	3003	2002	1001
1	15	105	455	1365	3003	5005	6435	6435	5005	3003
1	16	120	560	1820	4368	8008	11440	12870	11440	8008
1	17	136	680	2380	6188	12376	19448	24310	24310	19448
1	18	153	816	3060	8568	18564	31824	43758	48620	43758
1	19	171	969	3876	11628	27132	50388	75582	92378	92378
1	20	190	1140	4845	15504	38760	77520	125970	167960	184756
0	1 à 1	2 à 2	3 à 3	4 à 4	5 à 5	6 à 6	7 à 7	8 à 8	9 à 9	10 à 10

III. Soient 1, m, a, b, c.... b, a, m, 1, les nombres d'une ligne; ceux de la suivante (3°) sont 1, $1+m$, $m+a$, $a+b$.... $a+m$, $m+1$, 1 : la somme des termes de rangs pairs est

$$1+m+a+b....+m+1,$$

la même que ceux de rangs impairs, et aussi que la somme des termes de la ligne précédente. En ajoutant tous les termes de la ligne $m+1$, on a donc le double de la somme de la ligne m. Or, la 2[e] ligne du tableau est $1+2+1=4=2^2$, donc les lignes suivantes ont pour somme 2^3, 2^4.... 2^m. Ainsi, *la somme des combinaisons de* m *lettres est* 2^m ; *celle des termes de rangs, soit pairs, soit impairs, est* 2^{m-1}, *somme qu'on trouve pour les combinaisons de* m — 1 *lettres.*

478. Partageons les m lettres a, b, c, d.... en deux ordres, les unes en nombre m', les autres en nombre m'', $(m=m'+m'')$; puis cherchons toutes les combinaisons p à p formées de p' des premières lettres jointes avec p'' des autres $(p=p'+p'')$. Pour cela faisons toutes les combinaisons des 1[res] p' à p', et celles des dernières p'' à p'' ; le nombre en sera $m'Cp'$ et $m''Cp''$; accouplons chacun des 1[ers] résultats à chacun des seconds ; p' facteurs d'une part, réunis à p'' de l'autre, formeront p facteurs ; et il est visible que ces systèmes accompliront tous ceux qu'on cherche. Leur nombre est donc

$$X=[m'Cp']\times[m''Cp''] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

I. Dans combien de combinaisons des m lettres a, b, c.... entre la lettre a? $m'=p'=1$, et $X=(m-1)\,C\,(p-1)$.

II. Combien de combinaisons contiennent a sans b, et b sans a? $m'=2$, $p'=1$; d'où $X=2\times[(m-2)\,C\,(p-1)]$.

III. Combien renferment a et b ensemble? $m'=p'=2$, $X=(m-2)\,C\,(p-2)$.

IV. Combien ne contiennent ni a, ni b? $m=2$, $p'=0$ et $X=(m-2)\,Cp$.

V. Sur les combinaisons de m lettres p à p, combien en est-il qui contiennent deux des 3 lettres a, b, c? $m'=3$, $p'=2$, $X=3\times[(m-3)\,C\,(p-2)]$.

VI. Les combinaisons de 10 lettres 4 à 4 sont en nombre 210 : si l'on distingue trois lettres a, b, c, on peut demander combien il y a de ces combinaisons qui ne contiennent aucune de ces trois lettres,

combien en renferment une seule, combien 2, combien toutes les trois ensemble : on trouve

1° Aucune des trois lettres. . .	$3C0 \,.\, 7C4 = 1 \times 35 =$	35
2° Une seule.	$3C1 \,.\, 7C3 = 3 \times 35 =$	105
3° Deux.	$3C2 \,.\, 7C2 = 3 \times 21 =$	63
4° Toutes les trois	$3C3 \,.\, 7C1 = 1 \times 7 =$	7
Nombre total des combinaisons.		210

Quant aux *permutations de* m *lettres* p *à* p, *qui contiennent* p′ *lettres prises parmi* m′ *qu'on a désignées,* leur nombre

$$Y = X \times 1.2.3.\ldots p.$$

En effet, il suffit de prendre chacune des X combinaisons, et de permuter entre elles les p lettres qui y entrent.

479. *Effectuons les permutations* p *à* p *des* m *lettres* a, b, c.... v, de toutes les manières possibles. Otons-en $p - 1$, telles que *i, k.... v;* apportons l'une d'elles *i* à côté de chacune des $m - p + 1$ autres *a, b, c.... h;* d'où *ia, ib, ic. ... ih*. Changeons tour à tour *i* en *a, b, c.... h,* et nous aurons tous les arrangements 2 à 2 des $m - p + 2$ lettres, *i, a, b.... h*. En tête de ces résultats, plaçons la 2e lettre supprimée *k ; kia, kib.... kih ;* puis changeons successivement *k* en *i, a, b.... h,* et nous aurons toutes les permutations 3 à 3 des $m - p + 3$ lettres *k, i, a, b.... h,* et ainsi de suite.

Par ex., pour permuter 3 à 3 les 5 lettres *a, b, c, d, e,* j'ôte *d* et *e,* et portant *d* près de *a, b, c,* j'ai *da, db, dc;* changeant *d* en *a, b* et *c,* il vient tous les arrangements 2 à 2 des 4 lettres, *a, b, c, d.*

da, db, dc, ad, ab, ac, ba, bd, bc, ca, cb, cd.

Il reste à apporter *e* en tête de chaque terme, *eda, edb, edc,....* puis à changer *e* en *a,* en *b,* en *c,* et en *d ;* on a alors les 60 arrangements demandés *.

480. Soit proposé de *former les combinaisons* p *à* p. Cherchons-les d'abord 2 à 2; ôtons *a,* et apportons cette lettre près de *b, c,....*

* Cette théorie sert à trouver le *logogriphe* et l'*anagramme* d'un mot. Ces pénibles bagatelles offrent quelquefois des résultats heureux. Dans *Frère Jacques Clément,* l'assassin de Henri III, on trouve, lettre pour lettre : *C'est l'enfer qui m'a créé.* Jablonski fit les anagrammes de *Domus Lescinia,* en honneur de Stanislas, de la maison des Leczinski ; il trouva ces mots : *Ades incolumis, Omnis es lucida, Mane sidus loci, Sis columna Dei, I scande solium.* Ce dernier fut prophétique : Stanislas devint roi de Pologne.

savoir *ab, ac, ad* .... : ce sont les combinaisons 2 à 2 où entre *a*. Plaçons de même *b* près de *c, d*,.... puis *c* près des lettres *d, e*.... *qui sont à droite*, etc., nous aurons toutes les combinaisons 2 à 2.

Pour combiner 3 à 3, ôtons *a* et combinons 2 à 2 les autres lettres *b, c, d*,.... ainsi qu'on vient de le dire; puis apportons *a* près de chaque terme, *b* près de chacun de ceux où *b* n'est pas déjà, *c* près de ceux qui n'ont ni *b* ni *c*, etc., et nous aurons les combinaisons 3 à 3.

En général, pour combiner p à p, ôtez $p - 2$ lettres *i, k*.... *v*, et combinez 2 à 2 les autres lettres *a, b, c*.... *h*; portez près de chaque résultat l'une des lettres supprimées *i*, puis *a* près des termes sans *a*, *b* près de ceux qui n'ont ni *a* ni *b* ....; vous aurez les combinaisons 3 à 3 des lettres *a, b, c*.... *h, i* : portez de nouveau *k* près de chaque terme, *a* près de ceux qui n'ont pas *a*, etc.; et vous aurez les combinaisons 4 à 4 de *a, b*.... *i, k*, et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'on ait restitué toutes les $(p - 2)$ lettres supprimées.

Développement de la puissance d'un polynome.

481. Lorsqu'on fait $a = b = c, \ldots$ le produit de m facteurs $(x + a)(x + b)(x + c)\ldots$ devient $(x + a)^m$; le développement de la puissance m^e d'un binôme se réduit donc à effectuer ce produit, et à rendre ensuite les 2es termes *a, b, c*.... égaux; ce procédé permet de reconnaître la loi qu'observent les divers termes du produit, avant d'éprouver la réduction. Or, on a vu (n° 97, V) que ce produit a la forme

$$x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + Cx^{m-3} \ldots + Nx^{m-n} \ldots abcd,$$

A étant la somme $a + b + c \ldots$ des 2mes termes des facteurs binômes, B la somme $ab + ac + bc \ldots$, de leurs produits 2 à 2, C celle des produits 3 à 3, $abc + abd, \ldots$ etc. En faisant $a = b = c \ldots$, tous les termes de A deviennent $= a$; ceux de B sont $= a^2$; ceux de C, $= a^3 \ldots$; ceux de N, $= a^n$.

Donc A devient a répété m fois, ou ma.

Pour B, a^2 doit être répété autant de fois qu'il y avait de produits 2 à 2, ou $B = a^2 \,.\, [mC2] = \frac{1}{2} m(m-1) a^2$.

Pour C, a^3 est pris autant de fois que m lettres donnent de combinaisons 3 à 3, $C = \frac{1}{6} m(m-1)(m-2) a^3$; et ainsi de suite.

Pour un terme Na^{m-n} de rang quelconque n, on a $N = [mCn]\, a^n$. Enfin le dernier terme est a^m. De là cette formule, découverte par Newton :

$$(x + a)^m = x^m + max^{m-1} + m \cdot \frac{m-1}{2} a^2x^{m-2}$$

$$+ m \frac{m-1}{2} \cdot \frac{m-2}{3} a^3x^{m-3} \ldots + a^m \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

Le terme général est.... $T = [mCn] \cdot a^n x^{m-n}$. . . . . . (7)
T *est le terme qui en* a n *avant lui*, et qui reproduit tous ceux du développement de $(x + a)^m$, en prenant $n = 1, 2, 3 \ldots$

Pour obtenir celui de $(x - a)^m$, il faut changer ici a en $-a$, c'est-à-dire prendre en signe contraire les termes où a porte un exposant impair.

482. La formule (6) est *composée de* (m + 1) *termes, et les coefficients sont tous entiers ;* ceux des puissances jusqu'à la 20e, ont été donnés p. 7. Les exposants de a vont en croissant de terme en terme ; ceux de x en décroissant : la somme de ces deux puissances de a et x, est m, pour chaque terme ; ainsi (p. 5, 1°) *un terme étant multiplié par* $\frac{a}{x}$ *et par l'exposant de* x, *puis divisé par le rang de ce terme dans la série, on a le terme suivant*. Par ex., on trouve

$$(x + a)^9 = x^9 + 9ax^8 + 36a^2x^7 + 84a^3x^6 + 126a^4x^5 + 126a^5x^4 + \ldots$$

Pour obtenir $(2b^3 - 5c^3)^9$, on fera dans cette équ. $x = 2b^3$, $a = -5c^3$, et il viendra $2^9b^{27} - 9 \cdot 5c^3 \cdot 2^8b^{24} + 36 \cdot 5^2c^6 \cdot 2^7b^{21} \ldots$ ou

$$(2b^3 - 5c^3)^9 = 512b^{27} - 45 \cdot 256c^3b^{24} + 36 \cdot 25 \cdot 128c^6b^{21} - 84 \cdot 125 \cdot 64c^9b^{18} \ldots$$

Du reste, on sait que, dans la formule (6),

1° Après le terme moyen, les coefficients reviennent en ordre rétrograde, et les coefficients à égale distance des extrêmes sont égaux : ces coefficients vont en croissant jusqu'au terme moyen dont on a donné la valeur (p. 5).

2° Chacun des coefficients de la puissance m^e étant ajouté à celui qui le suit, donne le coefficient de la puissance $(m + 1)^e$ qui a même rang que ce dernier (*voy.* pag. 7).

3° La somme de tous les coefficients de la puissance m^e est $= 2^m$

= la somme de tous ceux de rangs, soit pairs, soit impairs dans la puissance $(m+1)^e$, comme p. 8. Et en effet, faisant $x = a = 1$, l'équ. (6) se réduit à 2^m = la somme de tous les coefficients.

4° Quand $x=1$ et $a=z$, l'équ. (6) devient

$$(1+z)^m = 1 + mz + m\,.\,\frac{m-1}{2}z^2 + m\,.\,\frac{m-1}{2}\,.\,\frac{m-2}{3}z^3 + \ldots + z^m \ldots (8)$$

Comme cette expression est beaucoup plus simple, on y ramène le développement de toute puissance proposée. Pour $(A+B)^m$, on divisera le binôme par A pour réduire le 1er terme à être 1, et l'on multipliera par A^m, pour rendre à la quantité sa valeur $= A^m\left(1+\dfrac{B}{A}\right)^m$. En faisant cette fraction $= z$, on retombe sur l'équ. (8). Ainsi, après avoir *formé les produits consécutifs des facteurs* m, $\frac{1}{2}(m-1)$, $\frac{1}{3}(m-2)$, $\frac{1}{4}(m-3)$, ... comme on l'a dit (p. 5), on aura les coefficients du développement qu'il faudra ensuite multiplier par les puissances croissantes de z. Par ex., pour $(2a+3b)^8$, je prends $(2a)^8\left(1+\dfrac{3b}{2a}\right)^8$, et je fais $z=\dfrac{3b}{2a}$. Je forme les fractions $\frac{8}{1}$, $\frac{7}{2}$, $\frac{6}{3}$, $\frac{5}{4}$, et, par des multiplications successives, j'ai les coefficients 8, 28, 56, 70; passé ce terme moyen, les suivants sont 56, 28 et 8. Distribuant les puissances croissantes $z, z^2, z^3, \ldots$ multipliant tout par $256a^8$, enfin, mettant pour z la fraction que cette lettre représente, j'ai

$$(2a+3b^8) = 256\,.\,a^8 + 3072\,.\,a^7b + 16128\,.\,a^6b^2 + 48384\,.\,a^5b^3 + 90720\,.\,a^4b^4 + 108864\,.\,a^3b^5 \ldots$$

483. Pour développer $(a+b+c+d\ldots+i)^m$, revenons au binôme en faisant $b+c\ldots+i=z$;

$(a+z)^m$ a pour terme général $\quad [mC\alpha]a^\alpha z^p$,

α et p étant quelconques, pourvu que $\quad \alpha+p=m$.

Mais si l'on pose $c+d\ldots+i=y$, on a $z=b+y$, et le terme général de $z^p=(b+y)^p$ est.... $\quad [pC\beta]\,b^\beta y^q$,

avec la condition $\beta+q=p$, savoir $\quad \alpha+\beta+q=m$.

Faisons de même $d+e\ldots+i=x$, le terme général de

$y^q=(c+x)^q$ est.... $\quad [qC\gamma]\,c^\gamma x^r$,

et $\gamma+r=q$, ou $\quad \alpha+\beta+\gamma+r=m$.

En remontant, par des substitutions successives, il est clair que le terme général du développement cherché est

$$N=[mC\alpha].[pC\beta].[qC\gamma]\ldots a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots i^u,\quad \alpha+\beta+\gamma\ldots+u=m.$$

Du reste, α, β, γ.... sont des entiers arbitraires qui désignent les rangs de chacun de nos termes généraux particuliers dans leurs séries respectives. Le dénominateur du coefficient de N est

$$1.2.3\ldots\alpha\times 1.2.3\ldots\beta\times\ldots,$$

en prenant autant de séries de facteurs qu'il y a d'exposants, le dernier u excepté.

Introduisons-y, pour l'analogie, le produit $1.2.3\ldots u$, ainsi que dans le numérateur, qui prendra la forme

$$m(m-1)\ldots(m-\alpha+1)\times p(p-1)\ldots(p-\beta+1)\times q\ldots(q-\gamma+1)\ldots\times u(u-1)\ldots 2.1.$$

Or, $p=m-\alpha$; les facteurs p, $p-1$,.... continuent donc la série $m(m-1)(m-2)\ldots$ jusqu'à $(p-\beta+1)$; qui est à son tour continuée par $q=p-\beta$; et ainsi de suite, jusqu'à $u(u-1)\ldots 2.1$; le numérateur est donc la suite des facteurs décroissants $m(m-1)\ldots$ jusqu'à 2.1, qu'on peut écrire ainsi : $1.2.3\ldots(m-1)\,m$. Le terme général cherché est donc

$$N=\frac{1.2.3\ldots m\times a^\alpha b^\beta c^\gamma\ldots i^u}{1.2.3\ldots\alpha\times 1.2.3\ldots\beta\times 1.2.3\ldots\gamma\ldots\times 1.2\ldots u}\ldots \quad (9)$$

Les exposants α, β, γ.... sont tous les nombres positifs et entiers possibles, compris 0, avec la condition que leur somme $=m$; et il faudra admettre autant de termes de cette forme, qu'on peut prendre de valeurs qui y satisfont, dans toutes les combinaisons possibles. Le dénominateur est formé d'autant de séries de facteurs $1.2.3\ldots\alpha$, $1.2.3\ldots\beta$.... qu'il y a de ces exposants. Par ex., pour $(a+b+c)^{10}$, l'un des termes est

$$\frac{1.2.3\ldots 10.\,a^5b^3c^2}{1.2.3.4.5\times 1.2.3\times 1.2}=2520\,a^5b^3c^2,$$

et le même coefficient 2520 affectera les termes $a^3b^2c^5$, $a^2b^3c^5$....

484. Tout ceci suppose que l'exposant m est *un nombre entier positif*; s'il n'en est pas ainsi, on ignore quel est le développement de $(1+z)^m$, et il s'agit de prouver qu'il a encore la même forme (8) (*voy.* n° 715, IV). C'est à cela que se réduit la proposition pour tout

polynome à développer ; car en multipliant l'équ. (8) par xm, on a la série de $(x + xz)^m$, ou $(x + a)^m$, en faisant $xz = a$; ce calcul reproduit l'équation (6), qui deviendrait alors démontrée pour tout exposant m : et par suite, la doctrine du nº 483 serait applicable.

Ainsi m et n désignant des grandeurs quelconques, posons

$$x = 1 + mz + \tfrac{1}{2}\, m\, (m - 1)\, z^2 + \text{etc.},$$

$$y = 1 + nz + \tfrac{1}{2}\, n\, (n - 1)\, z^2 + \text{etc.},$$

d'où l'on tire $$xy = 1 + pz + \tfrac{1}{2}\, p\, (p - 1)\, z^2 + \text{etc.},$$

en faisant $$p = m + n.$$

En effet, sans nous arrêter à faire la multiplication des polynomes x et y, qui donnerait les 1ers termes d'une suite indéfinie, mais n'en ferait pas connaître la loi, observons que si m et n sont entiers et positifs, il est prouvé que $x = (1 + z)^m$, $y = (1 + z)^n$, d'où $xy = (1 + z)^{m+n} = (1 + z)^p$: dans ce cas, le produit xy est bien tel que nous l'avons posé. Or, si m ou n n'est pas entier et positif, la même chose doit arriver, puisque les règles de la multiplication des deux polynomes ne dépendent pas des grandeurs qu'on peut attribuer aux lettres des facteurs. Par ex., le terme en z^2, dans xy, doit être le produit de certains termes de x et de y, termes qui seront les mêmes, quelles que soient les valeurs de m et n ; et puisque ce produit est $\frac{1}{2}\, p\, (p - 1) z^2$ dans un cas, il sera tel dans tout autre cas.

D'après cela, 1º *si* m *est entier et négatif*, comme n est arbitraire, faisons $n = -m$, n sera entier et positif, et l'on sait qu'alors $y = (1 + z)^n$; $p = 0$ réduit la troisième équation à $xy = 1$, d'où $x = y^{-1} = (1 + z)^{-n} = (1 + z)^m$.

$$(\mp z)^{-m} = 1 \pm mz + m\,\frac{m+1}{2}\,z^2 \pm m\,\frac{m+1}{2}\cdot\frac{m+2}{3}\,z^3 \ldots$$

$$T = \pm m\;.\;\frac{m+1}{2}\;.\;\frac{m+2}{3}\;\ldots\;\frac{m+n-1}{n}\,z^n = z^n[(m+n-1)\,Cn]$$

$$= \pm\frac{n+1}{1}\;.\;\frac{n+2}{2}\;\ldots\;\frac{n+m-1}{m-1}\,z^n = z^n[(n+m-1)\,C\,(m-1)]$$

$(x \pm a)^{-1}$ coeff.	1	∓ 1	$+ 1$	∓ 1	$+ 1$ . . . .
$(x \pm a)^{-2}$	1	∓ 2	$+ 3$	∓ 4	$+ 5$ . . . .
$(x \pm a)^{-3}$	1	∓ 3	$+ 6$	∓ 10	$+ 15$. . . .
$(x \pm a)^{-4}$	1	∓ 4	$+ 10$	∓ 20	$+ 35$. . . .

Voyez le tableau p. 7, où l'on trouve la loi de ces nombres.

2° *Quand* m *est fractionnaire (positif ou négatif)*, faisons $n = m$, d'où $p = 2m$, $xy = x^2$;

ainsi, $$x^2 = 1 + 2mz + 2m\frac{2m-1}{2}z^2 + \text{etc.};$$

multiplions cette équ. par $x = 1 + mz + \text{etc.}$,

il vient $$x^3 = 1 + 3mz + 3m\frac{3m-1}{2}z^2 + \text{etc.};$$

de même, $$x^4 = 1 + 4mz + 4m\frac{4m-1}{2}z^2 + \text{etc.};$$

enfin, $$x^k = 1 + kmz + km\frac{km-1}{2}z^2 + \text{etc.},$$

quel que soit l'entier k. Or, si k est le dénominateur de la fraction, $m = \frac{l}{k}$, $km = l$, et on a

$$x^k = 1 + lz + l\frac{l-1}{2}z^2 + \text{etc.} = (1+z)^l,$$

puisque l est entier, positif ou négatif : donc $x^k = (1+z)^{km}$ et $x = (1+z)^m$.

3° *m étant irrationnel ou transcendant* (*voy.* note, n° 516), soient n et h deux nombres entre lesquels m soit compris : chaque terme de $x = 1 + mz + \ldots$ est entre ses correspondants dans les séries $(1+z)^n$ et $(1+z)^h$, il est clair que x est entre ces deux expressions, qui diffèrent entre elles aussi peu qu'on veut. Donc $(1+z)^n$ approche indéfiniment de x, à mesure que n approche de m : soit α la diff., ou $(1+z)^n = x + \alpha$.

De même, β étant la différence entre $(1+z)^n$ et $(1+z)^m$, on a $(1+z)^n = (1+z)^m + \beta$, d'où $x + \alpha = (1+z)^m + \beta$, α et β étant aussi petits qu'on veut ; donc (n° 113) $x = (1+z)^m$.

4° Enfin, l'*exposant étant imaginaire ;* c'est par convention qu'on traite ces expressions par les mêmes règles que les réelles ; car on ne peut se faire une idée juste d'un calcul dont les éléments seraient des symboles qui ne sont l'image d'aucune grandeur ; il n'y a donc rien à démontrer ici (n° 128).

485. Appliquons la formule (6) à des exemples.

I. Pour développer $\frac{a}{\alpha + \beta x} = \frac{a}{\alpha} \times \frac{1}{1+kx}$, k étant $= \frac{\beta}{\alpha}$,

formons la série de $(1+kx)^{-1}$ (nº 482, 4º). Les coefficients ont pour facteurs -1, $\frac{1}{2}(-1-1)$, $\frac{1}{3}(-1-2)$..., qui tous sont $=-1$; les produits sont alternativement $+1$ et -1; d'où résulte cette progression par quotient $1-kx+k^2x^2-k^3x^3$...., dont la raison est $-kx$. Donc

$$\frac{a}{\alpha+\beta x}=\frac{a}{\alpha}\left(1-\frac{\beta x}{\alpha}+\frac{\beta^2x^2}{\alpha^2}-\frac{\beta^3x^3}{\alpha^3}\ldots\pm\frac{\beta^nx^n}{\alpha^n}\ldots\right).$$

II. Pour $\sqrt{(a^2\pm x^2)}$, écrivons $a\sqrt{\left(1\pm\frac{x^2}{a^2}\right)}=a\sqrt{(1\pm y^2)}$, en posant $x=ay$. Pour développer la puissance $\frac{1}{2}$ de $1\pm y^2$, composons les facteurs des coefficients, savoir : $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)$, $\frac{1}{3}(\frac{1}{2}-2)$,.... ou $\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{4}$, $-\frac{3}{6}$, $-\frac{5}{8}$.... : les coefficients sont des fractions dont les numérateurs sont les facteurs impairs $1.3.5.7$... et les dénominateurs les facteurs pairs $2.4.6.8$.... Donc

$$\sqrt{(1\pm y^2)}=1\pm\frac{y^2}{2}-\frac{1.y^4}{2.4}\pm\frac{1.3.y^6}{2.4.6}-\frac{1.3.5.y^8}{2.4.6.8}\pm\ldots,$$

$$\sqrt{(a^2\pm x^2)}=a\left(1\pm\frac{x^2}{2a^2}-\frac{1.x^4}{2.4a^4}\pm\frac{1.3.x^6}{2.4.6.a^6}-\frac{1.3.5.x^8}{2.4.6.8.a^8}\ldots\right).$$

III. On obtiendra de même

$$(1\pm y^2)^{-\frac{1}{2}}=1\mp\frac{1.y^2}{2}+\frac{1.3.y^4}{2.4}\mp\frac{1.3.5.y^6}{2.4.6}+\frac{1.3.5.7.y^8}{2.4.6.8}\pm\ldots;$$

$$(a^2\mp x^2)^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{a}\left(1\mp\frac{x^2}{2a^2}+\frac{1.3x^4}{2.4a^4}\mp\frac{1.3.5x^6}{2.4.6a^6}+\frac{1.3.5.7x^8}{2.4.6.8a^8}\mp\ldots\right);$$

$$(1\pm x)^{\frac{3}{2}}=1\pm\frac{3}{2}x+\frac{3}{8}x^2\mp\frac{1}{16}x^3+\frac{3}{128}x^4,\text{ etc.};$$

$$(1\pm x)^{-\frac{3}{2}}=1\mp\frac{3}{2}x+\frac{3.5}{2.4}x^2\mp\frac{3.5.7}{2.4.6}x^3+\frac{3.5.7.9}{2.4.6.8}x^4,\text{ etc.};$$

$$\sqrt[3]{(a+x)}=\sqrt[3]{a}\left(1+\frac{x}{3a}-\frac{x^2}{9a^2}+\frac{5x^3}{81a^3}-\frac{10x^4}{243a^4}+\frac{22x^5}{729a^5}\ldots\right);$$

$$\sqrt[3]{(1-y^3)}=1-\frac{y^3}{3}-\frac{y^6}{9}-\frac{5y^9}{81}-\frac{10y^{12}}{243}-\frac{22y^{15}}{729}-\ldots;$$

$$(1-a)^{-2}=1+2a+3a^2+4a^3\ldots+(n+1)a^n\ldots$$ (voy. p. 14).

486. Tous les coefficients de $(x+a)^m$, quand m est un nombre premier, sont multiples de m, abstraction faite de ceux de x^m et a^m; en effet, l'équ. (3), p. 4, donne

$$1.2.3\ldots p \times [mCp] = m(m-1)(m-2)\ldots(m-p+1);$$

et comme le 2e membre est multiple de m, le 1er doit aussi l'être; on suppose m premier et $> p$; ainsi, m doit diviser $[mCp]$.

On prouve de même que tous les termes de $(a+b+c\ldots.)^m$ sont multiples de m, excepté a^m, b^m, c^m. . . .

K désignant un entier, on a donc

$$(a+b+c\ldots)^m = a^m + b^m + c^m\ldots + mK.$$

Si l'on fait $1 = a = b = c\ldots.$, h étant le nombre des termes du polynome, on trouve $h^m = h + mK$; d'où $h^m - h =$ multiple de m, ou $\frac{h(h^{m-1}-1)}{m} =$ entier. Donc, si le nombre premier m ne divise pas h, il doit diviser $(h^{m-1}-1)$. C'est le *théorème de Fermat*, qu'on énonce ainsi : *Si l'entier* h *n'est pas multiple du nombre premier* m, *le reste de la division de* $\mathrm{h}^{\mathrm{m}-1}$ *par* m *est l'unité.*

Ce théorème peut encore s'énoncer comme il suit : comme $m-1$ est un nombre pair, tel que $2q$,.... $h^{m-1}-1 = (h^q-1)(h^q+1)$; ainsi m doit diviser l'un de ces deux facteurs; c'est-à-dire que le reste de la division de h^q par m est ± 1, quand m est un nombre premier > 2, et $q = \frac{1}{2}(m-1)$.

Extractions des Racines, 4es, 5es. . . .

487. Le procédé que nous avons donné (nos 62 et 68) pour extraire les racines carrées et cubiques peut maintenant être appliqué à tous les degrés. Par ex., pour avoir la racine 4e de 548 464, désignons par *A* la 4e puissance la plus élevée contenue dans ce nombre, par *a* les dizaines, et par *b* les unités de la racine. Comme $A = (a+b)^4 = a^4 + 4a^3b,\ldots.$ le premier terme a^4 est la 4e puissance du chiffre des dizaines, à la droite de laquelle on placera quatre zéros. Séparant donc les quatre chiffres 8464, on voit que 54 contient cette 4e puissance du chiffre des dizaines, considérées comme simples unités; et comme 16 est la 4e puissance la plus

élevée comprise dans 54, on prouve que 2, racine 4e de 16, est le chiffre des dizaines. Otant 16 de 54, et rétablissant les chiffres séparés, le reste, 388 464, renferme les quatre autres parties de $(a+b)^4$, ou $4a^3b + 6a^2b^2 \ldots$ Mais $4a^3b$ est terminé par trois zéros, qui proviennent de a^3; séparant les trois chiffres 464, le reste 388 contient 4 fois le produit des unités b, par le cube du chiffre 2 des dizaines, considérées comme unités simples, ou $4 \times 8b = 32b$; 388 contient en outre les mille qui proviennent de $6a^2b^2 + \ldots$ Le quotient 10, de 388 divisé par 32, sera donc b, ou $> b$: mais il faut réduire b à 7, ou la racine à 27, ainsi qu'on le vérifie comme pour la racine cubique (*voyez* t. I, p. 80), en formant, comme on le voit ci-après, la quantité $b\,(4a^3 + 6a^2b + 4ab^2 + b^3)$. On trouve le reste 17023. Pour pousser l'approximation plus loin, il faut ajouter quatre zéros dont on sépare trois, et diviser 170230 par $4a'^3$, en faisant $a' = 27$: et comme $4a'^3 = 4a^3 + 12a^2b + 12ab^2 + 4b^3$, on voit que, pour former ce diviseur $4a'^3$, il faut ajouter $6a^2b + 8ab^2 + 3b^3$ à la partie entre parenthèses ci-dessus, etc.

54.8464	27,2		
16	32 1er divis. .	$4a^3$.	53063
388.464	168.	$6a^2b$.	168
371 441	392	$4ab^2$. . . 2 fois. .	784
17 0230	343.	b^3. . . 3 fois. .	1029
	$53063 \times 7 = 371\,441$	2e diviseur	$78732 = 4.27^3$

Il est aisé de voir que cette marche de calcul, si commode pour trouver chaque diviseur partiel, est générale, quel que soit le degré de la racine à extraire.

488. Les tables de logarithmes rendent les extractions bien faciles; mais elles ne suffisent plus lorsqu'on veut approcher des racines au delà des limites que ces tables comportent. On fait alors usage des procédés suivants.

I. Les séries (II, p. 16) servent à extraire les racines carrées avec une grande approximation. Pour avoir $\sqrt{N}$, coupez N en deux parties a^2 et $\pm x^2$, dont la 1re soit un carré exact, et très-grande par rapport à la 2e; $\sqrt{N} = \sqrt{(a^2 \pm x^2)}$ sera donnée par une série très-convergente. Soit, par exemple, demandé $\sqrt{2}$. Je cherche $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$; comme $8 = 9 - 1$, je prends $a = 3$, $x^2 = 1$; d'où $\sqrt{8} = 3\,(1 - \frac{1}{18} - \frac{1}{648} \ldots)$. Pour rendre la série plus rapidement convergente, prenez les trois premiers termes, qui font 2,829, et comparez à 8 le carré de cette fraction; vous verrez

que $8 = 2,829^2 - 0,003241$, d'où

$$\sqrt{8} = 2,829 \cdot \sqrt{\left(1 - \frac{3241}{8003241}\right)} = 2,82842\ 71247\ 462;$$

enfin, prenant la moitié, vous avez $\sqrt{2} = 1,41421\ 35623\ 732$.

Les tables de logarithmes donnent la 1[re] approximation, qu'on augmente ensuite par le procédé ci-dessus.

On a soin de conserver tous les termes de la série, qui, réduits en décimales, ont des chiffres significatifs dans l'ordre de ceux qu'on veut conserver au résultat; le 1[er] terme négligé doit commencer par 0,000000...., jusqu'à un rang plus avancé que le degré d'approximation exigé.

II. Supposons qu'on connaisse un nombre a approché de la racine m^e de N; soit b la différence entre N et a^m,

$$N = a^m \pm b, \quad \sqrt[m]{N} = a \pm z,$$

z est la correction que doit recevoir a; b et z sont de petits nombres, et on a $a^m \pm b = (a \pm z)^m$: développant et représentant par m, A', A'', les coefficients de l'équ. 6, p. 11, on a

$$b = z\,(ma^{m-1} \pm A'za^{m-2} + A''z^2a^{m-3} \pm \ldots).$$

Pour une première approximation, ne conservons que le 1[er] terme de cette série, $b = mza^{m-1}$; on en tire une valeur de z qui substituée dans le terme $\pm Aza^{m-2}$, et négligeant les suivants, donne

$$z = \frac{2ab}{2ma^m \pm (m-1)b} = \pm\, 2a \times \frac{N - a^m}{(m+1)\,a^m + (m-1)\,N},$$

en éliminant $b = \pm (N - a^m)$. Donc $\sqrt[m]{N} = a \pm z$ devient

$$\sqrt[m]{N} = a \times \frac{(m+1)\,N + (m-1)a^m}{(m-1)\,N + (m+1)\,a^m};$$

d'où $$\sqrt{N} = a \times \frac{3N + a^2}{N + 3a^2}, \quad \sqrt[3]{N} = a \times \frac{2N + a^3}{N + 2a^3},$$

$$\sqrt[4]{N} = a \times \frac{5N + 3a^4}{3N + 5a^4}, \quad \sqrt[5]{N} = a \times \frac{3N + 2a^5}{2N + 3a^5}, \text{ etc.}$$

Par ex., pour $\sqrt{65}$, on prend $a = 8$, d'où $\sqrt{65} = 8 \times \dfrac{195 + 64}{65 + 192}$,

ou $\frac{2072}{257} = 8,062257$, valeur exacte jusqu'à la 5e décimale. On pousse rapidement l'approximation, en faisant plusieurs fois successives usage de la formule ; ainsi pour $\sqrt{8}$, on fait d'abord $a = 2, 8$, et on trouve 2,82842 ; prenant ensuite $a = 2,82842$, d'où a^2 et b; on a enfin la même valeur de $\sqrt{8}$, que nous avons obtenue précédemment.

Des Nombres figurés.

489. On donne ce nom aux nombres suivants :

1er ordre	1.	1.	1.	1.	1.	1.	1.	1.	1.	1.	. .
2e. . . .	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	. .
3e. . . .	1.	3.	6.	10.	15.	21.	28.	36.	45.	55.	. .
4e. . . .	1.	4.	10.	20.	35.	56.	84.	120.	165.	220.	. .
5e. . . .	1.	5.	15.	35.	70.	126.	210.	330.	495.	715.	. .
6e. . . .	1.	6.	21.	56.	126.	252.	462.	792.	1287.	2002.	. .
7e. . . .	1.	7.	28.	84.	210.	462.	924.	1716.	3003.	5005.	etc.

Voici la loi que suivent ces nombres : *Chaque terme est la somme de celui qui est à sa gauche, ajouté à celui qui est au-dessus ;* $2002 = 1287 + 715$. De cette génération, comparée à celle du tableau, page 7, on conclut que les nombres sont les mêmes, mais rangés dans un ordre différent. Une ligne de ce dernier, telle que 1 . 7 . 21 . 35. . . . est ici une hypoténuse ; on a donc

$$T = [mC(p-1)]$$

pour valeur d'un terme quelconque d'ordre p, ou pris dans la ligne p^e, et sur une hypoténuse m^e.

Prenons deux lignes consécutives :

$$(p-1)^e \text{ ordre}\ldots\ 1 . a \ldots . q . r . s . t . v \ldots ,$$

$$p^e \ldots\ldots\ 1 . A \ldots . Q . R . S . T , \ldots$$

on a $A = 1 + a \ldots\ R = Q + r,\ S = R + s,\ T = S + t \ldots$

1° Sur une hypoténuse, les termes se dépassent d'un rang dans les lignes consécutives ; tels sont T et v. Si T est le n^e terme de l'ordre p, ou dans la n^e colonne et la p^e ligne, v est le $(n+1)$ terme de l'ordre $p-1$; le terme de la ligne précédente est le $(n+2)^e$ de l'ordre $p-2$. . . . ; pour remonter jusqu'au 2e ordre

$1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots m$, il faut donc au rang n ajouter $p-2$, différence des deux ordres ; c'est-à-dire que le terme m, n° de l'hypoténuse, s'y trouve occuper le rang $n+p-2$,

$$m = n + p - 2;$$

l'équ. $T = mC\,(p-1)$ revient donc à (p. 3)

$$T = [(n+p-2)\,C\,(p-1), \text{ ou } (n-1)], \;\ldots\; (10)$$

ou

$$T = \frac{n}{1} \cdot \frac{n+1}{2} \cdot \frac{n+2}{3} \cdots \frac{n+p-2}{p-1}$$

$$= \frac{p}{1} \cdot \frac{p+1}{2} \cdot \frac{p+2}{3} \cdots \frac{n+p-2}{n-1}.$$

en développant par l'équ. (3), p. 3, et prenant les facteurs du numérateur en ordre inverse. On emploie de préférence la 1re ou la 2e de ces expressions du *terme général* T, selon que p est $<$ ou $>n$. On vérifie même ici que le n^e terme de l'ordre p est le même que le p^e de l'ordre n.

En posant $p = 3, 4, 5 \ldots$ on a

3e ordre, $1 \,.\, 3 \,.\, 6 \,.\, 10 \ldots T = \frac{1}{2} n\,(n+1) = [(n+1)\,C2]$;

4e .... $1 \,.\, 4 \,.\, 10 \,.\, 20 \ldots T = \frac{1}{6} n\,(n+1)(n+2) = [(n+2)C3]$;

5e .... $1 \,.\, 5 \,.\, 15 \,.\, 35 \ldots T = \frac{1}{24} n\,(n+1)(n+2)(n+3)$.

2° En comparant les termes T, t et S, on a

$$T = mC\,(p-1),\; t = (m-1)\,C\,(p-2),\; S = (m-1)\,C\,(p-1).$$

Développons et réduisons (équ. 3, n° 476), nous trouvons

$$T = \frac{n+p-2}{n-1} \times S = \frac{n+p-2}{p-1} \times t \;\ldots\; (11)$$

Ces formules servent à déduire les uns des autres, et de proche en proche, les termes qui composent soit la ligne p^e, soit la n^e colonne. Par ex. $p = 6$ donne $T = \frac{n+4}{n-1} . S$. Faisant $n = 2, 3, 4, \ldots$ on trouve $\frac{6}{1}, \frac{7}{2}, \frac{8}{3}, \frac{9}{4}, \ldots$ pour les multiplicateurs de chaque terme S du 6e ordre, donnant au produit le terme suivant T. Pour $n = 7$,

$T = \frac{p+5}{p-1} \cdot t$, donne $\frac{7}{1}$, $\frac{8}{2}$, $\frac{9}{3}$, ... facteurs qui servent à passer d'un terme t de la 7e colonne au suivant T.

3° On trouve qu'en ajoutant les deux termes de rangs $n-1$ et n de 3e ordre, la somme est n^2; donc *la somme de deux nombres du 3e ordre successifs est un carré parfait, et tout carré est décomposable en deux nombres du 3e ordre.* C'est ainsi que 121, carré de 11, est la somme de 55 et 66, qui sont le 10e et 11e nombres du 3e ordre.

4° Ajoutant les valeurs de $A \ldots R, S, T, \ldots$ (p. 20), on a $T = 1 + a \ldots + r + s + t$; ainsi un terme quelconque T est la somme de tous ceux de l'ordre précédent, jusqu'à celui t qui a le même rang; ou bien *le terme général de l'ordre* p *est le terme sommatoire de l'ordre* p — 1; donc pour obtenir *le terme sommatoire* Σ, ou la somme des n 1ers termes de l'ordre p, il faut changer p en $p+1$ dans l'equ. 10,

$$\Sigma = [(n+p-1)\ Cp \text{ ou } (n-1)];$$

pour le 7e ordre, par ex., $\Sigma = [(n+6)\ C7]$; la 7e série arrêtée au 9e terme a pour somme $[15\ C7] = 6435$.

5° On verrait de même qu'*un terme quelconque du tableau est la somme des termes de la colonne qui précède, limitée au même ordre*; c'est d'ailleurs ce qui résulte de ce que *la première colonne est formée des mêmes nombres que l'ordre* p, car ces termes sont, deux à deux, ceux qui se reproduisent dans une même hypoténuse, comme étant à distance égale des extrêmes (*V*. p. 4, I).

490. Nous avons pris pour origine de notre tableau la série 1.1.1...., prenons $1 . \delta . \delta . \delta \ldots$, et suivons la même génération; le 2e ordre sera l'équidifférence $1 . 1+\delta . 1+2\delta . 1+3\delta \ldots$ et ainsi des ordres suivants, comme on le voit dans ce tableau, dont le précédent n'est qu'un cas particulier:

1er ordre.	1.	δ.	δ.	δ.	δ. . .
2^e	1.	$1+\delta$.	$1+2\delta$.	$1+3\delta$.	$+4\delta$. . .
3^e	1.	$2+\delta$.	$3+3\delta$.	$4+6\delta$.	$5+10\delta$. . .
4^e	1.	$3+\delta$.	$6+4\delta$.	$10+10\delta$.	$15+20\delta$. . .
5^e	1.	$4+\delta$.	$10+5\delta$.	$20+15\delta$.	$35+35\delta$. . .
6^e	1.	$5+\delta$.	$15+6\delta$.	$35+21\delta$.	$70+56\delta$. . .

Il est visible que tous les termes ont la forme $T = A + B\delta$; e rapprochant les nombres de ceux du 1er tableau, on trouve que A est

le terme de même rang n dans l'ordre précédent $p-1$, et que le facteur B est le terme de même ordre p dans le rang précédent $n-1$:

$T = n^e$ terme de l'ordre $(p-1) + [(n-1)^e$ terme de l'ordre $p)]\delta$,

$$T=(n-1)\frac{n}{2}\cdot\frac{n+1}{3}\cdots\frac{n+p-3}{p-1}\cdot\left(\frac{p-1}{n-1}+\delta\right).$$

Tel est le *terme général* de ce dernier tableau. *Le terme sommatoire* Σ *de l'ordre* p, *est le terme général de l'ordre* p $+$ 1, comme ci-devant. Par ex., $p=3$ donne, pour le 3ᵉ ordre,

$$T=n+\tfrac{1}{2}n\delta(n-1),\ \Sigma=\tfrac{1}{2}n(n+1)[1+\tfrac{1}{3}\delta(n-1].$$

On fait dans le 1ᵉʳ ex. $\delta=2$, et les carrés 1 . 4 . 9 . 16 . . . dérivent de la progression impaire 1 . 3 . 5 . 7 . . . ; dans la seconde série $\delta=3$, etc.

1. 2. 2. 2. 2. . . .	1. 3. 3. 3. 3. . . .	1. 4. 4. 4. . . .
1. 3. 5. 7. 9. . . .	1. 4. 7. 10. 13. . . .	1. 5. 9. 13. . . .
1. 4. 9. 16. 25. . . .	1. 5. 12. 22. 35. . . .	1. 6. 15. 28. . . .
$T=n^2$	$T=n\cdot\frac{3n-1}{2}$	$T=n(2n-1)$
$\Sigma=n\cdot\frac{n+1}{2}\cdot\frac{2n+1}{3}$	$\Sigma=n^2\cdot\frac{n+1}{2}$	$\Sigma=n\cdot\frac{n+1}{3}\cdot\frac{4n-1}{3}$.

491. Si l'on coupe le côté al (fig. 23) du triangle alm en $n-1$ parties égales, aux points $b, d, f,$ . . . . et qu'on mène bc, de, fg. . . . . parallèles à la base lm, ces longueurs croissent comme les nombres 1 . 2 . 3 . 4 . . . . En plaçant un point en a, 2 en b et c, 3 sur de, 4 sur fg, ... la somme de ces points, depuis a, est successivement 1 . 3 . 6 . 10 . . . . ; et le triangle alm contient autant de ces points qu'il est marqué par le n^e de ces nombres du 3ᵉ ordre, qu'on a, pour cette raison, nommés *triangulaires*. Ces points sont équidistants, quand le triangle est équilatéral.

De même dans un polygone, de m côtés, on mène des diagonales de l'un des angles a, et l'on divise ces lignes et les côtés de l'angle a en $n-1$ parties égales : joignant par des droites les points de même numéro, on forme $n-1$ polygones qui ont l'angle a commun, et $m-2$ côtés parallèles. Les périmètres de ces côtés croissent comme 1 . 2 . 3 . 4 . . . Qu'on place un point à chaque angle, un au milieu des côtés parallèles du 2ᵉ polygone, 2 points sur chacun des côtés du 3ᵉ, etc., ces côtés contiendront 1 . 2 . 3 . . . . .

points de plus, et le contour des $m - 2$ côtés parallèles auront chacun $m - 2$ points de plus que dans le précédent. Faisons $\delta = m - 2$, l'aire de notre polygone contiendra donc des points (équidistants, si la figure est régulière) en quotité marquée par le n^e terme de la série du 3e ordre, qu'on tire de $1 . \delta . 2\delta . 3\delta \ldots$ C'est ce qui a fait nommer *Carrés*, *Pentagones*, *Hexagones*. . . les nombres de ces séries, dont nous avons donné les termes général et sommatoire, pour $\delta = 2, 3, 4, \ldots$ ou $m = 4, 5, 6 \ldots$ En général, on appelle *nombres polygones*, tous ceux du 3e ordre, parce qu'ils peuvent être équidistants et contenus dans une figure polygonale.

Si l'on raisonne de même pour un angle trièdre, on verra que la série $1 . 4 . 10 . 20 \ldots$ représente la quotité de points qu'on peut y placer sur des plans parallèles, ce qui a fait nommer ces nombres *Pyramidaux*. Les nombres *polyèdres* composent les séries du 4e ordre, dont nous savons déterminer les termes général et sommatoire, en faisant $p = 4$ et 5. L'analogie a porté à généraliser ces notions, et l'on appelle *nombres figurés* tous ceux qui sont soumis à la loi du no 489, et compris dans le tableau précédent, quoiqu'on ne puisse réellement représenter tous ces nombres par des figures de Géométrie, au delà du 4e ordre.

Sur les Permutations et les Combinaisons, dans le cas où les lettres ne sont pas toutes inégales.

492. Effectuons le produit du polynome $a + b + c \ldots$, plusieurs fois facteur, en ayant soin d'écrire, dans chaque terme, la lettre multiplicateur au premier rang, et de laisser à sa place chaque lettre du multiplicande.

$$\begin{array}{ll} A\ldots & a + b + c \ldots \\ & a + b + c \ldots \\ \hline B\ldots & aa + ab + ac \ldots \\ & ba + bb + bc \ldots \\ & ca + cb + cc \ldots \\ & \ldots\ldots\ldots \\ \hline & a + b + c \ldots \end{array}$$

$$\begin{array}{l} C\ldots\ aaa + aab + aac \ldots + aba + abb + abc \ldots + aca + acb \ldots \\ \quad baa + bab + bac \ldots + bba + bbb + bbc \ldots + bca + bcb \ldots \\ \quad caa + cab + cac \ldots + cba \ldots \text{ et ainsi de suite.} \end{array}$$

Le produit B est formé des arrangements 2 à 2 des lettres $a, b, c \ldots$; C, des permutations 3 à 3, etc., en admettant qu'une

lettre puisse entrer 1, 2, 3. . . . fois dans chaque terme, et ainsi des autres. En effet, pour que deux arrangements 3 à 3 dont a est initial, fussent répétés deux fois dans C, ou qu'un d'eux fût omis, il faudrait que le système des deux lettres à droite de a fût un arrangement de 2 lettres répété lui-même, ou omis dans B.

Le produit B a m termes dans chaque ligne, et m lignes; m étant le nombre des lettres a, b, c . . . . Ainsi, il y a m^2 arrangements 2 à 2 ; le produit C a m lignes chacune de m^2 termes, ce qui fait m^3 arrangements 3 à 3.... ; enfin m^n *est la quotité des permutations* n *à* n *de* m *lettres, quand chaque lettre peut entrer* 1, 2, 3, . . . *et jusqu'à* n *fois dans les résultats ; n* peut d'ailleurs être $> m$. Par ex., 9 chiffres pris 4 à 4 donnent 9^4, ou 6561 nombres différents.

La somme des arrangements de m lettres 1 à 1, 2 à 2, 3 à 3,.... n à n, est $m + m^2 + m^3 \ldots + m^n$, ou $m \cdot \dfrac{m^n - 1}{m - 1}$. Avec 5 chiffres pris seuls, ou 2, ou 3 ensemble, la quotité des nombres qu'on peut écrire est $\frac{5}{4}(5^3 - 1)$, ou 155.

Soient n dés A, B, C.... à f faces marquées des lettres a, b, c....; un jet de ces dés produira un système tel que *abacc*.... Si l'on prend le 1er dé A, et qu'on lui fasse présenter tour à tour ses diverses faces, sans rien changer aux autres dés, le système ci-dessus en produira f; ainsi nos n dés donnent f fois plus de résultats que les $(n - 1)$ autres dés B, C.... ; donc deux dés donnent f^2 hasards, 3 dés donnent f^3, 4 dés f^4,.... n *dés à* f *faces produisent* f^n *hasards.* Nous regardons ici, comme différents, les résultats identiques, lorsqu'ils sont amenés par des dés différents.

Si le 1er dé a f faces, le 2e f', le 3e f'',... le nombre des hasards est $f \times f' \times f''$....

493. Soient m places vacantes A, B, C.... qu'il s'agit de faire occuper par m lettres, savoir, α places par a, β places par b, etc. Cherchons de combien de façons on peut faire cette distribution. Il est clair que pour placer les α lettres a, il suffit de prendre α des lettres A, B, C,... et de les égaler à a : cela peut se faire d'autant de façons qu'il est possible d'égaler de fois à a, α des lettres A, B, C...; $[mC\alpha]$ marque donc de combien de manières on peut faire occuper α places, sur m qui sont vacantes (*voyez* n° 478).

Il reste, dans chaque terme, $m - \alpha$ places vacantes, dont β peuvent être remplies par la lettre b, d'autant de façons qu'il est marqué par $[m - \alpha C\beta]$; le produit $[m C\alpha] \times [(m - \alpha) C\beta]$, indi-

que de combien de manières on peut distribuer α lettres a, et β lettres b, dans m places vacantes.

Sur les $m - \alpha - \beta$ places qui restent à occuper, on peut placer γ lettres c; et chaque terme en produit un nombre

$$(m - \alpha - \beta)\, C\gamma, \dots \text{ etc.};$$

ainsi, jusqu'à ce qu'il n'y ait plus de places vacantes, ce qui arrive quand on a $\theta C\theta = 1$. Donc, *si l'on veut distribuer les* m *facteurs* $a^\alpha\, b^\beta\, c^\gamma \dots$ *de toutes les manières possibles,* ou *former tous les arrangements qu'ils peuvent subir, les résultats seront en nombre marqué par* N, formule (9), page 13, qui est le coefficient du terme général d'un polynome.

Par ex., les 10 facteurs $a^4\ b^3\ c^2\ d$ forment des permutations en nombre $N = \dfrac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots 10}{2 \cdot 3 \cdot 4 \times 2 \cdot 3 \times 2}$ ou 12600. Les 7 lettres du mot *Étienne* peuvent être arrangées de 420 façons différentes.

Ce coefficient N exprime aussi *combien il y a de hasards qui, avec* m *dés à* f *faces, peuvent amener un résultat donné.* Car si ces dés ont sur leurs faces les f lettres $a, b, c, \dots$ et si l'on veut que α dés offrent la face a, ce sera comme si α lettres a devaient se placer dans les rangs dont le nombre est m : ce qui donne $[mC\alpha]$ hasards pour produire α lettres a. Pour que β de nos $m - \alpha$ autres dés présentent la face b, il faut de même faire remplir β places sur $m - \alpha$ vacantes ; chacun de nos résultats précédents en produit donc $[(m - \alpha)\, C\beta]$, et ainsi de suite.

494. Cherchons *les combinaisons des lettres* a, b, c, ... *en admettant que chaque facteur puisse entrer plusieurs fois dans les divers termes* (comme n° 492, excepté que l'ordre des facteurs est ici indifférent). Multiplions plusieurs fois par lui-même le polynome $a + b + c \dots$ en ne prenant pour facteur d'un terme $a, b, c, \dots$ que les termes du multiplicande qui sont dans la même colonne ou à sa gauche. Il est visible qu'on aura pour résultats successifs les combinaisons demandées 2 à 2, 3 à 3....

$$\begin{array}{rrrr}
a + & b + & c + & d\dots \\
a + & b + & c + & d\dots \\
\hline
aa + & bb + & cc + & dd\dots \\
 & + ab + & bc + & cd\dots \\
 & & + ac + & bd\dots \\
 & & & + ad\dots \\
\hline
aaa + & bbb + & ccc + & ddd\dots \\
 & + abb + & bcc + & cdd\dots \\
 & + aab + & acc + & bdd\dots \\
 & & + bbc + & add\dots \\
 & & + abc + & ccd\dots \\
 & & + aac + & \text{etc}\dots
\end{array}$$

Quant aux nombres des combinaisons, chaque colonne d'un produit contient autant de termes qu'il y en a dans la colonne qui

est au-dessus, plus dans celles qui sont à gauche. Si 1, α, β, γ,.... sont les nombres des termes des colonnes d'un produit, ceux du produit suivant sont donc $1 + \alpha$, $1 + \alpha + \beta$, $1 + \alpha + \beta + \gamma$. Cette série se tire de $1 . \alpha . \beta$ .... selon la loi des nombres figurés (nº 489); donc, pour les combinaisons 2 à 2, les colonnes successives contiennent 1.2.3.4.... termes; pour les combinaisons 3 à 3, elles en ont 1.3.6.10....; pour celles p à p, on a la série du p^e ordre. Le nombre total des combinaisons, ou celui des termes d'un produit, est la somme de la série, étendue à 2, 3, 4.... colonnes, selon qu'on a 1, 2, 3.... lettres à combiner. Pour n lettres, il faut ajouter les n 1ers termes de l'ordre p, c'est-à-dire prendre le n^e terme de l'ordre $p + 1$. Ainsi, la *quotité de combinaisons de* n *lettres* p *à* p, *en admettant que chacune puisse y entrer* 1, 2, 3.... p *fois, est le* n^e *nombre de l'ordre* p + 1. Il faut donc changer p en $p + 1$ dans l'équ. (10) page 21 :

$$T = n\,\frac{n+1}{2}\cdot\frac{n+2}{3}\cdots\frac{n+p-1}{p}$$

$$= (p+1)\,\frac{p+2}{2}\cdots\frac{p+n-1}{n-1}. \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

n peut être $>$, $=$ ou $<$ p. Par ex., 10 lettres 4 à 4 donnent 715 résultats; 4 lettres 10 à 10 en donnent 286. On voit d'ailleurs que n lettres, prises p à p, et $p + 1$ lettres prises $n - 1$ à $n - 1$, donnent autant de combinaisons, puisqu'on peut remplacer n par $p + 1$, et p par $n - 1$, sans changer T.

La même équ. (12) en changeant p en n, et n en p, donne aussi la solution du problème suivant, dont on trouve une application dans la collation des grades universitaires des Facultés. On a des boules de p couleurs différentes, blanches, rouges, noires....; on est convenu d'attribuer à chaque couleur une signification, telle que, *bon, médiocre, mauvais*.... Un nombre n de personnes expriment leur jugement en faisant choix chacun d'une boule de couleur conforme à son opinion. On demande le nombre de combinaisons que le résultat peut présenter?

Il s'agit de prouver que les nombres du tableau p. 20, donnent ces nombres de résultats, en prenant les lignes 1, 2, 3,.... suivant qu'il y a des boules de 1, 2, 3.... couleurs, et prenant dans cette ligne les termes de rangs 2, 3, 4,... selon qu'il y a 1, 2, 3.... juges.

En effet, supposons qu'on ait effectué toutes les combinaisons dans les cas de boules de 1, 2 et 3 couleurs, jusqu'au terme 10 de la 3[e] ligne, et cherchons le terme 15 qui suit, pour le cas de trois couleurs et de trois juges. On formera d'abord les résultats suivants qui contiennent des boules blanches :

3 blanches; 2 bl., 1 noire; 1 bl., 2 noires; 1 bl., 1 noire, 1 rouge;
2 bl., 1 rouge; 1 bl., 2 rouges;

de plus, on aura les résultats privés de blanches :

2 noires; 2 rouges; 1 rouge; 1 noire.

Or, sur ces 10 combinaisons, les six premières sont, dans notre tableau, le nombre qui est à gauche de 10, puisque si l'on y supprimait 1 blanche partout, on aurait tous les résultats de 3 boules avec 3 couleurs ; et le chiffre 3 est celui qui est au-dessus de 10, le nombre de combinaisons de 3 boules de 2 couleurs. Ainsi tout nombre du tableau que nous voulons former est, ainsi qu'on l'a vu pour le tableau p. 20, la somme de celui qui est à gauche plus celui qui est au-dessus. Ces deux tableaux n'en font donc qu'un seul, et on a

$$T = [(n + p - 1)\, Cn, \text{ ou } (p - 1)].$$

Lorsqu'il s'agit des grades de Facultés, on ne se sert que de boules de 3 couleurs, et le nombre des juges est de 3 à 6 selon les cas; $p = 3$ donne $T = \frac{1}{2}(n + 1)(n + 2)$.

Le développement de $(a + b + c..,)^p$ est formé (n° 483) d'autant de termes de la forme $Na^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots$ qu'on peut prendre de nombres différents pour les exposants $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ leur somme demeurant $= p$. La quotité totale des termes est donc égale à celle des combinaisons p à p, qu'on peut former avec les n lettres $a, b, c, \ldots$ en leur attribuant tous les exposants de zéro à p. Il est clair que T (p. 27) *est le nombre de termes de la puissance* p *du polynome* a+b+c...

Si l'on veut la somme des combinaisons de n lettres 1 à 1, 2 à 2,.... p à p, il faut ajouter le n^e nombre des ordres successifs 1.2.3.... $p + 1$ dans le tableau du n° 489, ou la n^e colonne, qu'on sait avoir pour somme le $(n + 1)^e$ nombre de même ordre $p + 1$. Changeons donc n en $n + 1$ dans l'équ. (12), et nous aurons, pour la somme demandée,

$$S = [(n + p)\, Cp, \text{ ou } n] - 1.$$

Cette unité soustractive répond aux combinaisons zéro à zéro, qu'on doit omettre ici. Par exemple, 5 lettres combinées depuis 1 à 1, jusqu'à 4 à 4, ou 4 lettres de 1 à 1 jusqu'à 5 à 5, donnent ce nombre de résultats $\frac{6\,.\,7\,.\,8\,.\,9}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4} - 1 = 125$.

Si l'on veut les combinaisons depuis p à p, jusqu'à p' à p', on applique deux fois la formule (aux nombres p et p'), et l'on retranche les résultats. 5 lettres prises de 4 à 4 jusqu'à 6 à 6 forment 461 — 125, ou 336 combinaisons.

495. Proposons-nous d'avoir *toutes les combinaisons des lettres du monome* $a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots$ *prises* 1 *à* 1, 2 *à* 2, 3 *à* 3, *jusqu'à la dimension* $\alpha + \beta + \gamma \ldots$ Les exposants 1, 2, 3,... α peuvent affecter a; de même 1, 2, 3,... β pour b, etc.; la question se réduit visiblement à trouver tous les diviseurs de $a^\alpha b^\beta c^\gamma, \ldots$ qui sont les termes du produit (note, page 30 du 1[er] vol.),

$$(1 + a + a^2 \ldots a^\alpha)\,(1 + b + b^2 \ldots b^\beta)\,(1 + c \ldots c^\gamma) \ldots$$

Le nombre des termes, ou celui des combinaisons demandé, est $(1 + \alpha)\,(1 + \beta)\,(1 + \gamma) \ldots$ Par exemple, $a^5\, b^4\, c^3\, d^2$ a 360 diviseurs (6.5.4.3) en y comprenant 1; il y a donc 359 manières de combiner les facteurs 1 à 1, 2 à 2, etc.

Et si l'on ne veut que *ceux de ces diviseurs qui contiennent* a, comme les autres divisent $b^\beta c^\gamma \ldots$ et que ceux-ci sont en nombre $(1 + \beta)\,(1 + \gamma) \ldots$, en les retranchant, il reste $\alpha\,(1 + \beta)\,(1 + \gamma) \ldots$ pour la quotité des diviseurs qui admettent a : comme si l'on eût apporté, près de toutes les combinaisons sans a, les facteurs a, a^2, a^3,...

Pour savoir combien, parmi les diviseurs de $a^\alpha b^\beta c^\gamma, \ldots$ il en est qui renferment $a^m b^n$, je prends tous ceux de $c^\gamma d^\delta \ldots$, dont le nombre est $(1 + \gamma)\,(1 + \delta) \ldots$, et j'apporte $a^m b^n$ près de chacun : les résultats sont donc en nombre égal.

Notions sur les Probabilités.

496. Quand on attend un événement du hasard, la prudence consiste à réunir le plus grand nombre de chances favorables : l'événement devient *probable* à raison de la valeur et de la quotité de ces chances. Des événements sont *également possibles*, quand il

y a autant de motifs d'espérer que chacun arrivera, en sorte qu'il y ait une égale indécision pour présumer celui qui sera réalisé, et que des joueurs qui se partageraient ces chances en même nombre pour chacun, eussent des motifs égaux d'espoir, et un droit égal à le voir vérifié. On juge du degré de *probabilité* d'un événement, en comparant le nombre des chances qui l'amènent, au nombre total de toutes les chances également possibles.

La probabilité se mesure par une fraction dont le dénominateur est la quotité de tous les événements également possibles, et dont le numérateur est le nombre des cas favorables. Je veux amener 5 et 2 avec deux dés dont les faces portent 1, 2, 3, 4, 5 et 6; il n'y a que deux cas, sur 36 également possibles, de voir 5 et 2 arriver; donc la probabilité est $\frac{2}{36}$ ou $\frac{1}{18}$. Si j'espère amener 7 pour somme de points, je compte trois cas doubles, qui me sont favorables, 5 et 2, 6 et 1, 4 et 3; j'ai donc $\frac{6}{36}$ ou $\frac{1}{6}$, pour probabilité : il y a 1 à parier contre 5 qu'on réussira.

Il faut donc *nombrer toutes les chances possibles et égales, puis celles qui sont heureuses, et former une fraction de ces deux nombres.* Quand la probabilité est $> \frac{1}{2}$, il y a *vraisemblance; incertitude,* si cette fraction est $\frac{1}{2}$, c'est-à-dire qu'*on peut indifféremment parier pour ou contre l'événement.* La probabilité devient certitude quand la fraction est 1, puisque tous les événements possibles sont alors favorables. En réunissant les probabilités pour et contre un événement, on trouve toujours l'unité.

Nous allons faire plusieurs applications de ces principes.

Sur 32 cartes mêlées, 12 sont des figures, 20 des cartes blanches; la probabilité d'amener une figure, en tirant une seule carte, est $\frac{12}{32} = \frac{3}{8}$. Il y a donc 3 à parier contre 5 qu'on amènera une figure, 5 contre 3 qu'on tirera une carte blanche.

Sur m cartes, il y en a p d'une sorte désignée; quelle est la probabilité d'en tirer m' qui soient toutes de cette espèce? Le nombre des cas possibles est mCm'; celui des cas favorables est pCm'; la probabilité demandée est $\frac{pCm'}{mCm'}$. Sur un jeu de 52 cartes, par ex., il y a 13 cœurs; en tirant 3 cartes au hasard, la probabilité qu'elles sont toutes trois des cœurs est $13C3 : 52C3$ ou $\frac{286}{22100}$, environ $\frac{1}{77}$.

Sur m cartes, il y a a cœurs, a' piques, etc.; on tire $m' + m''$ cartes; quelle est la possibilité qu'elles sont m' cœurs et m'' piques? $mC(m' + m'')$ est le nombre de tous les hasards possibles. Les a

cœurs, combinés m' à m', forment aCm' systèmes; les a' piques, $a'Cm''$: en accouplant ces chances (nº 478), le nombre des favorables est $[aCm']\ .\ [a'Cm'']$; c'est le numérateur cherché. Il serait $[aCm']\ [a'Cm'']\ .\ [a''Cm''']$, s'il y avait en outre a'' carreaux dont on voulût tirer m'', etc.

La roue de loterie contient m numéros dont on tire p; un joueur en a pris m'; quelle est la probabilité qu'il en sortira *précisément* p'? Le nombre total des chances est mCp, dénominateur cherché. On a trouvé (nº 478) le nombre des chances favorables, ainsi le numérateur est

$$X = [(m - m')\, C\, (p - p')]\ [m'Cp'].$$

Dans la Loterie de France, $m = 90$, $p = 5$, le dénominateur est $90\ C5 = 43949268$. Qu'un joueur ait pris 20 numéros, par ex., $m = 20$, s'il veut qu'il en sorte *précisément*

$1 = p'$, numér.		$20\ .\ [70C4]$	probabil.	0,4172
$2 = p'$	....	$20 . \frac{19}{2} . [70C3]$	....	0,2367
$3 = p'$	....	$20 . \frac{19}{2} . \frac{18}{3} . [70C2]$	....	0,0626
$4 = p'$	....	$70[20C4]$	....	0,0077
$5 = p'$	....	$[20C5]$	....	0,0003

Si l'on veut qu'il sorte au moins 1 numéro, c'est-à-dire qu'il en sorte 1,2,3,4 ou 5, il faut prendre la somme 0,7245. Pour qu'il en sorte au moins 2, ajoutez ces résultats, excepté le 1er; la probabilité est 0,3073, etc. Si vous voulez qu'il ne sorte aucun numéro, faites p' nul, ou prenez le complément de 0,7245 à 1; vous aurez 0,2755.

Ces problèmes peuvent s'énoncer ainsi : sur m cartes, il y en a m' désignées; on en tire p, et on veut qu'il y en ait, *ou précisément, ou au moins*, p' prises parmi les désignées : trouver la probabilité? Par ex., un joueur de piquet a reçu 12 cartes, d'où il conclut que, parmi les 20 autres, il y a 7 cœurs; quelle est la probabilité que s'il reçoit encore 5 cartes, il y aura précisément 3 cœurs? $m = 20$, $m' = 7$, $p = 5, p' = 3$; d'où résulte $\frac{[13C2]\ .\ [7C3]}{20C5} = \frac{2730}{15504}$, environ $\frac{3}{17}$. En raisonnant comme ci-dessus, on aurait pour la probabilité qu'il viendra au moins 3 cœurs, $\frac{3206}{15504}$, ou environ $\frac{6}{29}$.

On a dans une bourse 12 jetons, dont 4 blancs, on en tire 7; quelle est la probabilité qu'il y en a précisément 3 blancs? $m = 12$,

$m' = 4, p = 7, p' = 3$; d'où on tire $\frac{280}{792}$, à peu près $\frac{6}{17}$. La probabilité de tirer au moins 3 jetons blancs sur 7 est $\frac{14}{33}$.

497. Deux événements A, A' sont amenés par p, p' causes ; il y en a q, q' qui s'y opposent ; on admet qu'ils peuvent arriver ensemble ou séparément, et qu'ils sont indépendants l'un de l'autre : on demande quelles sont les probabilités de tous les cas. Imaginons deux dés, l'un à $p + q$ faces colorées, p en blanc, q en noir ; l'autre à $p' + q'$ faces colorées, p' en rouge, q' en bleu : il est visible que le jet de chacun de ces dés séparément amène des résultats comparables à nos deux événements. A sera réalisé, si l'on amène l'une des p faces blanches, et il ne le sera pas, si l'on amène l'une des q faces noires, etc. Le nombre total des hasards (p. 25) est $(p + q) \times (p' + q')$ dénominateur commun de toutes nos probabilités.

Si l'on veut qu'une face noire et une rouge arrivent ensemble, les q faces noire et les p' rouges offrent qp' combinaisons, ce sont les cas favorables ; donc la probabilité est

$$\frac{qp'}{(p+q)(p'+q')} = \frac{q}{p+q} \times \frac{p'}{p'+q'};$$

c'est celle de voir arriver A' sans que A ait lieu. Il en sera de même des autres cas.

Observez que nous avons ici le produit des probabilités relatives à chacun des événements souhaités ; donc *si des événements sont indépendants les uns des autres, la probabilité qu'ils arriveront ensemble est le produit de toutes les probabilités relatives à chacun séparément*. Ce théorème des *probabilités composées* n'est ici démontrée que pour deux événements ; mais s'il y en avait un 3e A'', ou un 3e dé à $p'' + q''$ faces, le même raisonnement s'appliquerait, et justifierait la conséquence énoncée.

Par un jet de deux dés à 6 faces, on veut amener 4 et as ; quelle est la probabilité de succès ? En ne considérant qu'un dé, il y a six hasards, dont deux favorables (4 ou as), probabilité simple $\frac{2}{6}$ ou $\frac{1}{3}$; mais ce 1er cas étant arrivé, le 2e dé doit encore amener l'autre point (as ou 4), autre probabilité simple $\frac{1}{6}$; donc probabilité cherchée $\frac{1}{3} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{18}$; comme si l'on eût comparé les 2 cas favorables, aux 36 hasards possibles.

On a séparé les couleurs d'un jeu de 32 cartes, en 4 paquets, 8 cœurs, 8 carreaux, etc. ; on demande combien on peut parier d'a-

mener l'une des 3 figures de cœurs? comme on ignore quel est le paquet qui contient les cœurs, $\frac{1}{4}$ est la probabilité simple qu'on s'adressera à cet assemblage : mais, dans ce cas même, sur 8 cartes, il faut tirer l'une des 3 figures, autre probabilité simple $\frac{3}{8}$; donc celle qu'on demande est composée des deux précédentes, ou $\frac{3}{32}$.

Quand les probabilités se composent, elles s'affaiblissent, puisqu'elles résultent du produit de plusieurs quantités < 1. Un homme dont la véracité m'est connue m'atteste un fait qu'il a vu ; j'évalue à $\frac{9}{10}$ la probabilité qu'il ne veut pas me tromper, et qu'il n'a pas été induit lui-même en erreur par ses sens. Mais s'il ne tient le fait que d'un témoin aussi véridique, la probabilité n'est plus que de $\frac{9}{10} \times \frac{9}{10}$, ou $\frac{81}{100}$, à peu près $\frac{4}{5}$. S'il y avait ainsi 20 intermédiaires, on n'aurait plus que $\left(\frac{9}{10}\right)^{20}$, c'est-à-dire pas même $\frac{1}{8}$: il y aurait 7 à parier contre 1 que le fait transmis est faux, quoique tous les intermédiaires soient également véridiques. On a comparé cette diminution de la probabilité, à l'extinction de clarté des objets, vus par l'interposition de plusieurs morceaux de verres.

498. Quand les probabilités simples sont égales entre elles, le résultat, ou produit, est une puissance de cette quantité. Un événement A est amené par p causes, il y en a q qui s'y opposent ; quelle est la probabilité d'amener k fois A en n coups? Il est clair qu'à chaque coup la probabilité simple est $\frac{p}{p+q}$ pour A, et $\frac{q}{p+q}$ contre. Si l'événement se réalise k fois, on a la puissance k de la 1re fraction, et s'il n'a pas lieu, les $n-k$ autres coups, on a la puissance $n-k$ de la 2e. Donc, en multipliant ces deux puissances, il vient la probabilité composée

$$z = \frac{p^k \cdot q^{n-k}}{(p+q)^n},$$

qui exprime qu'en n coups, A sera précisément arrivé k fois, l'ordre de succession des événements étant fixé d'avance. Mais si cet ordre est arbitraire, il faut répéter z autant de fois qu'on peut combiner ces résultats, savoir les n fois que l'événement A arrive, avec les $n-k$ où il n'a pas lieu, facteur $[nCk]$: donc $z \times [nCk]$ est la probabilité que A arrivera k fois en n coups, sans désigner ceux où il devra se réaliser.

Et si l'on veut que A arrive au moins k fois, on changera ici k

en k, $k+1$,.... jusqu'à n, et l'on prendra la somme des résultats.

Donc le dénominateur de la probabilité cherchée est $(p+q)^n$: le numérateur s'obtient en développant ce binôme, et s'arrêtant au terme où entre p^k, qu'on prendra sans ou avec son coefficient, selon qu'on voudra avoir ou n'avoir pas égard aux k rangs où A se réalise en n coups. Et si l'on veut que A arrive au moins k fois, et au plus k' fois, en n coups, on ajoutera tous les termes où p a les exposants k, $k+1$,.... k'.

Par ex., un dé à 6 faces en a 2 qui sont favorables à un joueur ; il faut, pour qu'il gagne, qu'en 4 coups il amène 3 fois l'une ou l'autre (ou, en un seul jet de 4 dés, il faut que 3 faces soient favorables) ; on demande la probabilité du gain ? J'ai $p=2$, $q=4$, puis $(p+q)^4 = 6^4 = 1296 =$

p^4	$=$ 16	coups qui amènent 4 fois l'une des faces favorabl.
$+4p^3q$	$=$ 128	 3
$+6p^2q^2$	$=$ 384	 2
$+4pq^3$	$=$ 512	 1
$+q^4$	$=$ 256	 0
Somme	$=$1296	$=(p+q)^4$, dénominateur des probabilités.

Donc la probabilité d'amener *précisément* 3 fois l'un des cas favorables est $\frac{128}{1296}$ ou $\frac{9}{81}$: on divisera par le coefficient 4, si l'on doit désigner l'ordre où ils arrivent, et l'on aura $\frac{2}{81}$; enfin, ajoutant les deux 1[ers] nombres, on a $\frac{144}{1296}$ ou $\frac{1}{9}$, pour la probabilité que les faces favorables se présenteront au moins 3 fois.

Quel est le *sort* de deux joueurs M et N d'égales forces ; il manque 6 points à M pour gagner la partie, et il en manque 4 à N? La somme de ces points est 10 ; je forme la 9[e] puissance de $p+q$; je réserve pour M les 4 1[ers] termes (où l'exposant de p est au moins 6), je prends pour N les 6 autres termes ; enfin je fais $p=q=1$. Je trouve 130 d'une part, 382 de l'autre, et la somme totale 512 : le sort de M, ou la probabilité qu'il gagnera, est $\frac{130}{512}$, celle de N est $\frac{382}{512}$. Si la partie était rompue avant de tenter rien, l'enjeu devrait être partagé entre M et N dans le rapport de 130 à 382, à très-peu près comme 1 à 3 : c'est aussi le prix qu'ils doivent vendre leurs prétentions à l'enjeu, s'ils consentent à céder le droit qu'ils y ont. Quand la force des joueurs est, par ex., comme 3 à 2, c'est-à-dire quand M gagne ordinairement à N 3 parties sur 5, ou que M cède à N 1 point sur 3 pour égaliser les forces, le calcul est le même en

posant $p = 3$ et $q = 2$. Dans ce cas, on trouve que le sort de M est à celui de N environ :: 14 : 15.

499. Il arrive souvent que les causes sont si cachées, ou se croisent d'une manière si variée, qu'il est impossible de les démêler et d'en nombrer la multitude : les principes exposés précédemment ne peuvent plus recevoir d'application. On consulte alors l'expérience, pour s'assurer si les événements sont assujettis à un retour périodique, d'où l'on puisse conjecturer avec vraisemblance que la cause inconnue qui les a ramenés souvent sous un ordre régulier, agissant encore, les reproduira dans le même ordre. Le nombre de ces retours est substitué à celui des causes mêmes dans les calculs de probabilité. Un dé jeté 10 fois de suite a présenté 9 fois la face *a;* il y a donc dans l'action qui le pousse, dans sa figure, sa substance, quelque cause cachée qui produit le retour de 9 fois la face *a* : si 100 épreuves ont ramené de même 90 fois cette face *a*, la probabilité $\frac{9}{10}$ favorable à ce retour acquiert une grande force, qui s'accroît encore quand les épreuves multipliées s'accordent avec cette supposition; puisque si l'on pouvait faire un nombre infini d'épreuves, qui toutes présentassent 9 fois sur 10 la face *a*; on aurait la *certitude* de l'hypothèse.

C'est ainsi que constamment l'expérience a prouvé les faits suivants, dont il est impossible d'assigner les causes.

1° Le nombre des mariages contractés dans un pays, pour une durée quelconque déterminée, est à celui des naissances et à la population, à très-peu près, :: 3 : 14 : 396.

2° Il naît ensemble 15 filles et 16 garçons.

3° La population, le nombre des naissances, celui des morts et celui des mariages sont :: 2037615 : 71896 : 67700 : 15345; à très-peu près, par an, les naissances sont le 28ᵉ, les morts le 30ᵉ, et les mariages le 132ᵉ de la population. La différence $\frac{1}{420}$ des naissances aux morts est l'accroissement annuel de la population.

4° La durée des générations de père en fils est de 33 ans.

5° Le nombre des morts du sexe masculin est à celui du sexe féminin :: 24 : 23; et dans un pays quelconque, le nombre des vivants du 1ᵉʳ sexe est à celui du 2ᵉ :: 33 : 29.

6° Les décès mâles sont le 58ᵉ, les féminins le 61ᵉ de la population. A Paris, la totalité des décès n'est que la 32ᵉ du nombre des habitants : ces décès s'élèvent annuellement à 22700, terme moyen, et les naissances à 24800.

7° La moitié de toute population est au-dessous de 25 ans, et tous les 25 ans, une moitié est renouvelée.

8° En France, le 66e de la population se marie chaque année. La durée de la vie moyenne est de 28 ans $\frac{1}{2}$.

9° Les rebuts annuels de la Poste aux lettres de France sont de 19000, etc....

C'est sur ces considérations qu'on établit les Tables de population et de mortalité : on peut consulter à ce sujet l'*Annuaire* du Bureau des Longitudes.

Nous ne dirons rien de plus sur la doctrine des probabilités, qui est si étendue qu'elle fait la matière des Traités spéciaux. *Voy.* ceux de MM. Laplace, Lacroix, Condorcet, Duvillard, etc.

CHAPITRE II.

RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS.

Composition des Équations.

500. Après avoir transposé et réduit, *toute équation a la forme*

$$kx^n + px^{n-1} + qx^{n-2} + rx^{n-3} \ldots + tx + u = 0, \ldots (1)$$

que nous représenterons par * $f(x) = 0$; $k, p, q \ldots u$ sont des nombres connus positifs, négatifs ou zéro. On appelle *racine* toute quantité a qui substituée à x réduit $f(x)$ à zéro, savoir $f(a) = 0$, ou $ka^n + pa^{n-1} + \ldots + u = 0$.

Soit pris au hasard un nombre a; divisons le polynome (1) par $x - a$: soit R le reste numérique, $kx^{n-1} + p'x^{n-2}b + {}_{i}'x^{n-3} \ldots + t'$

(* Toute expression analytique contenant une grandeur x est dite *fonction de* x. Les *fonctions algébriques* sont celles qui ne comportent que les opérations d'algèbre, jusques et y compris les extractions de racines; les *fonctions transcendantes* renferment des logarithmes, des exponentielles, des arcs de cercle, sinus, cosinus.... On n'exprime, dans une fonction, que les quantités auxquelles on veut avoir égard, d'après le but qu'on se propose. $F(x), f(x), \varphi(x) \ldots$ désignent des formules où la lettre x est combinée de diverses manières : $f(x)$ et $f(z)$, qui ont le même signe f, indiquent que les lettres x et z y sont engagées de même, en sorte que les fonctions deviennent identiques lorsqu'on change x en z. Par ex., $f(\sqrt{z} + \alpha)$ signifie qu'il existe une fonction $f(x)$ où l'on a remplacé x ar $(\sqrt{z} + a)$. De même, $F(x^2 + y^2)$ indique qu'on a remplacé z par $x^2 + y^2$ dans une fonction $F(z)$.

le quotient de cette division. Ce quotient multiplié par $x-a$, étant augmenté de R, doit reproduire *identiquement* le dividende (1). Ce calcul donne

$$f(x) = kx^n + \begin{matrix} p' \\ -ak \end{matrix} \Big| \; x^{n-1} + \begin{matrix} q' \\ -ap' \end{matrix} \Big| \; x^{n-2} + \begin{matrix} r' \\ -aq' \end{matrix} \Big| \; x^{n-3} \ldots + \begin{matrix} t' \\ -as' \end{matrix} \Big| \; x + \begin{matrix} R \\ -at' \end{matrix}$$

et puisque l'on doit retrouver ici tous les termes du polynome $f(x)$, le facteur p de x^{n-1} ne doit être autre chose que $p'-ak$, qui dans le produit affecte aussi x^{n-1} : de même, $q=q'-ap'$, $r=r'-aq'\ldots u=R-at'$. Transposant les termes négatifs, il vient

$$p'=p+ak,\ q'=q+ap',\ r'=r+aq'\ldots R=u+at'. \quad (2)$$

Ces équ., toutes de même forme, servent à déduire successivement les uns des autres les coefficients p', q', $r'\ldots$ du quotient, et le reste R : car *chacun se compose du coefficient de même rang dans* $f(x)$, *plus du produit par* a *du coefficient précédent.*

Voici des exemples de ce genre de calculs :

Diviser $4x^5-10x^4+6x^3-7x^2+9x-11$ par $x-2$.
Quotient $4x^4-2x^3+2x^2-3x+3$. . . . . reste -5.
Après avoir écrit $4x^4$, premier terme du quotient, on forme $4\times 2-10=-2$ qui est le coefficient de x^3; celui de x^2 est $-2\times 2+6=+2$; ensuite $2\times 2-7=-3$, etc.

Si le diviseur est $x+2$, le facteur numérique est partout -2, et le quotient est

$$4x^4-18x^3+42x^2-91x+191\ldots\ \text{reste}\ -393.$$

Mais on peut aussi trouver l'un des coefficients indépendamment de tout autre; car en éliminant successivement p', q', ... entre les équ. (2), il vient

$$p'=ka+p,\quad q'=ka^2+pa+q,\quad r'=ka^3+pa^2+qa+r\ldots$$
$$R=ka^m+pa^{m-1}+qa^{m-2}+ra^{m-3}\ldots+ta+u=f(a).$$

Ainsi, pour former un coefficient quelconque de rang i dans le quotient, il faut prendre les i premiers termes de $f(x)$, remplacer x par a, et supprimer les puissances de a communes à tous les termes; et quant au reste R de la division, il est formé du polynome proposé $f(x)$, où l'on a fait $x=a$, savoir $f(a)$.

Et comme ce reste R est ou n'est pas nul, selon que a est ou n'est

pas racine de l'équ. $f(x) = 0$, on voit que *le polynome* $f(x)$ *est ou n'est pas divisible par* x — a, *selon que* a *est ou n'est pas racine de l'équ.* $f(x) = 0$.

Le mode de calcul indiqué ci-dessus est très-commode pour trouver le quotient de $f(x) : (x - a)$, reconnaître si a est racine, et enfin obtenir le résultat numérique de la substitution d'un nombre donné a à la place de x dans un polynome $f(x)$.

501. Nous supposerons qu'*on soit assuré que toute équ. a une racine au moins*, sujet sur lequel nous reviendrons, et nous ferons $k=1$, ce qui n'ôte rien à la généralité, puisqu'on peut diviser toute l'équation (1) par k. Si a est racine de cette équation on a identiquement $f(x) = (x - a)\,Q$, Q étant un polynome de degré $n - 1$.

Or, si b est racine de l'équ. $Q = 0$, $x - b$ doit diviser Q;

d'où $$Q = (x - b)\,Q',\quad f(x) = (x - a)(x - b)\,Q'.$$

De même, c étant racine de $Q' = 0$, on a

$$Q' = (x - c)\,Q'',\quad f(x) = (x - a)(x - b)(x - c)\,Q''.$$

Les degrés des quotients s'abaissant successivement à chaque facteur binôme mis en évidence, il est clair qu'après $(m - 1)$ divisions, on arrivera à un quotient $x - l$ du 1er degré. Donc, *en admettant que toute équation ait une racine*, f (x) *de degré* n *est formé du produit de* n *facteurs binômes du premier degré,*

$$f(x) = (x - a)(x - b)(x - c)\ldots\ldots(x - l).$$

Cette équ. est identique, et la dissemblance des deux membres disparaîtrait, si l'on effectuait les calculs indiqués. Et puisque $f(x)$ devient nul lorsqu'on prend pour x l'un quelconque des nombres $a, b, c, \ldots$ *toute équ.* $f(x) = 0$ *a* n *racines, qui sont, en signes contraires, les seconds termes de ses* n *facteurs binômes.*

Prouvons qu'*on ne peut en outre décomposer* f (x) *en d'autres facteurs* $(x - a')(x - b')(x - c')\ldots$ *les grandeurs* $a', b', c'\ldots$ *étant, toutes ou plusieurs, différentes de* $a, b, c\ldots$

Pour cela, montrons que *si le binôme* x — h *divise exactement le produit de deux polynomes* A *et* B *rationnels et entiers par rapport à* x, *l'un au moins de ces polynomes est divisible par* x — h. En effet, supposons qu'en divisant A et B par $x - h$, on ait les quotients A′ et B′, et les restes numériques α et β, ou

$$A = A'(x - h) + \alpha,\quad B = B'(x - h) + \beta.$$

En faisant le produit AB, on trouve que $x - h$ entre comme facteur de tous les termes, excepté de $\alpha\beta$, qui étant un nombre, ne peut être divisible par $x - h$, à moins que l'un des restes ne soit nul. Donc, etc.

D'après cela, puisque $f(x) = (x - a)\,Q$, et qu'on suppose que $x - a'$ divise $f(x)$, il faut que $(x - a)\,Q$, ou plutôt Q, soit divisible par $x - a'$. De même pour Q', dans $Q = (x - b)\,Q'$, et ainsi de suite jusqu'au dernier facteur $x - l$, qui, n'étant pas divisible par $x - a'$, montre que $x - a'$ ne pouvait diviser $f(x)$.

Donc : 1° *Tout polynome* $f(x)$ *n'est résoluble qu'en un seul système de* m *facteurs binômes du premier degré, et l'équ.* $f(x) = 0$ *n'admet que* m *racines.*

2° Toute fraction $\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$ qui devient $\dfrac{0}{0}$ lorsqu'on fait $x = a$, a $x - a$ pour facteur commun de ses deux termes $f(x)$, $\varphi(x)$; et même $x - a$ peut y entrer à une puissance quelconque. La valeur de la fraction s'obtient en supprimant d'abord les facteurs $x - a$ qui sont communs, et faisant ensuite $x = a$: ainsi *cette valeur est finie, nulle ou infinie*, selon que $x - a$ est à la même puissance dans les deux termes, ou que $x - a$ porte un exposant plus élevé au numérateur ou au dénominateur.

3° Si deux équ. $f(x) = 0$, $\varphi(x) = 0$ ont une même racine a, $x - a$ est facteur commun. C'est ainsi que

$$2x^3 - 3x^2 - 17x + 30 = 0,\quad x^3 - 37x - 84 = 0$$

ont $x + 3$ pour facteur, qu'on obtient par la méthode du commun diviseur. La coexistence de ces deux équ. serait absurde, s'il n'y avait aucun facteur commun entre elles. Et si ce facteur était du 2e degré, les équ. auraient deux racines qui seules répondraient au problème, etc.

4° On peut, par la division, abaisser le degré n d'une équ. d'autant d'unités qu'on connaît de racines, la recherche des racines étant la même chose que celle des facteurs binômes. Les facteurs du 2e degré sont en nombre $\frac{1}{2}n\,(n - 1)$, (n° 476) puisqu'ils résultent des combinaisons 2 à 2 de ceux du 1er : ceux du 3e degré sont en nombre $\frac{1}{6}n\,(n - 1)\,(m - 2)$, etc.

502. Puisque la proposée $x^n + px^{n-1} + qx^{n-2} \ldots + u = 0$ est le produit de $(x - a)\,(x - b)\,(x - c) \ldots$, il suit de ce qu'on a vu, p. 119 du Ier vol., que

1° *Le coefficient* p *du* 2ᵉ *terme est la somme de toutes les racines* a, b, c.... *prises en signes contraires;*

2° *Le coefficient* q *du* 3ᵉ *terme est la somme des produits deux à deux de ces racines;*

3° *r est la somme des produits* 3 *à* 3 *en signes contraires,* etc.;

Enfin, *le dernier terme* u *est le produit des racines quand le degré* n *de l'équ. est pair, et ce produit en signe contraire quand le degré est impair.*

Transformation des Équations.

503. *Pour que les racines* x *d'une équ.* (1) *deviennent* h *fois plus grandes, faites* $x = \frac{y}{h}$; d'où

$$\frac{ky^n}{h^n} + \frac{py^{n-1}}{h^{n-1}} + \frac{qy^{n-2}}{h^{n-2}} \cdots + \frac{ty}{h} + u = 0,$$

et $$ky^n + phy^{n-1} + qh^2y^{n-2} \cdots + th^{n-1}y + uh^n = 0.$$

Ce calcul revient à multiplier les termes consécutifs de $f(x)$ par $h^0, h^1, h^2 \ldots h^n$.

Observez que si la proposée (1) n'a pas de coefficients fractionnaires, et l'on peut toujours l'en délivrer par la réduction au même dénominateur, en posant $h = k$, c'est-à-dire en faisant $x = \frac{y}{k}$, la transformée est divisible par k, et devient

$$y^n + py^{n-1} + qky^{n-2} \cdots + uk^{n-1} = 0;$$

ainsi, *pour délivrer une équ. des coefficients fractionnaires, on la réduit au même dénominateur, et l'on chasse le coefficient* k *du* 1ᵉʳ *terme, en posant* y = kx, calcul qui revient à multiplier les coefficients, à partir du 2ᵉ terme, par $k^0, k^1, k^2 \ldots k^{n-1}$.

Soit, par ex., l'équ. $x^4 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{5}{6}x^2 - \frac{3}{4}x - \frac{7}{2} = 0$, multipliant par 12, on a $12x^4 - 8x^3 + 10x^2 - 9x - 42 = 0$; faisant $x = \frac{1}{12}y$, c'est-à-dire multipliant les coefficients 10, 9 et 42 respectivement par 12, 12^2, 12^3, il vient

$$y^4 - 8y^3 + 120y^2 - 1296y - 72576 = 0.$$

Pour que les racines x *d'une équ. deviennent* h *fois plus petites,* on

posera $x = hy$, c'est-à-dire qu'on divisera les coefficients successifs par $h^0, h^1, h^2, \ldots h^n$. Le calcul précédent donnait à l'équ. des coefficients plus grands ; celui-ci les diminue, et s'emploie dans ce but. Mais à moins que les divisions ne s'effectuent exactement, on a ainsi des coefficients fractionnaires. Soit l'équ. $x^3 - 144x = 10368$; en posant $x = 12y$, on trouve cette équ. plus simple, $y^3 - y = 6$.

504. Si l'on veut diminuer toutes les racines d'une même quantité i, on pose $x = i + y$. En mettant $i + y$ pour x dans tous les termes de $f(x)$, l'équ. (1) devient

$$k(i+y)^n + p(i+y)^{n-1} + q(i+y)^{n-2} \ldots + t(i+y) + u = 0,$$

sans nous arrêter à développer les puissances de $i + y$, il résulte de la loi connue (n° 482) que suivent les termes de la formule de Newton, que la transformée étant ordonnée selon les puissances croissantes de y, est

$$A + By + Cy^2 + Dy^3 \ldots + ky^n = 0,$$

A étant $= fi$, ou le polynome proposé où l'on a remplacé x par i; B se déduit de A *en multipliant chaque terme par l'exposant de* i, *et diminuant cet exposant de un*, calcul qu'on désigne sous le nom de DÉRIVÉE, et qu'on indique par $f'i$. De même, C se trouve en prenant la dérivée de B, et divisant par 2 ; $C = \frac{1}{2} f''i$; D est le tiers de la dérivée de C, $D = \frac{1}{2 \cdot 3} f'''i$, et ainsi de suite. On sait donc composer les coefficients de la transformée, en les déduisant successivement les uns des autres, savoir,

$$fi = y \,.\, f'i + \frac{y^2}{2} f''i + \frac{y^3}{2 \,.\, 3} f'''i + \ldots + ky^n = 0,$$

$$fi = ki^n + pi^{n-1} + qi^{n-2} + \ldots + ti + u,$$
$$f'i = nki^{n-1} + (n-1)\,pi^{n-2} + (n-2)\,qi^{n-3} \ldots + t,$$
$$f''i = n\,(n-1)\,ki^{n-2} + (n-1)(n-2)\,pi^{n-3} + \ldots \text{etc.}$$

. . . .

Ainsi pour faire $x = 2 + y$ dans $x^3 - 5x^2 + x + 7 = 0$, on a $fx = x^3 - 5x^2 + x + 7$, $f'x = 3x^2 - 10x + 1$, $f''x = 6x - 10$, $f'''x = 6$. Faisant $x = 2$ (*voyez* p. 37), il vient $fi = -3$, $f'i = -7$, $\frac{1}{2} f''i = +1$: d'où

$$-3 - 7y + y^2 + y^3 = 0.$$

Pour augmenter, au contraire de i toutes les racines x, il faut poser $x = y - i$, c'est-à-dire changer ci-dessus i en $-i$, ou prendre en signe contraire les puissances impaires de i.

505. Le procédé donné p. 37 est très-commode pour trouver les nombres fi, $f'i$, $\frac{1}{2}f''i\dots$ car divisons $f(x)$ par $x - i$, et soient T le quotient et t le reste numérique; puis divisons T par $x - i$, et soient U le quotient et u le reste; soient V et v le quotient et le reste de U divisé par $x - i$, et ainsi de suite. Nous avons

$$fx = T(x-i)+t,\quad T = U(x-i)+u,\quad U = V(x-i)+v, \text{ etc.}$$

Éliminant successivement $T, U, V\dots$ on trouve

$$fx = t + u(x-i) + v(x-i)^2 + \text{etc.}\dots + k(x-i)^m;$$

d'où l'on voit que les coefficients de la transformée dont l'inconnue est $y = x - i$, sont les restes $t, u, v\dots k$ de nos divisions successives. Et comme le procédé donné p. 37 fait facilement connaître ces restes, le calcul se présente comme dans l'ex. suivant, où l'on fait $y = x - 3$.

Proposée. . . .	$2x^4$	$-\ 7x^3$	$-\ 12x^2$	$+\ 4x$	$+\ 129 = 0$
Facteur 3 . . .	2	$-\ 1$	$-\ 15$	$-\ 41$	$+\ 6$
	2	$+\ 5$	0	$-\ 41$	
	2	$+\ 11$	$+\ 33$		
	2	$+\ 17$			
Transformée. . .	$2y^4$	$+\ 17y^3$	$+\ 33y^2$	$-\ 41y$	$+\ 6 = 0.$

La 1[re] ligne 2, -1, -15, -41, est formée des coefficients du 1[er] quotient T, la 2[e] de ceux du second U, la 3[e] de V, etc. On donne à chaque ligne un terme de moins qu'à la précédente. Le dernier terme de chaque ligne est le reste de la division par $x - 3$; $t = 6$, $u = -41$, $v = 33,\dots$ ce sont donc les coefficients cherchés en ordre rétrograde *.

* Le calcul, quand i est une fraction $\frac{h}{l}$, est plus simple ainsi qu'il suit :

Posons $$x = \frac{x'}{l},\quad x' = x'' + h,\quad x'' = ly;$$

en éliminant x' et x'', on trouve $x = y + \frac{h}{l}$; ainsi pour composer la transformée en y, on fait successivement les trois calculs relatifs à ces trois équ. La 1[re] consiste à rendre les racines l fois plus grandes (nº 503); la 2[e] indique qu'il faut en tirer la transformée en

Souvent $i = 1$, c'est-à-dire qu'on cherche la transformée en $x - 1 = y$; on n'a alors que des additions à faire, selon la loi du tableau p. 20. En voici deux exemples :

x^3	$-12x^2$	$+41x$	$-29=0$		x^4	$-6x^3$	$+7x^2$	$-7x$	$+7=0$
1	-11	$+30$	$+1$		1	-5	$+2$	-5	$+2$
1	-10	$+20$			1	-4	-2	-7	
1	-9				1	-3	-5		
y^3	$-9y^2$	$+20y$	$+1=0$		y^4	$-2y^3$	$-5y^2$	$-7y$	$+2=0$

506. La même transformée, ordonnée selon les puissances décroissantes de y, permet de *délivrer l'équ. de son* 2ᵉ *terme*, en faisant $x = y + i$, et disposant convenablement de l'arbitraire i : on a

$$\left.\begin{array}{l|r|l} ky^n + mik & y^{n-1} + \frac{1}{2}m(m-1)i^2k & y^{n-2}\ldots + ki^m \\ \quad + p & + (m-1)ip & \ldots\ldots + pi^{m-1} \\ & + q & \ldots\ldots + qi^{m-2} \\ & & \quad \text{etc.} \end{array}\right\} = 0.$$

En effet, posons $mik + p = 0$; d'où

$$i = -\frac{p}{mk}, \quad x = y - \frac{p}{mk}.$$

$x' - h$; enfin la 3ᵉ rend les racines l fois plus petites. On opérera donc comme dans l'exemple suivant, où l'on cherche la transformée en $x - \frac{2}{3}$ pour l'équ.

$$2x^4 - 5x^3 + 7x^2 - 4x + 2 = 0.$$

Coefficients.	2	-5	$+7$	-4	$+2$
Puissances du dénominateur .	1	3	9	27	81
Produits.	2	-15	$+63$	-108	$+162$
Facteur 2.	2	-11	$+41$	-26	$+110$ (α)
	2	-7	$+27$	$+28$	
	2	-3	$+21$		
Transformée en $x' - 2$. . .	2	$+1$	$+21$	$+28$	$+110$
Transformée en $x - \frac{2}{3}$. . .	$2y^4$	$+\frac{1}{3}y^3$	$+\frac{21}{9}y^2$	$+\frac{28}{27}y$	$+\frac{110}{81}=0$

Observez que la ligne (α) étant divisée par les diverses puissances de 3, donne le quotient de la proposée divisée par $x - \frac{2}{3}$, qui est $2x^3 - \frac{11}{3}x^2 + \frac{41}{9}x - \frac{26}{27}$, ainsi que le reste $+\frac{110}{81}$, qui est aussi le résultat de la substitution de $\frac{2}{3}$ pour x dans la proposée.

Ce calcul est surtout employé quand l est 10, ou ses puissances. Ainsi, pour trouver la transformée en $y = x - 0{,}2$ de l'équ. ci-dessus, on a

Produits des coefficients par les puissances de 10 .	2	-50	$+700$	-4000	$+20000$
Facteur 2.	2	-46	$+608$	-2784	$+14432$
	2	-42	$+524$	-1736	
	2	-38	$+448$		
Transformée en $x' - 2$.	2	-34	$+448$	-1736	$+14432$
Transformée en $x' - 0{,}2$	$2y^4$	$-3{,}4y^3$	$+4{,}48y^2$	$-1{,}736y$	$+1{,}4432=0$

Ainsi, *pour délivrer l'équ. de son* 2e *terme, il faut changer* x *en* y *moins le coefficient* p *du* 2e *terme divisé par le produit du* 1er k *par le degré de l'équ.* Bien entendu que l'on doit conserver ici à p et k leurs signes, et que si ces signes sont différents, le — se trouve changé en + devant la fraction. La somme des racines de y est alors zéro; on a donc augmenté toutes les racines d'une même quantité, telle que la somme de leurs parties négatives est devenue égale à celle des positives.

Le calcul est plus rapide en posant $x + \frac{p}{mk} = y$, développant la puissance n^e, et multipliant par k, car on en tire de suite la valeur des deux 1ers termes $kx^n + px^{n-1}$.

Par ex., soit $x^3 - 6x^2 + 4x - 7 = 0$; on pose $x - 2 = y$, d'après notre théorème : le cube donne $x^3 - 6x^2 = y^3 - 12x + 8$, qui, substitué, conduit à $y^3 - 8x + 1$, ou $y^3 - 8y - 15 = 0$, équ. demandée.

Pour $x^2 + px + q = 0$, on fera $x + \frac{1}{2}p = y$; puis, carrant, $x^2 + px = y^2 - \frac{1}{4}p^2$, et la transformée est $y^2 = \frac{1}{4}p^2 - q$. On tire y, et par suite les racines x de la proposée. C'est un mode de résolution de l'équ. du 2e degré.

On verra aisément qu'on chasse à la fois le 2e terme de fx, et le coefficient k du 1er terme, en faisant $x = \frac{y - p}{mk}$.

Si l'on veut *chasser le* 3e *terme* de l'équ., on doit faire

$$\tfrac{1}{2} m (m - 1) i^2 k + (m - 1) ip + q = 0.$$

Cette relation conduit en général à des valeurs irrationnelles ou imaginaires de i, qui ne peuvent être utilement employées.

Enfin si l'on pose $ki^m + pi^{m-1} + \ldots + u = 0$, on chassera le dernier terme de l'équ. Il faut alors résoudre l'équation proposée elle-même; et en effet la transformée aurait une racine nulle, $y = 0$; d'où $x = i$.

507. Voici encore deux transformations usitées :

1° Si l'on pose $x = -y$, ce qui change les signes alternatifs seulement, les racines positives de x deviennent négatives, et réciproquement.

2° En faisant $x = \frac{1}{y}$, les racines deviennent *réciproques*, les plus grandes de x répondent aux plus petites de y : comme les fac-

teurs x, x^2, x^3.... sont remplacés par les diviseurs y, y^2, y^3..., en multipliant tout par y^m, ces facteurs se trouvent remplacés par y^{m-1}, y^{m-2}.... Ainsi ce calcul revient à distribuer, près des coefficients, les puissances de y en ordre inverse de celles de x :

$$\frac{k}{y^m} + \frac{p}{y^{m-1}} + \frac{q}{y^{m-2}} \ldots + \frac{t}{y} + u = 0,$$

d'où $\quad uy^m + ty^{m-1} + \ldots + qy^2 + py + k = 0.$

Et si l'on veut en outre chasser le coefficient u du 1[er] terme, on posera $y = \frac{y'}{u}$, c'est-à-dire $x = \frac{u}{y'}$, transformation qui remplit d'un seul coup les deux conditions.

En général, *transformer une équ.* f (x) $= 0$, c'est en composer une autre $F(y) = 0$, dont les racines y aient, avec celles de x, une relation donnée par une équ. entre x et y, $\varphi(x, y) = 0$: il ne s'agit donc que de savoir éliminer x de cette dernière à l'aide de la proposée, problème que nous traiterons bientôt (n° 522).

Limites des Racines.

508. *Une limite supérieure des racines de l'équ.* fx $= 0$, *est une quantité quelconque qui les surpasse toutes :* cette limite serait zéro, si aucun terme de fx n'était négatif, puisque l'équ. n'aurait aucune racine positive. *Tout nombre* l *qui, substitué pour* x *dans* fx, *donne un résultat positif* (le 1[er] terme kx^n ayant le signe $+$) *est limite supérieure, quand tout nombre* $>$ l *est dans le même cas*, puisque aucune valeur $> l$ ne résout l'équ.

On sait que $\quad \dfrac{x^i - 1}{x - 1} = x^{i-1} + x^{i-2} + x^{i-3} \ldots\ldots x + 1;$

d'où

$$x^i = (x-1)x^{i-1} + (x-1)\,x^{i-2} + (x-1)\,x^{i-3} \ldots + (x-1) + 1.$$

Appliquons cette formule à chaque terme positif de

$$fx = kx^n + px^{n-1} + qx^{n-2} \ldots + u : \text{il vient}$$

$$\begin{array}{r|r|r|r}
k(x-1)x^{n-1} + k & (x-1)x^{n-2} + k & (x-1)\,x^{n-3} \ldots + k & x-1) + k \\
+p & +p & +p & +p \\
 & +q & +q & +q \\
 & & \text{etc.} & \text{etc.}
\end{array}$$

Nous laisserons les termes négatifs sous leur forme, et nous les placerons dans les colonnes où x est affecté du même exposant. Un terme $-sx^h$, sera mis dans la colonne $(x-1)x^h$, et le coefficient sera $(k+p+q\ldots.)(x-1)-s$; le facteur de $(x-1)$ est *la somme des coefficients positifs qui précèdent* s. Or, pour attribuer à x une valeur capable de rendre ce terme négatif, il faut que $(k+p+q\ldots.)(x-1)$ soit $< s$; ce signe $-$ n'y existera donc plus si l'on prend

$$x \overset{=}{>} 1+\frac{s}{k+p+q\ldots} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (\mathrm{M})$$

Qu'on en dise autant de chacune des colonnes où se trouve un coefficient négatif; et que parmi toutes les expressions (M) ainsi formées, on prenne la plus grande l, il est clair que $x =$ ou $> l$ rendra tout le polynome positif : l est donc limite supérieure des racines de $fx = 0$. Ainsi, *divisez chaque coefficient négatif de* fx *par la somme de tous les positifs qui le précèdent; ajoutez* 1 *à la plus grande des fractions ainsi obtenues; ce nombre sera limite supérieure des racines de l'équ.* fx $= 0$.

Soit $4x^5-8x^4+23x^3+105x^2-80x+11=0$; on divise 8 par 4, puis 80 par $4+23+105$; le 1[er] de ces quotients 2 est le plus grand; donc, toutes les racines sont $< 2+1$, ou 3.

En effaçant $p, q, \ldots$ du dénominateur de (M), cette formule se réduit à $x =$ ou $> 1+\frac{s}{k}$; comme on a le droit d'augmenter cette fraction (M), on voit que *le plus grand coefficient négatif d'une équ., pris en* $+$, *et augmenté de* 1, *est une limite supérieure de ses racines,* quand on a divisé l'équ. par le coefficient k de son premier terme. Cette expression est plus simple que la 1[re], et se forme à vue, ce qui la rend préférable toutes les fois qu'on n'a pas intérêt à choisir une limite basse. Les théorèmes suivants offrent souvent une limite plus avantageuse.

509. N'ayons égard qu'au 1[er] terme et aux termes négatifs de fx,

$$x^n - \mathrm{F}x^{n-f} - \mathrm{G}x^{n-g} - \mathrm{H}x^{n-h}. \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

Soit α un nombre qui mis pour x rende cette expression positive, ou

$$\alpha^n > \mathrm{F}\alpha^{n-f} + \mathrm{G}\alpha^{n-g} + \mathrm{H}\alpha^{n-h}. \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

$$1 > \frac{\mathrm{F}}{\alpha^f} + \frac{\mathrm{G}}{\alpha^g} + \frac{\mathrm{H}}{\alpha^h}. \ldots\ldots$$

en divisant tout par α^n. Il est clair que tout nombre $> \alpha$ satisfera à la même condition ; ainsi, ni α, ni les nombres $> \alpha$ ne pouvant rendre fx nul, puisque la partie positive de fx accroît α^n, on voit que *tout nombre* l *qui rend le* 1er *terme de* fx *plus grand que la somme des termes négatifs est limite supérieure* *.

Tirons de la relation (2) une valeur de α. Parmi les nombres $\sqrt[f]{F}$, $\sqrt[g]{G}$, $\sqrt[h]{H}\dots$ il en est un qui surpasse les autres ; supposons que c'est le 2e, nous le représenterons par i :

$$\sqrt[g]{G} = i > \sqrt[f]{F} \text{ et } \sqrt[h]{H},\quad G = i^g,\quad F < i^f,\quad H < i^h.$$

Remplaçons dans (2), G par i^g, F par i^f, H par i^h, le 2e membre sera augmenté, et si l'on rend $\alpha^n >$ que cette somme, *à fortiori* la condition (2) sera remplie. Il s'agit donc de rendre

$$x^n > i^f x^{n-f} + i^g x^{n-g} + i^h x^{n-k}\dots$$

On peut même ajouter ici les termes qui complètent le polynome, d'où

$$n^n > ix^{n-1} + i^2x^{n-2} + i^3x^{n-3}\dots\dots + i^n,$$

$$\text{savoir, } x^n > i\,\frac{x^n - i^n}{x - i}, \text{ ou } \frac{ix^n}{x-i} - \frac{i^{n+1}}{x-i}.$$

Admettons qu'on prenne $x > i$, ce dernier terme sera négatif, et en le supprimant, le 2e membre sera augmenté. Ainsi, on a

$$x^n \overset{=}{>} \frac{ix^n}{x-i},\quad \text{ou } x - i \overset{=}{>} i,\quad x \overset{=}{>} 2i \text{ ou } 2\sqrt[g]{G}.$$

Le double du plus grand nombre qu'on trouve en extrayant de chaque coefficient négatif une racine de degré marqué par le nombre des termes qui le précèdent, est donc une limite supérieure des racines.

Ainsi, pour l'équation $x^4 - 2x^3 - 20x^2 + 3x - 11 = 0$, notre

* Quelques auteurs disent que pour obtenir une limite supérieure des racines d'une équ., il faut trouver pour x un nombre l *qui rende le* 1er *terme plus grand que la somme de tous les autres ;* c'est *plus grand que la somme des termes négatifs* qu'il faut dire. L'exemple suivant montre la vérité de cette assertion. L'équ.

$$x^4 + x^3 - 30x^2 - 2x + 168 = 0$$

a pour rac. 3 et 4, et cependant en faisant $x = 2{,}3$, qui n'est pas une limite supérieure, on reconnaît que $x^4 >$ la somme des autres termes, savoir, $27{,}9841 > 180{,}167 - 163{,}3$.

1[er] théorème donne 21 pour limite ; mais prenant $\sqrt[1]{2}$, $\sqrt[2]{20}$, $\sqrt[4]{11}$, le 2[e] de ces nombres est le plus grand, à peu près 5 ; ainsi 10 est une limite supérieure.

510. Faisons $x = l + y$ dans fx, l étant un nombre quelconque ; il vient (n° 504), $fl + y f'l + \frac{1}{2} y^2 f''l \, l \ldots + ky^n = 0$. Or, si l'on choisit pour l un nombre tel que fl, $f'l$, $f''l \ldots$ soient positifs, tous les coefficients de cette transformée ayant des signes $+$, aucun nombre positif mis pour y ne peut y satisfaire ; les valeurs réelles de x répondent donc à des valeurs négatives de $y = x - l$; partant $l > x$. Donc, *tout nombre qui, mis pour* x *dans* fx *et toutes ses dérivées, donne des résultats positifs, est une limite supérieure de* x.

Dans notre dernier exemple, les dérivées sont

$$4x^3 - 6x^2 - 40x + 3, \quad 12x^2 - 12x - 40, \quad 24x - 12.$$

On voit que $x = 6$ rend tous ces polynomes positifs, et que $x < 6$, limite plus basse que celle qui a été trouvée.

Observez que si l'on change les signes alternatifs de la transformée, les racines de y auront changé de signe ; elles seront donc toutes positives, de négatives qu'elles étaient : ainsi, on *sait transformer une équ.* fx = 0 *en une autre* Fy = 0 *qui n'ait aucune racine négative, en posant* x = l — y, l *étant une limite supérieure des racines* x.

511. Changez x en $-x$ dans fx, ou les signes alternatifs ; les racines positives seront devenues négatives, et réciproquement, en conservant leurs valeurs numériques : cherchez la nouvelle limite supérieure l' ; les racines négatives de $fx = 0$ seront entre 0 et $-l'$, les positives entre 0 et l. C'est ainsi qu'on reconnaît que dans notre dernier exemple toutes les racines sont comprises entre -4 et $+6$.

512. En faisant $x = \frac{1}{z}$ dans fx, les plus grandes racines de z répondront aux plus petites de x. Si donc on cherche la limite supérieure h des racines de z, ou $z < h$, on aura $x > \frac{1}{h}$. Telle est *la limite inférieure des racines positives de* x.

Soit s le plus grand coefficient de signe contraire au dernier terme de l'équ. $kx^n + px^{n-1} \ldots + u = 0$; comme la transformée est $uz^n + \ldots + pz + k = 0$, en prenant pour limite supérieure $z < 1 + \frac{s}{u}$, on trouve $x > \frac{u}{u + s}$. C'est entre ce nombre et $+ l$

que sont comprises toutes les racines positives de x. On peut d'ailleurs trouver deux limites plus rapprochées, ainsi qu'on l'a exposé. On en dira autant pour les racines négatives.

513. N'ayons égard qu'au 1[er] terme et aux termes négatifs de fx, savoir :

$kx^n - Fx^{n-f} - Gx^{n-g} - \ldots = kx^n \left(1 - \frac{F}{x^f} - \frac{G}{x^g} \ldots\right)$. Nous connaissons une valeur l de x qui donne un résultat positif, et tout nombre $> l$ donne aussi le signe $+$ au résultat : comme les termes positifs de fx accroissent la quantité kx^n, on voit que *dans tout polynome rationnel et entier* fx, *ordonné selon les puissances descendantes de* x, *si l'on fait croître graduellement* x, *on atteindra bientôt une valeur qui donnera un résultat positif, et au delà les résultats seront positifs et croissants.*

Quand le 1[er] terme kx^n est négatif, en le comparant aux termes positifs, on trouve de même des résultats croissants et négatifs.

Enfin si le polynome est ordonné selon les puissances ascendantes de x, $fx = u + tx \ldots + px^{n-1} + kx^n$, en posant $x = \frac{1}{z}$, on a $\frac{1}{z^n}(uz^n + \ldots + k)$: la valeur $z = l$, qui donne au résultat le signe de u, répond à $x = \frac{1}{l}$ qui produit le même effet sur fx. *On sait donc trouver des valeurs de* x *qui donnent aux résultats de* fx *le signe du* 1[er] *terme, que la suite soit ascendante ou descendante.*

514. *On peut toujours prendre pour* x *une suite de nombres croissants* $\alpha, \beta, \gamma \ldots$ *assez rapprochés, pour que les valeurs que reçoit le polynome* fx *soient aussi voisines qu'on veut.* Supposons d'abord que fx n'a que des termes positifs, et faisons $x = \alpha$ et $\alpha + i$. Les résultats sont $f\alpha$ et $f\alpha + i f'\alpha + \frac{1}{2} i^2 f''\alpha + \ldots$ dont la differ. est $i\,(f'\alpha + \frac{1}{2} i f''\alpha + \ldots)$: il s'agit d'attribuer à i une valeur telle que cette differ. soit moindre que tout nombre donné h. Tout est ici positif, et i est très-petit et < 1 ; faisons $i = 1$ dans la parenthèse, et posons $i\,(f'\alpha + \frac{1}{2} f''\alpha \ldots) =$ ou $< h$ la condition sera remplie : ainsi il faut prendre $i =$ ou $< \frac{h}{f'\alpha + \frac{1}{2} f''a \ldots}$; prenant ensuite $x = (\alpha + i) + i'$, opérant de même, on aura un 3[e] résultat qui surpassera le 2[e] de moins de h ; et ainsi de suite.

Maintenant si fx renferme des termes négatifs, ce qu'on vient de dire s'appliquera à l'ensemble des termes positifs ; et comme les termes qu'on en doit soustraire diminuent encore la grandeur des résultats, à plus forte raison ceux-ci différeront-ils de moins de h. Et si la somme des termes négatifs l'emportait sur les positifs, ce serait au contraire aux premiers qu'on appliquerait le raisonnement ci-dessus. Ceci démontre que l'on peut toujours supposer que, quand x croît insensiblement, les résultats de fx sont *continus*.

Racines commensurables.

515. Soit l'équ. $fx = kx^n + px^{n-1} + qx^{n-2} \ldots + tx + u = 0 \ldots (1)$. *Si tous les coefficients sont entiers, et* k $= 1$, *aucune racine ne peut être fractionnaire :* car si l'on pose

$$x = \frac{a}{b}, \quad \text{d'où} \quad \frac{a^n}{b^n} + \frac{pa^{n-1}}{b^{n-1}} + \ldots + \frac{ta}{b} + u = 0,$$

on a $$a^n + b\,(pa^{n-1} + qba^{n-2} \ldots + ub^{n-1}) = 0;$$

la 2e partie étant multiple de b, a^n devrait l'être aussi, ce qui est impossible (nº 25).

Ainsi lorsqu'en faisant $y = kx$, on dégage le 1er terme de l'équ. (1) de son coefficient k (nº 506), sans que les autres coefficients cessent d'être entiers, y n'a pas de racines fractionnaires ; et celles de x le sont, ou sont entières, selon que les racines entières de y ne sont pas multiples de k, ou le sont. Ainsi la recherche des racines fractionnaires de x, est ramenée à celle des racines entières de la transformée en y.

Après avoir trouvé les racines $\alpha, \beta, \ldots$ de l'équ. $fx = 0$, on peut la décomposer en ses facteurs binômes,

$$fx = k\,(x - \alpha)\,(x - \beta) \ldots$$

516. On a vu nº 500, que le quotient de l'équ. (1) divisé par $x - a$, étant désigné par

$$kx^{n-1} + p'x^{n-2} + q'x^{n-3} \ldots + r'x^2 + s'x + t',$$

on a $ka + p = p'$, $ap' + q = q'$, ... $ar' + s = s'$, $as' + t = t'$, et

le reste $R = at' + u$; on en tire

$$-k = \frac{p-p'}{a}, \quad -p' = \frac{q-q'}{a} \ldots$$

$$-r' = \frac{s-s'}{a}, \quad -s' = \frac{t-t'}{a}, \quad -t' = \frac{u-R}{a}.$$

Au lieu de faire servir nos équations, comme page 37, à trouver $k', p', q', \ldots t'$ successivement, on peut calculer en ordre rétrograde, $t', s' \ldots p', k$, par ces dernières formules. Mais comme il faudrait connaître le reste R, ce procédé ne convient qu'au cas où a est racine, parce que $R = 0$; et principalement, quand a est entier, ainsi que les coefficients $k, p, q \ldots u$ de la proposée. Il suit de la division même de fx par $x - a$, que $p', q' \ldots t'$, sont aussi des nombres entiers. Donc 1° a *divise* u ; *on ne peut chercher les valeurs entières de* x, *que parmi les diviseurs du dernier terme* u :

2° a *divise* t — t′, s — s′... *enfin* p — p′, *c'est-à-dire la somme de chacun des coefficients de la proposée, plus le quotient qu'on vient d'obtenir dans la division précédente :*

3° *Ces quotients sont, en signe contraire, les coefficients successifs du quotient de* fx *divisé par* x — a, *et le dernier de ces quotients est* $-k$.

Si ces conditions, que doit remplir toute racine entière de $fx = 0$ sont satisfaites par un nombre quelconque a, ce nombre est racine; en effet, en cherchant le quotient de fx divisé par $x - a$, par le procédé du n° 500, on reproduit les nombres ci-dessus p', $q' \ldots t'$, et on arrive à un reste nul.

517. Voici donc la marche à suivre pour trouver les racines entières de $fx = 0$. On prend, tant en + qu'en —, tous les diviseurs du dernier terme u, et les quotients de ces divisions; on soumet ces quotients aux épreuves prescrites par les équ. ci-dessus : si l'un de ces diviseurs conduit à quelque quotient fractionnaire, on le rejette, il ne peut être racine; et on ne reconnaît pour telle que celle qui donne enfin $-k$ pour dernier quotient. *La suite des quotients numériques entiers ainsi obtenus, pris en signes contraires, compose les coefficients* t′, s′.... p′, k *du quotient algébrique de* fx *divisé par* x — a.

Comme ± 1 pris pour diviseur de u, donne toujours des quotients entiers, ce n'est qu'au dernier terme qu'on reconnaît si ± 1

est racine. Il est donc plus court d'essayer directement ± 1, par le procédé de la p. 37.

Soit, par ex., $2x^5 + 3x^4 - 31x^3 + 3x^2 - 43x + 210 = 0$; comme $210 = 2.3.5.7$, on trouve que les diviseurs de 210 sont $\pm (1,2,3,5,6,7,10,14\ldots)$: on reconnaît d'abord que ± 1 ne peut convenir, non plus que les diviseurs qui sont hors des limites -8 et $+7$ des racines. Le calcul se range sous la forme suivante, où l'on a marqué de » les diviseurs à rejeter, et où l'on s'est dispensé d'écrire les sommes et différences qui donnent les dividendes.

	$a =$	2	3	5	6	−2	−3	−5	−6	−7
	$-t' =$	105	70	42	35	−105	−70	−42	−35	−30
$(-43 - t') : a =$	$-s' =$	31	9	»	»	+74	»	+17	+13	»
$(+3 - s') : a =$	$-q' =$	17	4			»		−4	»	»
$(-31 - q') : a =$	$-p' =$	−7	−9					+7		
$(+3 - p') : a =$	$-k =$	−2	−2					−2		

Ainsi la proposée n'a que trois racines entières, $+2$, $+3$ et -5: le quotient de la division par $x - 2$ a pour coefficients les nombres placés sous le diviseur 2, savoir, $2x^4 + 7x^3 - 17x^2 - 31x - 105$; on divise ensuite par $x - 3$, puis par $x + 5$, et on arrive enfin au quotient $2x^2 + 3x + 7$; tels sont les facteurs de la proposée.

Voici encore deux exemples :

$x^3 + 3x^2 - 8x + 10 = 0$

$a =$	2	−2	−5	−10. . . .
$-t' =$	5	−5	−2	−1 . . . .
$-s' =$	»	»	2	» . . . .
$-k =$	. . .		−1	. . . .

$8x^3 - 7x^2 - 63x + 56 = 0$

9	6	4	3	2	−2	−3	−4
4	6	9	12	18	−18	−12	−9
»	»	»	−17	»	»	+25	18
. .	. .	. .	− 8.	. . . . .		»	»

Pour la 1re équ., le facteur $x + 5$ donne le quotient $x^2 - 2x + 2$.

Pour la 2e, on n'éprouve que les diviseurs de 36 qui sont entre les limites -5 et $+10$; on a le diviseur $x - 3$, et le quotient $8x^2 + 17x - 12$.

Voici des problèmes qu'on résout par cette méthode :

I. Cherchons un nombre N de trois chiffres x, y, z, tels que 1° leur produit soit 54 : 2° le chiffre du milieu soit le 6e de la somme des deux autres; 3° enfin, en soustrayant 594 du nombre N, le reste soit exprimé par les mêmes chiffres en ordre inverse. Comme $N = 100x + 10y + z$, on a

$$xyz = 54, \quad 6y = x + z, \quad 100z + 10y + x = N - 594,$$

la 3e équation revient à $x - z = 6$; chassant y des deux premières, $x^2z + xz^2 = 324$; enfin mettant $z + 6$ pour x, on a $z^3 + 9z^2 + 18z = 162$. Or x, y, z, sont des nombres entiers, et notre méthode donne $z = 3$, d'où $x = 9$, $y = 2$ et $N = 923$.

II. Quelle est la base x du système de numération dans lequel le nombre 538 est exprimé par les caractères (4123) ?

Il faut trouver la racine entière et positive de l'équ.

$$4x^3 + 1x^2 + 2x + 3 = 538\,;$$

cette racine est $x = 5$. *V.* la note p. 5 du t. Ier.

En général, si A est le nombre exprimé par les n chiffres $a, b, c, \ldots i$, la base x du système est donnée par l'équ.

$$ax^{n-1} + bx^{n-2} + cx^{n-3} \ldots = A - i,$$

équ. qui n'a qu'une racine positive (n° 534), qui doit être entière et $> a, b, c, \ldots i$.

III. Soit proposée l'équation $8\left(\frac{2}{5}\right)^{x^3-5x^2+3x+3} = 125$; le calcul du n° 147, 3°, donne, à cause de $\left(\frac{5}{2}\right)^3 = \frac{125}{8}$,
$(x^3 - 5x^2 + 3x + 3)\log\frac{2}{5} = 3\log\frac{5}{2}$, $x^3 - 5x^2 + 3x + 3 = -3$, on en tire $x = 2$ et $\frac{1}{2}(3 \pm \sqrt{21})$.

IV. Pour $6x^4 - 19x^3 + 28x^2 - 18x + 4 = 0$, on fait $x = \frac{1}{6}y$ d'où $y^4 - 19y^3 + 168y^2 - 648y + 864 = 0$. Il n'y a pas de racines négatives, et les positives sont < 20 : or $864 = 2^5 \,.\, 3^3$, et l'on doit éprouver les diviseurs 2, 3, 4, 6.... 18. On trouve $y = 3$ et 4, et $y^2 - 12y + 72 = 0$; enfin $x = \frac{1}{2}, \frac{2}{3}$ et $1 \pm \sqrt{-1}$.

On voit de même que

$$6x^5 + 15x^4 + 10x^3 - x = x(x+1)(2x+1)(3x^2+3x-1).$$

518. Quand le dernier terme u a beaucoup de diviseurs, entre les limites des racines, ces calculs sont longs : voici un moyen de les abréger. Si a est racine entière de l'équ. $fx = 0$, et n'a que des coefficients entiers, aussi bien que le quotient Q de fx divisé par $x - a$, on a $Q = \dfrac{fx}{x-a} =$ entier quel que soit x. Prenons pour x un entier quelconque α, on voit que $f\alpha$ doit être divisible par $\alpha - a$. Donc pour reconnaître si l'un a des diviseurs du dernier terme u

peut être racine entière, *prenez la différence entre* α *et ce diviseur ; toutes les fois que* a *sera racine, cette différence divisera* $f\alpha$, *ou le nombre qui résulte de la substitution de* α *pour* x *dans* fx. Chaque diviseur de u qui ne remplira pas cette condition sera exclus, et le procédé général ne sera plus appliqué qu'aux autres diviseurs de u, parmi lesquels on pourra faire de nouvelles exclusions, en changeant le nombre α.

Comme la méthode exige qu'on fasse $x = \pm 1$ dans fx, pour s'assurer si ± 1 ne sont pas racines, les valeurs de $f\alpha$ sont connues pour ces nombres $\alpha = \pm 1$, et la règle s'applique immédiatement.

Dans le 1er ex., p. 52, on doit éprouver 9 diviseurs, entre les limites des racines; mais comme $x = 1$ donne $f\alpha = 144$, et $a - \alpha = 1, 2, 4, 5 \ldots$ on reconnaît bientôt que $2, 3, 5, -2, -3$, et -5 divisant seuls 144, les nombres $2, 3, 5, -2, -3, -5$ sont les seuls qu'on doit soumettre au calcul.

519. Cherchons maintenant *les facteurs commensurables du* 2e *degré* de l'équ. $fx = 0$; l'un de ces facteurs étant $x^2 + px + q$, et le quotient $x^{n-2} + p'x^{n-3} + \ldots$, on a cette équ. identique :

$$fx = (x^2 + px + q)\,(x^{n-2} + p'x^{n-3} + q'x^{n-4} \ldots);$$

il y a ici n coefficients inconnus. Exécutons la multiplication, et égalons les coefficients des mêmes puissances de x dans les deux membres (n° 500), nous aurons n équ.; éliminant $p', q' \ldots$ il restera deux équ. entre p et q, puis enfin une équ. contenant q seul, et qui sera du degré $\frac{1}{2} n\,(n - 1)$, nombre des combinaisons 2 à 2 des facteurs binômes du 1er degré. Cette dernière équ. aura pour q au moins une racine commensurable, puisque sans cela fx n'aurait aucun facteur rationnel du 2e degré. Une fois q connu, l'une des équ. entre p et q donnera p, et on connaîtra le facteur rationnel $x^2 + px + q$.

Ainsi $x^4 - 3x^2 - 12x + 5 = (x^2 + px + q)\,(x^2 + p'x + q')$ donne $p + p' = 0, q + pp' + q' = -3, p'q + pq' = -12, qq' = 5$. Les deux 1res équ. donnent des valeurs de p' et q', qui, substituées dans les deux autres, conduisent à

$$2pq + 3p - p^3 = 12, \quad q^2 + q\,(3 - p^2) + 5 = 0,$$

et chassant q, on a $p^6 - 6p^4 - 11p^2 = 144$, d'où $p = 3$ et -3; puis $q = 5$ et 1 ; les facteurs sont donc $(x^2 + 3x + 5)\,(x^2 - 3x + 1)$.

Racines égales.

520. Quand $fx = (x-a)^p\ (x-b)^q\ (x-c)\ (x-d)\ldots$ (A) le polynome fx a p facteurs égaux à $x-a$, q égaux à $x-b$; et on dit que l'équ. $fx=0$ a p racines égales à a, q égales à b. Il s'agit de s'assurer si, une équ. étant donnée, elle peut être mise sous la forme (A).

Supposons d'abord $p=q=1$; comme l'équ. (A) est identique, on peut remplacer x, dans les deux membres, par $y+x$: en développant le 1er membre (nº 504), on a

$$fx + yf'x + \tfrac{1}{2}y^2f''x\ldots = (y+x-a)\,(y+x-b)\,(y+x-c)\ldots$$

$f'x$ est la dérivée de fx, $f''x$ est celle de $f'x,\ldots$; ce sont des polynomes connus. Le 2e membre est composé de facteurs qui ont tous y pour 1er terme; le produit a donc la forme indiquée t. Ier, p. 119; le coefficient de y^{n-1} est la somme des 2es parties $x-a$, $x-b,\ldots$ ceux de y^{n-2}, $y^{n-3}\ldots$ sont les sommes des produits 2 à 2, 3 à 3.... de ces binômes. Donc

1º fx est le produit de tous ces n binômes, ou l'équ. (A) :

2º $f'x$ est la somme de leurs produits $n-1$ à $n-1$, qu'on forme en supprimant successivement, dans le produit (A), chacun des facteurs binômes, et ajoutant tous les résultats :

3º $\frac{1}{2}f''x$ est la somme des produits $n-2$ à $n-2$, etc.

Cela posé, si $p=1$, fx n'a qu'un seul facteur qui soit $=x-a$; tous les termes de $f'x$ contiennent aussi ce facteur, excepté le terme où il a été omis, $R=(x-b)\,(x-c)\ldots$ Ainsi $f'x$ est de la forme $R+(x-a)\,Q$, qui n'est pas divisible par $x-a$. On en dira autant des autres facteurs inégaux de fx. Donc *si le polynome* fx *n'a pas de facteurs égaux,* fx *et* f'x *n'ont pas de diviseur commun.*

Mais si (A) contient le facteur $(x-a)^p$, pour former $f'x$, il faudra omettre de fx successivement chacun des p facteurs $x-a$; et $(x-a)^{p-1}$ sera facteur de p termes égaux; ensuite on devra omettre chacun des autres facteurs $x-b$, $x-c\ldots$, résultats qui auront tous $(x-a)^p$ pour multiplicateur; ainsi tous les termes seront divisibles par $(x-a)^{p-1}$; mais la somme ne le sera pas par $(x-a)^p$. On voit donc que fx et $f'x$ auront $(x-a)^{p-1}$ pour diviseur commun. En répétant ce raisonnement pour les autres facteurs égaux $(x-b)^q$, on reconnaît que *si* fx *a des facteurs égaux,*

fx *et* f'x *ont un commun diviseur, qui est le produit de tous les facteurs égaux de* fx, *chacun élevé à une puissance moindre d'une unité.*

D'après cela, étant donnée une équ. $fx = 0$, on formera la dérivée $f'x$, et l'on procédera à la recherche du plus grand commun diviseur entre fx et $f'x$; s'il n'en existe pas, la proposée n'a pas de racines égales; elle en a au contraire si l'on trouve un diviseur F, lequel sera réductible à la forme

$$F = (x - a)^{p-1} (x - b)^{q-1},$$

mais qu'on ne connaîtra que sous celle d'un polynome. En divisant fx par F, *le quotient* q *est formé de tous les facteurs de* fx, *dégagés des exposants;*

$$q = (x - a)\ (x - b)\ (x - c)\ (x - d).$$

521. Soient $\alpha, \beta, \gamma \ldots$ les produits des facteurs binômes respectifs aux puissances 1, 2, 3.... qui entrent dans fx, en sorte qu'on ait $fx = \alpha \,.\, \beta^2 \,.\, \gamma^3 \,.\, \delta^4 \,.\, \varepsilon^5 \ldots$ Désignons par F le plus grand commun diviseur entre fx et $f'x$; par G celui de F et F'; par H celui de G et G', etc.; enfin par $q, r, s, t \ldots$ les quotients exacts successifs de chaque commun diviseur par le suivant, savoir :

$fx =$	$\alpha^1 . \beta^2 . \gamma^3 . \delta^4 . \varepsilon^5 \ldots,$	$q =$	$\alpha . \beta . \gamma . \delta . \varepsilon \ldots,$	$\alpha = 0$
$F =$	$\beta . \gamma^2 . \delta^3 . \varepsilon^4 \ldots,$	$r =$	$\beta . \gamma . \delta . \varepsilon \ldots,$	$\beta = 0$
$G =$	$\gamma . \delta^2 . \varepsilon^3 \ldots,$	$s =$	$\gamma . \delta . \varepsilon \ldots,$	$\gamma = 0$
$H =$	$\delta . \varepsilon^2 \ldots,$	$t =$	$\delta . \varepsilon \ldots,$	$\delta = 0$
etc.	etc.		etc.	$\varepsilon = 0$

En divisant chacun des quotients $q, r, s \ldots$ par le suivant, on trouve pour quotients les facteurs isolés $\alpha, \beta, \gamma \ldots$ chacun au 1[er] degré; et s'il manque dans fx quelque facteur, β par ex., tout se réduit à poser $\beta = 1$, ce qui donne alors $r = s$, et le quotient correspondant $= 1$, qui annonce l'absence de facteurs au carré.

Voici donc les calculs qu'il faut faire :

Chacun des polynomes de la 1[re] colonne est le commun diviseur entre le précédent et sa dérivée, jusqu'à ce qu'on arrive à celui M qui n'a pour commun diviseur avec M' que $1 = N$, derniers des polynomes de cette colonne. On divise ensuite chacun de ces polynomes par le suivant, ce qui donne les quotients exacts $q, r, s \ldots M$; enfin on divise de nouveau chacun de ceux-ci par le sui-

vant ; et on a ainsi pour quotients exacts, des fonctions de x qui sont les produits isolés de chaque espèce de facteur du 1er, 2e, 3e degré, mais chacun réduit au 1er degré. Le polynome M qui n'a que l'unité pour commun diviseur avec M' est (au 1er degré) le produit des facteurs qui, dans fx, ont le plus haut exposant. Lorsque l'un des 1ers quotients $q, r, s....$ est égal au suivant, le quotient *un* annonce l'absence, dans fx, du facteur de l'ordre correspondant à celui que ce quotient est destiné à donner.

Voici quelques applications de cette théorie * :

I. Soit $\quad fx = x^5 - x^4 + 4x^3 - 4x^2 + 4x - 4;$

on en tire $\quad f'x = 5x^4 - 4x^3 + 12x^2 - 8x + 4,$

et le commun diviseur $F = x^2 + 2$; puis $F' = 2x$, et le diviseur commun $G = 1$: la 1re colonne est ainsi terminée. Passant à la 2e, fx divisé par F donne

$$q = x^3 - x^2 + 2x - 2, \text{ puis } r = x^2 + 2;$$

divisant q par r, on a $\alpha = x - 1$, $\beta = x^2 + 2$, enfin

$$fx = (x - 1)(x^2 + 2)^2.$$

* Le calcul du commun diviseur est long ; on l'abrége par la règle suivante qui donne de suite *le reste de la division* de fx par $f'x$. *Multipliez les coefficients de* fx, *à partir du* 3e, *par* 2, 3, 4.... *fois le coeff. du* 1er *terme de* f'x ; *multipliez les coefficients de* f'x *à partir du* 2e *par le coefficient du* 2e *terme de* fx ; *retranchez ces produits* 2 *à* 2, et vous aurez les coefficients du reste de degré n — 2.

par ex. . . . . $fx =$	x^5	$- x^4$	$+ 4x^3$	$- 4x^2$	$+ 4x$	$- 4$
$f'x =$		$+ 5$	$- 4$	$+ 12$	$- 8$	$+ 4$
produit de fx par + 10, 15, 20, 25.			$+ 40$	$- 60$	$+ 80$	$- 100$
produit de $f'x$ par — 1			$+ 4$	$- 12$	$+ 8$	$- 4$
différences.			36	$- 48$	$+ 72$	$- 96$
reste de la division (on ôte le facteur 12)			$3x^3$	$- 4x^2$	$+ 6x$	$- 8$

Quand fx n'a pas de second terme, la partie soustractive est nulle, la règle se réduit à multiplier fx par 2, 3, 4....

Soit $\quad fx =$	$3x^4$	$+ 0x^3$	$- 35x^2$	$+ 44x$	$+ 4$
$f'x =$		$+ 12$	$+ 0$	$- 70$	$+ 44$
produits de fx par 2, 3, 4.			$- 70$	$+ 132$	$+ 16$
le reste de la division est.			$35x^2$	$- 66x$	$- 8$

en achevant l'opération, on trouvera $x - 2$ pour commun diviseur, et la proposée $= (x - 2)^2 (3x^2 + 12x + 1)$.

On démontre notre règle en effectuant la division de $kx^m + px^{m-1} + qx^{m-2}....$ par $mkx^{m-1} + (m - 1)px^{m-2}....$, après avoir introduit le facteur m^2k dans le dividende, pour obtenir un quotient entier. *V.* la note, p. 59.

II. $fx = x^6 + 4x^5 - 3x^4 - 16x^3 + 11x^2 + 12x - 9$,

d'où $f'x = 6x^5 + 20x^4 - 12x^3 \ldots$ et le commun diviseur

$$F = x^3 + x^2 - 5x + 3\text{ ; puis } F' = 3x^2 + 2x - 5,$$

et le commun diviseur $G = x - 1$; enfin $G' = 1$, et $H = 1$. Pour former la 2e colonne, on divise fx par F, F par G, G par H; pour la 3e, on divise q par r, et r par s.

$$q = x^3 + 3x^2 - x - 3,\quad r = x^2 + 2x - 3,\quad s = x - 1:$$

enfin $\alpha = x + 1,\ \beta = x + 3,\ \gamma = x - 1$, et

$$fx = (x + 1)\ (x + 3)^2\ (x - 1)^3.$$

III. Pour $fx = x^4 - 4x^3 + 16x - 16$, on a $f' = 4x^3 \ldots$

et
$F = x^2 - 4x + 4,\quad q = x^2 - 4,\quad \alpha = x + 2,$
$G = x - 2,\quad r = x - 2,\quad \beta = 1,$
$H = 1,\quad s = x - 2,\quad \gamma = x - 2:$

enfin $fx = (x + 2)\ (x - 2)^3$.

IV. $fx = x^8 - 12x^7 + 53x^6 - 92x^5 - 9x^4 + 212x^3 - 153x^2 - 108x + 108$,
$F = x^4 - 7x^3 + 13x^2 + 3x - 18,\ q = x^4 - 5x^3 + 5x^2 + 5x - 6,\ \alpha = x - 1,$
$G = x - 3,\quad r = x^3 - 4x^2 + x + 6,\ \beta = x^2 - x - 2,$
$H = 1,\quad s = x - 3,\quad \gamma = x - 3:$
et.... $fx = (x - 1)\ (x - 2)^2\ (x + 1)^2\ (x - 3)^3$.

V. Pour $fx = x^6 - 6x^4 - 4x^3 + 9x^2 + 12x + 4$
$F = x^4 + x^3 - 3x^2 - 5x - 2,\ q = x^2 - x - 2,\ \alpha = 1,$
$G = x^2 + 2x + 1,\quad r = x^2 - x - 2,\ \beta = x - 2$
$H = x + 1,\quad s = x + 1,\quad \gamma = 1$
$I = 1,\quad t = x + 1,\quad \delta = x + 1$
et $fx = (x - 2)^2\ (x + 1)^4$.

Pour s'assurer si une racine entière a est double, triple.... il suffit d'essayer la division par $x - a$ plusieurs fois consécutives, par le procédé de la p. 37 : on ne tentera ce calcul que quand les coefficients pris en ordre rétrograde seront divisibles par a^i, a^{i-1}, a^{i-2}.... i étant l'exposant de $x - a$ dans fx. Cela résulte de ce que a^i doit diviser le dernier terme, que a^{i-1} étant racine de l'équ. dérivée doit diviser l'avant-dernier terme de fx, etc.

Élimination.

522. Soient $A, a, B, b, \ldots$ des fonctions de y, et

$$Z = Ax^m + Bx^{m-1} + \ldots, \quad T = ax^n + bx^{n-1} + \ldots$$

deux polynomes, qu'on se propose de rendre nuls par des valeurs accouplées de x et de y. Pour s'assurer si β est l'une des valeurs, que y peut avoir, faisons $y = \beta$, et les polynomes Z, T, en x seul, devant se réduire à zéro pour une même valeur α de x, auront $x - \alpha$ pour facteur commun. Qu'on cherche donc le commun diviseur D, et l'équ. $D = 0$ donnera les valeurs de x, qui, accouplées avec $y = \beta$, résolvent les équ. $Z = 0$, $T = 0$. Si ce diviseur n'existe pas, y ne peut recevoir la valeur de β.

Ainsi il faut chercher le plus grand commun diviseur entre Z et T (n° 102), comme si y était connu, et égaler à zéro le reste final Y en y seul, auquel le calcul conduira. Cette équ. $Y = 0$ aura pour racines toutes les valeurs cherchées de y, puisqu'elles introduisent un commun diviseur D entre Z et T; et l'équ. $D = 0$ fera connaître les valeurs de x qui s'accouplent avec celles de y. C'est ce que nous allons faire mieux comprendre.

Soit $m =$ ou $> n$; divisons Z par T, et si cela est nécessaire pour éviter les fractions (n° 102), multiplions Z par un facteur M qui rende AM divisible par a *, M étant, en général, une fonction de y. Désignons par Q le quotient entier, et par R le reste, fonctions de x et de y. On a

$$MZ = QT + R. \quad \ldots \ldots \quad (1)$$

Cette équ. est *identique*, sans fractions, ni irrationalités; elle se vé-

* Si les degrés m et n sont égaux, M sera $= a$, ou seulement le facteur de a qui n'entre pas dans A (*V.* n° 38) : si $m = n + 1$, M sera le carré de a, ou de ce facteur; si $m = n + 2$, M en sera le cube, etc. On évite ainsi d'être forcé de multiplier de nouveau les restes partiels, et on arrive à un dernier reste, où x est au degré $n - 1$, au plus. Ainsi dans le cas où $m = n + 1$, et $M = a^2$, le quotient est

$$Q = Aax + (aB - Ab) = a(Ax + B) - Ab.$$

En composant directement cette expression du quotient, la multipliant par T, et retranchant de a^2Z, les deux premiers termes disparaissent, et on obtient de suite le reste R.

La règle que nous donnons ici se modifie quand T est privé du second terme, ou que a est facteur de ce terme; car alors il suffit de multiplier Z par a, au lieu de a^2, quand on a $m = n + 1$.

rifie donc par toutes valeurs quelconques mises pour x et y. Substituons $x=\alpha$, $y=\beta$, supposées des valeurs propres à rendre Z et T nuls : R le sera donc aussi, savoir,

$$R=0, \quad T=0.$$

Et si deux nombres mis pour x et y dans R et T rendent ces polynomes nuls, on voit qu'alors $MZ=0$, savoir ou $M=0$, ou $Z=0$. Ainsi les solutions du système $T=0$, $R=0$, conviennent, soit à $Z=0$ avec $T=0$, soit à $M=0$ avec $T=0$, et réciproquement. Donc si,

au lieu des équ. . . . $Z=0$, $T=0$,
on traite les équ. . . . $T=0$, $R=0$,

on obtiendra toutes les couples cherchées, et en outre d'*autres solutions étrangères à la question*, qui donnent $M=0$ et $T=0$. Du reste, le problème est devenu plus simple, bien qu'il admette ces solutions étrangères, parce que le degré de R est moindre que n.

Divisons de même T, ou plutôt $M'T$, par R, M' étant un facteur propre à rendre le quotient Q' entier ; R' étant le reste, on a

$$M'T=Q'R+R'. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

On prouve encore que toutes les couples de valeurs de x et de y qui rendent T et R nuls, donnent aussi $R'=0$ avec $R=0$, équations qui admettent toutes les solutions cherchées ; mais que réciproquement $R=0$ et $R'=0$ admettent en outre les solutions qui rendent nuls M' et R; en sorte qu'en traitant les équ. $R=0$, $R'=0$, au lieu des proposées, on aura toutes les solutions cherchées, et de plus des solutions étrangères qui rendent nuls, soit M avec T, soit M' avec R.

On divisera ensuite $M''R$ par R', d'où

$$M''R=Q''R'+R''. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

En continuant ainsi le calcul du commun diviseur entre Z et T, on voit que deux restes consécutifs étant égalés à zéro admettent toutes les solutions demandées, et en outre des couples de valeurs qui rendent nuls l'un des facteurs introduits, ainsi que le diviseur correspondant. Le degré de x s'abaissant graduellement, on arrivera enfin à un *reste final* Y, où x n'entrera plus : mV étant le di-

vidende, et D le diviseur qui est en général du 1[er] degré en x,

on a $$mV = Dq + Y, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

d'où $$D = 0, \; Y = 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

équ. qui ont toutes les solutions cherchées, et de plus celles qui rendent nuls les facteurs introduits ainsi que les diviseurs correspondants, savoir, M avec T, M' avec R, M'' avec R', etc. L'équ. $Y = 0$ n'a que la seule inconnue y, et nous supposerons qu'on en sache trouver les racines, lesquelles substituées dans $D = 0$, feront connaître les valeurs de x qui s'y accouplent. Il nous restera à chasser de Y les racines étrangères.

Soient, par ex., $2x^2 - y^2 + 1 = 0$, $x^2 - 3xy + y^2 + 5 = 0$. En divisant le 1[er] polynome par le 2[e], le quotient est 2, et le reste, dégagé du facteur 3, est $D = 2xy - y^2 - 3$. Multipliant le diviseur par $4y^2$, et divisant par D, le quotient est $2xy - 5y^2 + 3$, et le reste $Y = -y^4 + 8y^2 + 9 = 0$. On résout cette équ. en posant $y^2 = z$; d'où $z^2 - 8z = 9$, $z = 9$ et -1; puis $y = \pm 3$ et $\pm\sqrt{-1}$: enfin, substituant dans $D = 0$, on a pour valeurs correspondantes $x = \pm 2$ et $\mp\sqrt{-1}$.

Pour $x^2 + 2xy - 3y^2 + 1 = 0$, $x^2 - y^2 = 0$, le 1[er] reste est

$$D = 2xy - 2y^2 + 1\,;\ \text{le } 2^e,\ Y = 4y^2 - 1\,;\ \text{donc, } y = -x = \pm\tfrac{1}{2}.$$

P, Q, p, q étant des fonctions de y, les équ.

$$x^2 + Px + Q = 0, \quad x^2 + px + q = 0,$$

donnent.... $(P - p)\,x + Q - q = 0$,

$$(Q - q)^2 + q\,(P - p)^2 = p\,(Q - q)\,(P - p).$$

Soit $x^3 + x^2 - xy^2 - y^2 = 0$, $2x^2 - x\,(4y - 1) - 2y^2 + y = 0$, le 1[er] reste D est $(16y^2 - 2y + 1)\,x + 8y^3 - 6y^2 - y$; on multiplie le diviseur par $(16y^2 - 2y + 1)^2$, on divise par D, et on a l'équ. finale $32y^3\,(4y^3 - 12y^2 + 3y + 1) = 0$; on en tire $y = 0$ et $\frac{1}{2}$ (n° 515); on abaisse ensuite le degré, et on trouve $y = \frac{1}{4}\,(5 \pm \sqrt{33})$; enfin, D = 0 donne les valeurs correspondantes $x = 0$, $\frac{1}{2}$, -1 et -1.

523. Indiquons les modifications que doit subir la méthode du commun diviseur.

Supposons que Z soit le produit de deux facteurs, $Z = P \times Q$. Comme Z ne peut être nul, à moins que P ou Q ne le soit (n° 501),

le problème se partage en deux :

$$P = 0 \text{ avec } T = 0, \text{ et } Q = 0 \text{ avec } T = 0.$$

Ces deux systèmes admettent toutes les solutions cherchées, et sont plus simples que le proposé. Et si Z et T sont décomposables en divers facteurs, le problème se partage en autant d'autres qu'on peut combiner chaque facteur de Z avec chaque facteur de T.

Ainsi, $x^2 - 2yx - 3y^2 + y = 0$, $x^2 - y^2 = 0$, comme $x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$, on prend d'abord $y = x$, et la première équ. donne $x = 0$ et $\frac{1}{4}$; puis $y = -x = 0$ résulte du 1er facteur : ce sont toutes les solutions demandées.

Ceci s'applique au cas où le facteur P ne contient que y; alors P doit diviser chacun des termes de Z (nº 102, III). Posant $P = 0$ avec $T = 0$, on aura une partie des solutions; les autres seront données par $Q = 0$ avec $T = 0$. *On ne peut donc pas supprimer ici, comme dans le procédé du commun diviseur, les facteurs fonctions de* y *seul;* ou plutôt on les supprime en les traitant à part.

Ainsi, pour $x^2 + x(y - 3) + y^2 - 3y + 2 = 0$, $x^2 - 2x + y^2 - y = 0$, on a le reste $(y - 1)(x - 2)$: avant de passer à une 2e division, on supprimera le facteur $y - 1$, mais en posant $y = 1$ dans le diviseur, ce qui donne $x = 0$ et 2. Ensuite, on continuera le calcul avec le reste $x - 2$ qui amène l'équ. finale $y^2 - y = 0$, savoir, $y = 0$ et 1 avec $x = 2$.

Avant de multiplier un dividende par quelque facteur $M, M' \ldots$ il faut donc s'assurer, par la méthode du commun diviseur, si le diviseur n'admet pas M, ou ses diviseurs, comme facteur de tous ses termes ; car, alors, il faudrait supprimer ce facteur du diviseur, et le traiter à part, comme on vient de le dire.

Par ex., $x^3 - x^2y + x(y - 6) + y^2 - 4 = 0$, $x^2 - xy - 4 = 0$: une première division donne le quotient x, et le reste $x(y-2) + y^2 - 4$; $y - 2$ est ici facteur commun : on pose donc $y = 2$ dans le diviseur, qui devient $x^2 - 2x - 4$, d'où $x = 1 \pm \sqrt{5}$. Le reste, réduit à $x + y + 2$, devient diviseur, et on arrive à l'équ. finale $y^2 + 3y = 0$, d'où $y = 0$ et -3, avec $x = -2$ et $+1$.

Soient encore les équ.

$$x^3 - (3y - 6)x^2 + (3y^2 - 12y + 8) - y^3 + 6y^2 - 8y = 0,$$
$$x^2 + (2y + 2)x + y^2 + 2y = 0.$$

Une 1re division donne ce reste $3xy(y - 1) + y^3 + 3y^2 - 4y$:

avant de le prendre pour diviseur, on doit supprimer les facteurs y et $y-1$, qui donnent $y=0$ et 1 ; puis on a $x=0$ et -2, pour $y=0$; $x=-1$ et -3 pour $y=1$. Le reste devient $3x+y+4$; pris pour diviseur, on a l'équ. finale $y^2-y-2=0$; d'où $y=2$ et -1 avec $x=-2$ et -1, : ce sont les six solutions du problème.

524. Enfin, quand il arrive qu'un facteur commun D existe dans Z et T, $Z=P\times D$; $T=Q\times D$, comme $D=0$ rend ces produits nuls, cette équation unique ne peut donner que l'une des inconnues y, même quand elles y entrent toutes deux : l'autre inconnue reste donc quelconque. Ainsi *le problème admet une infinité de solutions ; il est indéterminé.* Les solutions des équ. $P=0$, $Q=0$, qui sont en nombre limité, satisfont aussi à la question.

Les équ. $(y-4)x^2-y+4=0$, $x^3-x^2-xy+y=0$, ont le facteur commun $x-1$, ainsi qu'on le trouve en pratiquant le calcul indiqué ; ainsi, $x=1$ réduit les proposées à zéro, quel que soit y. En outre, les quotients de la division par $x-1$, sont :

$$(y-4)\ (x+1)=0, \quad x^2-y=0;$$

outre le nombre infini de solutions qu'on vient d'obtenir, on a donc encore $y=1$ et 4, répondant à $x=-1$ et ± 2.

525. Cherchons à dégager $Y=0$ des racines étrangères. Comme ces racines rendent nuls quelques facteurs, M, M'.... qui sont en y seul, il suffira de diviser Y par M, M'.... pour chasser ces racines * : mais il est plus court de les détruire dans les restes successifs, comme on va le dire.

Seulement, nous remarquerons que le facteur m de la dernière division, ne donne lieu à aucune solution étrangère ; car, si $y=\lambda$ est racine de $m=0$, et aussi de $Y=0$, l'équ. identique (4) devient $qD=0$ pour cette valeur de y. Or, on n'a pas $q=0$, puisque le facteur m n'a été choisi que pour rendre possible la division de Y par D ; c'est donc D qui est rendu zéro par $y=\lambda$, et $y-\lambda$ est facteur de D. On a vu qu'il fallait supprimer ce facteur et le traiter à part.

Le facteur M ne contient pas x ; soit $y=\lambda$ une racine de l'équ.

* Il y a une exception accidentelle quand $y=\lambda$, racine de l'équ. $M=0$, réduit T à une valeur numérique, car aucune valeur de x ne peut rendre nuls ensemble M et T ; ainsi $y-\lambda$, et par suite M, ne peut diviser Y ; le facteur M n'a pas introduit la racine étrangère $y=\lambda$. Il faut en dire autant de M' par rapport à R, de M'' et R', etc. Ce cas se reconnaîtra bientôt, quand on trouvera, par hasard, que Y n'est pas divisible par M, ou M', ou etc.

$M=0$; en substituant λ pour y dans l'équ. identique (1), il vient $0=QT+R$, $R=-QT$, autre équ. identique en x. Comme M est facteur du 1[er] coefficient a de T, $y=\lambda$ fait disparaître ce terme, et le degré de T s'abaisse à $n-1$ qui est celui de R. Ainsi *Q est une valeur numérique* *, et les polynomes T et R sont devenus les mêmes par $y=\lambda$, à un facteur numérique près. Faisons aussi $y=\lambda$ dans l'équ. (2), il vient

$$R'=M'T-Q'R=T(M'+QQ').$$

Or R' et T sont des degrés $n-2$ et $n-1$, ce qui empêche les deux membres d'être identiques ; d'où l'on voit que cette équ. serait absurde, si l'on n'avait pas $M'+QQ'=0$, quel que soit x, qui d'ailleurs n'y entre pas. Ainsi le 2[e] reste R' est rendu nul par $y=\lambda$; $y-\lambda$ divise R'. Comme chaque racine de l'équ. $M=0$ conduit à la même conséquence, on voit que *le facteur* M *introduit dans le* 1[er] *dividende, doit diviser le* 2[e] *reste* R'. Donc si l'on substitue au reste R', dans le calcul du commun diviseur, le quotient exact de R' divisé par M, on aura supprimé de l'opération les solutions étrangères que ce facteur M avait introduites. C'est ce quotient, et non plus R', qui doit être pris pour diviseur de R, ou plutôt de $M''R$.

On prouve de même que le 2[e] facteur M' divise exactement le 3[e] reste R'', et que c'est le quotient qui doit remplacer R'' dans la division suivante, pour supprimer les racines étrangères amenées par M' ; et ainsi de suite. *L'équ. finale* Y $=0$ *obtenue de la sorte, sera donc exempte de toutes les solutions étrangères.*

Par ex., $x^3y-3x+1=0$, $x^2(y-1)+x-2=0$. Multiplions la 1[re] par $(y-1)^2$, et divisons par la 2[e] ; il vient

$$1^{\text{er}}\text{ reste}\quad -x(y^2-5y+3)+y^2-4y+1\ldots.\ D,$$

multipliant la 2[e] équ. par $(y^2-5y+3)^2$, on a

$$2^{\text{e}}\text{ reste}\ldots.\ y^5-10y^4+37y^3-64y^2+52y-16,$$

lequel doit être divisible par $(y-1)^2$; le quotient est l'équ. finale en y, sans racines étrangères,

$$y^3-8y^2+20y-16=0.$$

* Et en effet les termes en x, x^2 .... qui composent le quotient Q, d'après la marche du calcul (*V.* la note, p. 59), ont pour facteurs respectifs a, a^n.., ... qui deviennent nuls pour $y=\lambda$.

Les solutions sont $y = 4,2$ et 2 ; $D = 0$ donne $x = -1,1$ et 1.

Pour $x^3y - 4x^2y^2 + x + 6 = 0$, $x^2(y-2) + xy + 2 = 0$, on multiplie la 1re équ. par $(y-2)^2$; la division donne le reste $Ax + B$, en posant

$$A = 4y^4 - 7y^3 - y^2 + 4, \quad B = 8\,(y^3 - y^2 - 3y + 3).$$

et comme $y - 1$ est facteur commun de A et B, on le supprime, et on a $y = 1$, avec $x = 2$ et -1, puis

$$A = 4y^3 - 3y^2 - 4y - 4, \qquad B = 8\,(y^2 - 3)\,;$$

le reste de la 2e division est $A^2 - \frac{1}{2}By\,(A - B) - B^2$, ou

$$20y^5 - 23y^4 - 220y^3 + 376y^2 + 272y - 560 = 0:$$

divisant par $(y-2)^2$, l'équ. finale est

$$20y^3 + 57y^2 - 72y - 140 = 0,$$

d'où l'on tire $y = -\frac{5}{4}$, et $x = -1$; puis $5y^2 + 8y^2 = 28$.

Au reste, il se peut que la racine $y = \lambda$ de $M = 0$ réduise T au degré $n - 2$ au plus ; alors M ne divise plus R', car les équ. $R = 0$, $R' = 0$ se trouvant au même degré que T, ne permettraient plus d'appliquer le raisonnement ci-dessus : V est donc embarrassé de la racine étrangère λ, ce qu'on reconnaît bientôt. Dans l'ex. suivant, le facteur y, introduit dans la 1re division, ne divise pas le 2e reste, et se retrouve dans le dernier reste, d'où il faut le dégager.

$$(y-1)\,x^4 - 1 = 0, \quad yx^3 - x + 1 = 0:$$

1er reste. . . . $(y-1)\,x^2 - x\,(y-1) - y$,

2e reste. . . . $(2y^2 - 2y + 1)\,x + (y^2 + y - 1)$,

3e reste. . . . $y\;(y^4 - 7y^3 + 14y^2 - 9y + 2)$.

Quand il arrive qu'une combinaison des équ. $Z = 0$, $T = 0$, présente un résultat simple, on doit employer celui-ci de préférence à Z : comme aussi on peut trouver plus commode d'ordonner Z et T par rapport à y. En ajoutant les équ. du 1er ex. p. 61, et résolvant selon y, qui, dans la somme, n'est qu'au 1er degré, on obtient sur-le-champ les solutions.

Quand Z et T sont au même degré m, en éliminant x^m comme une inconnue simple, on abaisse l'une des équ. au degré $m - 1$.

326. La règle donnée p. 60 présente quatre cas d'exceptions,

selon que Y ou D est nul de lui-même, ou est une valeur numérique.

1[er] CAS. *Le reste* Y *se réduit à zéro.* D est alors facteur commun de Z et de T, c'est ce qui a déjà été examiné n° 524. *Le problème est indéterminé.*

2[e] CAS. Y *est un nombre.* V et D (équ. 4) ne peuvent être rendus nuls ensemble ; ainsi aucune valeur de x et de y ne peut satisfaire aux proposées, qui expriment alors des conditions contradictoires ; *le problème est absurde.* C'est ce qu'on voit sur les équ.

$$3x^2 - 6xy + 3y^2 - 1 = 0, \quad 2x^2 - 4xy + 2y^2 + 1 = 0.$$

Posez deux équ. dont la coexistence soit impossible, ayant une même inconnue z, telles que $3z^2 - 1 = 0$, $2z^2 + 1 = 0$: faites $z = x + y$, ou $x - y$, ou toute autre fonction de x et de y; il est évident que les deux équ. seront incompatibles.

3[e] CAS. *Le diviseur* D *devient nul, pour une racine* y $= \lambda$ *de l'équ.* Y $= 0$: alors $y - \lambda$ est facteur de D, et on a vu qu'il fallait supprimer ce facteur et le traiter à part (p. 62).

C'est ainsi que dans le dernier ex. du n° 523, si l'on eût oublié de supprimer les facteurs y et $y - 1$ du 1[er] reste, on aurait trouvé l'équ. finale $y^6 - 3y^5 + y^4 + 3y^3 - 2y^2 = 0$, dont les racines sont $y = 0, 1, 1, -1$ et 2 ; les trois premières donnent lieu à la présente circonstance.

4[e] CAS. *Le dernier diviseur* D *devient un nombre δ, quand on fait* y $= \lambda$*;* en divisant D par $y - \lambda$, le quotient étant K et le reste L, on a $D = (y - \lambda) K + L$; puisque $y = \lambda$ change D en une valeur numérique δ, x n'entre pas dans L; et comme on doit avoir ensemble $D = 0$, $V = 0$, la valeur $y = \lambda$ répond à x infini, seule manière de rendre D nul. Par ex., les équ.

$$y^3x^3 + xy^3 (y - 1) - 1 = 0, \quad y^2x^2 + y^3 - y^2 - 1 = 0,$$

ont pour équation finale $y^2 (y - 1) = 0$, et pour dernier diviseur $xy - 1 = 0$; donc $y = 1$ répond à $x = 1$, et $y = 0$ à $x = \infty$.

L'ex. suivant montre comment on élimine entre trois éq.

$$x + z^2 - 2y = 0, \quad x^2 + y^2 = 2, \quad z^2x = 1.$$

On chasse d'abord y, entre ces équ. deux à deux ; on trouve deux équ. finales en x et z, entre lesquelles on élimine z ; il vient enfin une équ. en x. Ainsi on a

$$z^4 + 2xz^2 + 5x^2 = 8, \quad z^2x = 1 ; \quad 5x^4 - 6x^2 + 1 = 0.$$

On trouve $x = \pm 1$, $5x^2 = 1$, et les quatre racines de x sont connues; z est ensuite donné par l'équ. $z^2 x = 1$, etc.

Sur l'existence des Racines.

527. Représentons $kx^n + px^{n-1} \ldots + u$ par fx, k étant positif, et construisons (fig. 1) sur les axes rectangles Ax, Ay, la courbe $MM'M'' \ldots$ dont l'équ. est $y = fx$. A chaque abscisse AP répond une ordonnée PM, et une seule; *toute parallèle à l'axe* Ay *coupe donc la courbe en un point unique; la courbe est un trait continu, s'étendant à l'infini, tant à droite qu'à gauche, sans nœud, ni double branche; elle peut former diverses ondulations.* Elle porte le nom de *courbe parabolique*, par analogie avec la parabole dont l'équation est $y = ax^2$.

Quand l'arc coupe l'axe des x en quelque point k, l'abscisse Ak de ce point répond à $y = 0$, et est par conséquent racine de l'équ. $fx = 0$: les racines positives sont les abscisses des points de section placés à droite de l'origine A; les négatives sont à gauche. Une ordonnée positive PM donne un point M de la courbe situé en dessus de l'axe Ax; une négative $P'M'$ donne un point M' au-dessous.

Pour qu'à une abscisse Ak, racine de l'équ. $fx = 0$, il en succède une autre Ak', il faut que l'arc se recourbe, se rapproche de l'axe Ax, ce qui produit les serpentements qu'on voit dans la fig. 1 ; les ondulations qui n'arrivent pas jusqu'à l'axe, ne donnent aucune racine réelle. Comme la forme de la courbe détermine les racines, et qu'en ses divers points, la direction de l'arc est celle de sa tangente, cherchons les inclinaisons de ces tangentes sur l'axe des x.

Soit BMM' (fig. 2) un arc de la courbe dont l'équ. est $y = fx$; M et M' deux points de cet arc; x et y les coordonnées de M, $x + h$ et $y + k$ celles de M', savoir, $AP = x$, $PM = y$, $PP' = h$, $QM' = k$. En remplaçant, dans $y = fx$, x par $x + h$, et y par $y + k$, on a (n° 504)

$$y + k = fx + hf'x + \tfrac{1}{2}h^2 . f''x + \tfrac{1}{6}h^3 . f'''x \text{ etc.} \quad \ldots \quad (1)$$

$$\text{d'où} \quad \frac{k}{h} = f'x + \frac{1}{2}h . f''x + \frac{1}{6}h^2 . f'''x \text{ etc.} \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

à cause de $y = fx$. Or en résolvant le triangle rectangle QMM', et

désignant par S l'angle que la sécante $M'MS$ fait avec l'axe Ax, on a $\text{tang } S = \frac{QM'}{QM} = \frac{k}{h}$: ainsi l'expression (2) est la valeur de tang S. Or plus h diminue, plus cette expression approche de $f'x$, en même temps que S tend à devenir l'angle T que la tangente au point M fait avec Ax : on a donc

$$\text{tang } T = f'x = \textit{dérivée du polynome } \text{f}x.$$

Ainsi quand on prend pour x tous les degrés de grandeurs entre AP et AP' (fig. 1), les différentes valeurs de $f'x$ sont celles des tangentes de tous les angles T que font avec l'axe Ax les tangentes successives à l'arc MM'. Ces angles sont aigus (du côté droit) quand $f'x$ a le signe $+$ (comme pour l'arc BM, fig. 2); obtus quand $f'x$ a le signe $-$ (comme pour OM' fig. 1) : la tangente est parallèle aux x, en O, o, o', O', O'', quand $f'x = 0$; les ondulations de la courbe résultent des variations de signe qu'éprouve $f'x$.

Comme, d'après la forme de fx aucune valeur de x ne peut rendre ce polynome infini, nulle part la tangente n'est perpendiculaire aux x ; la courbe ne peut donc affecter la fig. 3 d'un *rebroussement*.

528. Puisque le triangle rectangle HMQ (figure 2) donne $HQ = h \,.\, f'x$, on a $P'H = fx + h\, f'x =$ ordonnée du point H de la tangente qui a $x + h$ pour abscisse. Mais l'ordonnée du point M' de la courbe est l'expression (1), dont les deux 1ers termes sont la valeur de PH, savoir,

$$P'M' = y + k = PH + \tfrac{1}{2} h^2 \,.\, f''x + \tfrac{1}{6} h^3 \,.\, f'''x \ldots.$$

et comme h est aussi petit qu'on veut, le signe de la quantité ajoutée à PH est celui du 1er terme $\frac{1}{2} h^2 \,.\, f''x$, c'est-à-dire celui que $f''x$ se trouve avoir, puisque le facteur h est au carré. Donc l'ordonnée $P'M'$ de la courbe surpasse celle PH de la tangente, ou en est surpassée, pour les points voisins de M, selon que $f''x$ est positif ou négatif : cela ayant lieu quel que soit le signe de h, est vrai à droite et à gauche du point M de contact. Ainsi *l'arc tourne en cet endroit vers le haut sa concavité ou sa convexité, selon que* f''x *a le signe* $+$ *ou* $-$, *pour la valeur de* x *qu'on a choisie.*

Tout ce qu'on vient de dire convient aussi au cas où l'arc de courbe est situé sous l'axe des x, ce qu'on démontre par le même raisonnement. Au reste, si l'on change y en $y_1 - i$, l'équ. $y = fx$ devient $y_1 = fx + i$; ainsi le dernier terme u de fx est simplement

changé en $u + i$, ce qui n'altère en rien les dérivées $f'x$, $f''x$... Or cette transformation revient à descendre l'axe des x parallèlement, pour le porter à la distance arbitraire i : on peut supposer qu'actuellement les serpentements de la courbe sont tous situés en dessus du nouvel axe des x, et appliquer le théorème ci-dessus ; donc etc...

Si l'on veut comparer l'arc de courbe à l'axe des x, il est aisé de voir que notre théorème revient à celui-ci : *l'arc tourne sa concavité à l'axe quand* fx *et* $f''x$ *sont de signes contraires, et sa convexité quand les signes sont les mêmes.*

529. Le point I (fig. 5) où un arc convexe s'unit à un arc concave, est appelé *inflexion*. L'abscisse x de ce point devant être au passage de $f''x$ du positif au négatif, doit être racine de $f''x = 0$. En effet, au point I d'inflexion la tangente est dirigée entre les deux arcs qu'elle coupe et touche en ce point I; le développement (1), privé de son 3e terme, devient

$$y + k = fx + h \,.\, f'x + \tfrac{1}{6}h^3 \,.\, f'''x + \tfrac{1}{24}h^4 \,.\, f''''x \ldots$$
$$= \text{l'ordonnée } PH \text{ de la tangente} + \tfrac{1}{6}h^3 \,.\, f'''x + \text{etc.}$$

Comme h est très-petit, le signe de ce développement est celui de son 1er terme, lequel change avec h; en sorte que, selon que le point voisin de M (fig. 5) est pris à droite ou à gauche de M, l'ordonnée de la tangente est plus grande ou plus petite que celle de la courbe : ainsi l'arc est situé en dessus de la tangente d'un côté du point M de contact, et en dessous de l'autre côté : c'est le caractère propre à l'inflexion, qui n'aurait pas lieu si $f''x$ n'était pas nul.

Ainsi pour obtenir les abscisses des points d'inflexion, il faut résoudre l'équ. $f''x = 0$; les racines réelles déterminent ces points de séparation des serpentements. En cherchant les valeurs de $f'x$ qui correspondent à ces racines, on a les inclinaisons des tangentes en ces points.

530. A chaque ondulation de la courbe il y a un point O, O'.... (fig. 1) où la tangente est parallèle aux x, et l'ordonnée un *maximum* ou un *minimum*, c'est-à-dire ou plus grande, ou plus petite que ses voisines des deux côtés. Les racines de l'équ. $f'x = 0$ sont des abscisses de ces points. Voici comment on distingue le maximum du minimum. Le point dont l'ordonnée est un maximum positif ou négatif appartient à un arc concave vers l'axe des x, et l'on a vu qu'alors les signes de fx et $f''x$ sont différents ; tandis que ces signes

sont les mêmes dans le cas d'un minimum, qui répond à un arc convexe vers l'axe.

Et en effet, puisque $f'x = 0$, la série (1) est privée de son deuxième terme, et l'ordonnée PM' (fig. 2) de la courbe se réduit à

$$PM' = fx + \tfrac{1}{2} h^2 . f''x + \text{etc.} = \text{l'ordonnée } PM + \tfrac{1}{2} h^2 . f''x \ldots (4)$$

Mais pour h très-petit, cette série prend le signe de $f''x$, que h soit positif ou négatif : ainsi quand fx et $f''x$ ont même signe, les ordonnées à droite et à gauche de PM surpassent cette ordonnée ; c'est le contraire quand ces signes sont différents. Donc *pour le maximum positif ou négatif*, fx *et* f''x *sont de signes contraires; les signes sont les mêmes dans le cas du minimum.*

Appliquons cette théorie à l'équ.

$$y = x^4 - \tfrac{26}{3} x^3 + \tfrac{19}{2} x^2 - 6x + \tfrac{5}{6} = fx; \text{ d'où}$$
$$f'x = 4x^3 - 16x^2 + 19x - 6, \quad f''x = 12x^2 - 32x + 19.$$

En posant $f'x = 0$, on a $x = \frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$ et 2; ces racines sont portées sur l'axe Ax (fig. 4) de A en P, P' et P''; les ordonnées correspondantes sont celles des maxima ou minima ; ce sont

$$PO = -\tfrac{19}{48},\ P'O' = +\tfrac{13}{48},\ P''O'' = +\tfrac{1}{6}.$$

Comme $x = 0$ donne $AB = \frac{5}{6}$, la courbe passe en $BOO'O''$: l'équ. $f''x = 0$ donne $x = 0{,}89\ldots$ et $1{,}77\ldots$ abscisses AQ, AQ' des points d'inflexion I, I'. Et comme de l'un de ces points à l'autre, $f''x$ est négatif, l'arc y est convexe; il est concave dans le reste de la courbe. Il y a donc un maximum négatif en O, un positif en O', et enfin un minimum positif en O''. On a deux points de section avec l'axe, en C et D; $AD = 1$ et AC sont des racines réelles de l'équ. $fx = 0$; les deux autres sont imaginaires.

531. Les racines de l'équ. $f'x = 0$ sont les abscisses des points de la courbe où la tangente est horizontale, et l'on a vu que ces points ont leur ordonnée maximum ou minimum, selon les signes de fx et $f''x$. Mais si quelqu'une de ces racines rend en outre $f''x$ nul, alors il n'y a plus maximum ni minimum, mais inflexion horizontale, comme dans la fig. 5. En effet la partie du développement (4) qu'il faut ajouter à l'ordonnée PM est alors $\frac{1}{6} h^3 . f'''x + \ldots$; et comme le 1er terme change de signe avec h, l'arc est concave d'un côté du point M de contact, et convexe de l'autre. Comme cette

valeur de x donne à la fois $f'x=0$, $f''x=0$, la 1re de ces équ. a deux racines égales (n° 520). Ce cas arrive quand deux ondulations successives se fondent en une seule par l'évanouissement de l'arc qui joint un maximum au suivant, et la coïncidence de l'un avec l'autre, ainsi que celles de leurs tangentes.

De même, il pourrait arriver que $f'''x$ fût aussi nul; la partie additive à PM dans l'expression (4) serait $\frac{1}{24}h^4.f^{\text{IV}}x+\ldots$ qui conserve le signe de f^{IV} des deux côtés du contact; il y aurait donc maximum ou minimum, selon le signe — ou + de $f^{\text{IV}}x$: trois ondulations de la courbe se réuniraient en une seule.

En général, pour avoir un maximum ou un minimum, quand la tangente est horizontale, il faut que la 1re dérivée qui n'est pas nulle par la racine de $f'x=0$, soit d'ordre pair; et le signe de cette dérivée sert à distinguer le maximum du minimum. Et pour que la racine de $f''x=0$ réponde à une inflexion, il faut que la 1re dérivée de $f''x$ qui n'est pas rendue nulle soit d'ordre impair.

Il suit de la forme de la courbe parabolique qu'une convexité doit succéder à une concavité, et réciproquement; un maximum positif suit un maximum négatif, si l'arc coupe l'axe des x, ou un minimum positif, s'il ne le rencontre pas : le maximum négatif est pareillement suivi d'un minimum négatif, ou d'un maximum positif. Cependant s'il arrive que la courbe a une tangente horizontale au point même d'inflexion (fig. 5), cas où $f'x=0$ en même temps que $f''x=0$, il n'en est plus ainsi, et *ce point singulier* tient lieu à la fois d'un maximum et d'un minimum réunis ensemble. Si l'on a en outre $f'''x=0$, on retombe sur le cas précédent, seulement trois points de cette espèce sont fondus en un seul; et ainsi de suite.

Lorsque la tangente est oblique à l'axe des x, $f'x$ n'est plus nul, et si $f''x=0$, on a vu que la courbe a une inflexion : mais cette inflexion disparaît si la même racine de cette équ. donne $f'''x=0$, deux ondulations se sont réunies en un seul point. Et si $f^{\text{IV}}x$ est aussi $=0$, l'inflexion reparaît, etc. En un mot, toutes les circonstances énoncées dans le cas où la tangente est horizontale, peuvent se réaliser aussi quand elle est oblique, par l'évanouissement de quelques ondulations.

532. Il suit de ces raisonnements que quand deux abscisses AP, AP', (fig. 1) donnent pour fx deux résultats de signes contraires PM, $P'M'$, les points M et M' de la courbe étant des deux côtés de l'axe $x'x$, et l'arc devant aller de l'un de ces points à l'autre par un

trait continu, la courbe doit couper l'axe en un point intermédiaire k. Et même il se peut que, dans cet intervalle PP', la courbe ait des serpentements, et qu'elle forme 3,5.... intersections avec l'axe, comme on le voit par l'arc ponctué des fig. 8 et 9, où la courbe va de m en M, en traversant l'axe un nombre impair de fois.

Deux abscisses AP, AP'' (fig. 1) qui donnent pour fx des résultats de même signe, PM, $P''M''$, indiquant que deux points M, M'' de la courbe sont situés d'un même côté de l'axe $x'x$, l'arc qui joint l'un à l'autre peut ne point couper l'axe ; mais si l'arc est ondulé, il peut aussi le couper en 2,4... points, comme on le voit par l'arc ponctué de m en M (fig. 6 et 7).

On ne regardera pas comme une exception à ce nombre, soit pair, soit impair, d'intersections de la courbe avec l'axe $x'x$, le cas où elle toucherait cet axe (fig. 10) ; car alors fx et $f'x$ seraient nuls ensemble pour l'abscisse $x = a$ du point k de contact, cas où l'équ. $fx = 0$ a la racine double a, et le facteur $(x - a)^2$; ce sont deux points de section de l'arc MkM' qui se trouvent réunis en un seul, et ce point de contact k doit compter pour deux intersections. Et si $x = a$ donnait en outre $f''x = 0$, le point unique de section et de contact serait correspondant à une racine triple de $fx = 0$, à une inflexion MkM'', et compterait pour trois, à cause du facteur $(x - a)^3$. En général, fx aurait le facteur $(x - a)^m$, et la racine $x = a$ compterait pour m points de section, parce que toutes les dérivées jusqu'à $f^{m-1}x$ seraient nulles, et que la courbe aurait réellement m points et m courbures réunies ensemble.

Donc *quand deux valeurs substituées à* x *dans* fx, *donnent des résultats de signes contraires, l'équ.* fx $= 0$ *a, entre ces valeurs, des racines en nombre impair, et toujours au moins une racine intermédiaire : si les résultats ont même signe, soit* $+$, *soit* $-$, *ou les valeurs substituées n'interceptent entre elles aucune racine, ou elles en comprennent un nombre pair.*

533. D'après cela, examinons les deux cas de degré pair et impair.

I. *Si l'équ.* fx $= 0$ *est de degré pair* n, en prenant pour x la limite AP (fig. 6 et 7) des racines positives, ou le 1er terme kx^n du polynome fx positif et plus grand que la somme des termes négatifs, l'ordonnée PM est positive. Par la même raison $f'x$ et $f''x$ sont aussi positifs ; la tangente aux points de la courbe depuis M jusqu'à l'infini fait un angle aigu T avec l'axe Ax, et est concave vers le

haut, s'écartant de plus en plus de cet axe. L'abscisse Ap étant limite des racines négatives, fx et $f''x$ sont encore positifs, parce que les exposants n et $n-2$ du 1[er] terme de ces polynomes sont pairs; la courbe est donc aussi concave, jusqu'à l'infini et s'écarte sans cesse au-dessus de l'axe Ax'. Mais $f'x$ est négatif, parce que $n-1$ est impair : la tangente aux points de la courbe depuis m jusqu'à l'infini fait un angle obtus t avec Ax.

Or, *si le dernier terme de* fx *est négatif*, — u, en faisant $x=0$, y devient $-u$, et il faut porter la longueur $AB=-u$ (fig. 6) en dessous de l'origine A : la courbe passe par les trois points m, B et M, et doit couper l'axe au moins une fois en k' à gauche, et une fois en k à droite : mais elle peut aussi couper cet axe en 3,5. . . . points de chaque côté, si elle fait des serpentements assez étendus pour l'atteindre, ainsi qu'on le voit par la ligne ponctuée. Donc *toute équ. de degré pair dont le dernier terme est négatif a un nombre impair de racines positives et aussi de négatives, mais toujours au moins une de chaque espèce.*

Et *si le dernier terme de* fx *est positif*, + u, en faisant $x=0$, y devient $+u$, qu'il faut porter en AB (fig. 7) au-dessus de l'origine A. La courbe passe par les trois points m, B et M, situés en dessus de l'axe $x'x$, et l'on est incertain si elle fait des serpentements capables d'y atteindre : mais s'il y a des intersections, elles sont en nombre pair tant à droite qu'à gauche, ainsi qu'on le voit par la ligne ponctuée. Donc *toute équ. de degré pair dont le dernier terme est positif, ou n'a aucune racine réelle, ou le nombre en est pair pour les positives, pair pour les négatives.*

II. *Si* fx *est de degré impair* n, tout ce qu'on vient de dire pour la forme de la courbe du côté des x positives est encore vrai ; à partir de M (fig. 8 et 9), elle est encore concave vers le haut, s'écartant sans cesse de l'axe Ax et allant à l'infini, avec des tangentes qui font des angles aigus avec cet axe. Mais si l'on prend pour x la limite Ap des racines négatives, comme l'exposant n du 1[er] terme de fx, et celui $n-2$ de $f''x$ sont impairs, ce premier terme est négatif, et l'on a une ordonnée négative pm, et un arc convexe vers le haut. En outre, au point m, situé sous l'axe, la tangente fait un angle aigu avec les x, parce que l'exposant $n-1$ du 1[er] terme de $f'x$ est pair.

Or, *si le dernier terme de* fx *est négatif*, — u, $x=0$ donne $y=-u$, qu'il faut porter en AB (fig. 8) sous l'origine A : la courbe va donc de m en B, puis en M. D'où l'on voit qu'elle peut ne pas couper

l'axe $x'x$ dans l'espace Ax', et qu'elle le coupe certainement une fois entre A et P. Les intersections que produiraient des serpentements seraient d'ailleurs en nombre pair de x' en A, et impair de A en P. Donc *toute équ. de degré impair dont le dernier terme est négatif a toujours un nombre impair de racines positives* (*au moins une*), *et peut n'en avoir aucune négative; lorsqu'il en existe, de cette dernière espèce, elles sont en nombre pair.*

Et *si le dernier terme de* fx *est positif*, $+u$, il faut prendre $AB = u$ (fig. 9) au-dessus de l'origine A : la courbe va de m en B et en M, coupe l'axe entre A et p en un nombre impair de points, peut ne pas rencontrer cet axe de A en P, et si elle le rencontre, ce doit être en un nombre pair de points. Donc *toute équ. de degré impair, dont le dernier terme est positif, a un nombre impair de racines négatives* (*au moins une*), *et peut n'avoir aucune racine positive, ou en avoir un nombre pair.*

Le cas où la courbe serait tangente à l'axe des x ne fait pas exception à ces principes, puisque nous avons vu qu'alors l'équation $fx = 0$ a des racines égales, et qu'on doit compter ces racines comme répondant à un égal nombre de points communs entre la courbe et l'axe.

Lorsqu'une équ. ordonnée est formée de termes positifs suivis d'autres termes tous négatifs, il n'y a qu'une racine positive, les autres racines sont négatives ou imaginaires. Car l'équ.

$$kx^n + \ldots + qx^i - rx^{i-1} - sx^{i-2} \ldots - u = 0,$$

devient $$kx^{n-i} \ldots + q = \frac{r}{x} + \frac{s}{x^2} \ldots + \frac{u}{x^i},$$

lorsqu'on la divise par x^i. La proposée a une racine positive, α, puisque son dernier terme est négatif; $x = \alpha$ rend donc égaux les deux membres de cette dernière équ. Qu'on fasse croître ou décroître x, l'égalité sera impossible, puisque l'un des membres augmentera, tandis que l'autre diminuera.

534. Puisque toute équ. de degré pair doit avoir ses racines réelles en nombre pair, ou n'en avoir aucune, et que si le degré est impair, les racines réelles sont en nombre impair, il s'ensuit que *les racines imaginaires d'une équ. sont toujours en nombre pair : une équ. qui n'a pas de racine réelle est nécessairement de degré pair, avec un dernier terme positif.*

Quand toutes les racines de l'équ. $f'x = 0$ sont réelles, la courbe a $n - 1$ tangentes horizontales et $n - 1$ serpentements. Si chacun de ces arcs atteint l'axe des x, les n racines de l'éq. $fx = 0$ sont aussi réelles; et comme alors il n'y a que des maxima alternativement positifs et négatifs, fx et $f''x$ ont toujours des signes différents pour toutes les racines de $f'x = 0$, et leur produit reste négatif.

Mais les racines réelles sont remplacées par des imaginaires accouplées, quand ces intersections doubles manquent, c'est-à-dire quand des maxima sont remplacés par des minima, l'ondulation n'ayant pas un développement suffisant pour atteindre l'axe.

Et lorsque l'équ. $f'x = 0$ a des couples imaginaires pour racines (car elles sont toujours en nombre pair) la courbe dont l'équ. est $y = fx$ perd autant de serpentements, et $fx = 0$ perd autant de couples de racines réelles. Ainsi, en général, *l'équ* fx = 0 *a autant de racines imaginaires, que* f'x = 0, *ou un plus grand nombre, savoir, autant que* f'x = 0 *en a, et de plus autant que cette dernière équ. a de racines réelles qui rendent* fx *et* f''x *de même signe, ou le produit* fx $\times$ f''x *positif;* car les intersections de la courbe avec l'axe des x manquent par couples, quand la courbe a des minima.

Si l'équ. $fx = 0$ a toutes ses racines réelles, les équ. $f'x = 0$, $f''x = 0$, etc., les ont ainsi de cette espèce; mais la réciproque n'est pas vraie.

535. Étant donnée une équ. $fx = 0$, il est facile de connaître les différentes formes que peut affecter la courbe dont l'équation est $y = fx$. Prenons d'abord celle du 3[e] degré, $y = kx^3 + px^2 + qx + r$; les branches qui vont à l'infini sont disposées comme dans les fig. 8 et 9. L'équ. $f'x = 0$ est du 2[e] degré. Si ses racines sont réelles, la courbe a deux tangentes horizontales, deux serpentements. Quand l'axe xx' (fig. 11) coupe ces deux ondulations, l'équ. $fx = 0$ a ses trois racines réelles : mais si cet axe, tel que AA' ou BB', ne les coupe pas, l'équ. n'a qu'une seule racine réelle, qui est positive ou négative, selon que le dernier terme r a le signe $-$ ou $+$. Entre ces deux états, est celui où l'axe $x'x$ serait tangent à l'une des deux ondulations, cas où $fx = 0$ et $f'x = 0$ auraient une racine α commune; alors $(x - \alpha)^2$ serait facteur de fx. Et si $fx = (x - \alpha)^3$ les deux serpentements se fondent en un; la courbe est comme MkM'' fig. 10, tangente à l'axe au point d'inflexion k.

Lorsque l'équ. $f'x = 0$ a ses deux racines imaginaires, il n'y a aucune ondulation; la courbe a la forme fig. 12, et la proposée n'a

plus qu'une racine réelle, de signe contraire à celui du dernier terme r.

Pour l'équ. du 4e degré $y = kx^4 +$ etc., la dérivée $f'x = 0$ est du 3e degré. Si les trois racines sont réelles la courbe a 3 ondulations (fig. 13); l'axe des x peut les couper toutes, et l'équ. $fx = 0$ a alors ses 4 racines réelles; mais s'il n'en coupe qu'une seule comme AA', ou aucune comme BB', il n'y a que deux racines réelles ou aucune. La courbe a deux points d'inflexion donnés par $f''x = 0$.

Mais si l'équ. $f'x = 0$ n'a qu'une racine réelle, l'équ. $f''x = 0$ n'en a pas de telles, la courbe n'a pas d'inflexion et ne fait qu'une seule ondulation (fig. 6) qui peut couper l'axe en deux points, ou ne pas le rencontrer; ainsi il y a deux racines réelles, ou 4 imaginaires.

Pour l'équ. du 5e degré, la courbe a la fig. 14, si $f'x = 0$ a ses 4 racines réelles, ou la fig. 11 s'il n'y a que deux racines réelles, ou enfin la fig. 12 si les 4 racines de $f'x = 0$ sont imaginaires.

Sans nous fonder sur le théorème du n° 501, nous avons reconnu que toute équ. a une racine réelle, excepté quand le degré est pair et le dernier terme positif; nous nous réservons de prouver plus tard que, dans ce cas même, il existe *un symbole algébrique, une fonction des coefficients*, qui substituée pour x doit réduire fx à zéro; nous serons assurés alors que toute équ. a une racine réelle ou imaginaire, et d'après le n° 501, qu'elle en a précisément n.

536. Soient $a, b, \ldots - a', - b', \ldots$ les racines réelles d'une équ. $fx = T(x - a)(x - b) \ldots (x + a')(x + b') \ldots$ On suppose ici que $T = 0$ n'a pas de racines réelles, et que par conséquent le polynome T est de degré pair, avec son dernier terme positif. Le dernier terme de fx étant le produit de celui de T par $- a$, $- b, \ldots + a', + b', \ldots$ son signe ne dépend que du nombre pair ou impair des facteurs négatifs. Donc le dernier terme d'une équ. est positif ou négatif, selon que le nombre des racines positives est pair ou impair, quel que soit d'ailleurs le nombre des négatives et des imaginaires.

537. Supposons qu'ayant résolu l'équ. $f'x = 0$, on ait distingué les maxima des minima de la courbe $y = fx$, par la comparaison des signes de fx et $f''x$, pour les valeurs de x qui sont racines de $f'x = 0$. Admettons que ces racines répondent à M maxima et m minima.

Cela posé, imaginons qu'un point mobile partant de l'infini né-

gatif, décrive cette courbe en allant jusqu'à l'infini positif. Pendant une immense étendue de la marche, ce mobile ne rencontrera pas l'axe, parce que ce n'est que dans le voisinage de l'origine que commenceront les ondulations. Après chaque maximum, il tendra vers l'axe, et ensuite le coupera, à moins que l'axe se recourbant ne donne naissance à un minimum. Ainsi chaque minimum détruira une intersection indiquée par le maximum voisin. Il en faut conclure que $M - m + 1$ est le nombre des intersections, c'est-à-dire des racines réelles de l'équ. $fx = 0$: nous ajoutons le terme $+ 1$, parce que dans le mouvement du mobile, nous n'avons pas compté l'intersection qui précède le 1er maximum ou succède au dernier. S'il y a autant de maxima que de minima, $M = m$ et il n'y a qu'une seule racine réelle (l'équ. est alors de degré impair) : quand il n'y a pas de minimum, un seul maximum est possible, et l'équ. a deux racines réelles; elle est de degré pair et le maximum est négatif : enfin quand il n'y a pas de maximum, on ne trouve qu'un seul minimum et aucune racine n'est réelle; l'équ. est de degré pair et le minimum est positif.

Racines incommensurables.

538. *Méthode de Newton.* Après avoir dégagé une équ. proposée de ses racines soit égales, soit commensurables, il s'agit de trouver les racines irrationnelles. Supposons qu'on soit parvenu à connaître une valeur approchée γ de l'une de ces racines, qui soit seule comprise entre α et θ; en faisant $x = \gamma$ dans fx, on jugera par le signe du résultat (p. 72) si la racine est comprise entre α et γ, ou entre γ et θ : posons qu'elle soit entre α et γ. Faisons $x = \beta$, nombre entre ceux-ci, et nous saurons si la racine est entre α et β, ou entre β et γ. On resserre ainsi de plus en plus les limites, et on approche indéfiniment de la racine.

Mais ce procédé serait impraticable pour de grandes approximations; on ne l'emploie que pour *obtenir un nombre α qui soit approché à moins du dixième de la valeur de* x. Désignant l'erreur par y, on a $x = \alpha + y$; substituant dans $fx = 0$, on a (nº 504)

$$f\alpha + yf'\alpha + \tfrac{1}{2}y^2f''\alpha \ldots + ky^m = 0.$$

Mais on suppose que y est une petite quantité, et α n'entre au

dénominateur d'aucun des coefficients, qui sont les valeurs de fx et de ses dérivés, quand on fait $x = \alpha$: la règle de Newton consiste à regarder $y^2\, y^3, \ldots$ comme assez petits pour pouvoir être négligés, ce qui réduit la transformée à $f\alpha + yf'\alpha = 0$, d'où

$$y = -\frac{f\alpha}{f'\alpha} = -\frac{k\alpha^n + p\alpha^{n-1} + \ldots . t\alpha + u}{nk\alpha^{n-1} + p(n-1)\alpha^{n-2} \ldots + t}.$$

Appelons s cette fraction, ou seulement sa valeur approchée; $y = s$ donne $x = \alpha + s$ pour 2[e] approximation. Faisant $\alpha + s = \alpha_1$, et désignant par y_1 la nouvelle correction, elle sera donnée par la même expression où α sera remplacé par α_1; donc $x = \alpha + s + y_1$, et ainsi de suite.

Soit, par ex., $x^3 - 2x - 5 = 0$; en faisant $x = 2$ et 3, les résultats -1 et $+16$, accusent l'existence d'une racine entre 2 et 3, qui même est plus voisine de 2. Mais $x = 2{,}1$ donne 0,061; ainsi 2,1 est plus grand que x, et plus voisin de la racine que 2. Faisons $a = 2{,}1$, la correction est

$$s = -\frac{\alpha^3 - 2\alpha - 5}{3\alpha^2 - 2} = -\frac{0{,}061}{11{,}23} = -0{,}0054.$$

Bornons-nous aux dix-millièmes, pour une 1[re] approximation, $x = 2{,}0946$. Prenons ce nombre pour valeur de α, et il viendra

$$s = -\frac{0{,}000541550536}{11{,}16204748} = -0{,}00004851.$$

Notre 4[e] décimale était donc défectueuse, et on trouve . . . . . . $x = 2{,}09455149$. On poussera ce calcul plus loin pour corriger les dernières décimales et approcher davantage.

Si l'on conserve le terme en y^2 dans le développement, on a

$$y = \frac{-f\alpha}{f'\alpha + \frac{1}{2} y f''\alpha};$$

après avoir trouvé la 1[re] correction s, on la substitue pour y dans le dénominateur, et on obtient une valeur plus approchée. C'est ainsi que dans notre ex. $s = -0{,}0054$ mis dans $\frac{1}{2}yf''\alpha$ donne $-0{,}034$: le dénominateur devient 11,196; d'où $y = 0{,}0054483$, quantité dont la dernière décimale est seule fautive.

Soit encore l'équ. $x^3 - x^2 + 2x = 3$, qui a une racine entre 1,2, et 1,3, qui donnent pour résultats $-0,312$ et $+0,107$. Faisons $\alpha = 1,3$, nous avons $y = -\frac{0,107}{4,47} = -0,02$, et $x = 1,28$. Comme $\frac{1}{2}yf''\alpha = (3\alpha - 1)\,y = 2,9y$, le dénominateur augmenté de $-0,058$ devient $4,412$; d'où $y = -0,0242$, ainsi $x = 1,2758$. On prend $\alpha = 1,276$, et on continue l'approximation.

539. La méthode de Newton n'est exacte que sous certaines conditions. En effet, construisons, comme n° 527, la courbe parabolique (fig. 1) dont l'équ. est $y = fx$. Les racines de l'équ. $fx = 0$ sont les abscisses des points k, k'.... d'intersection de cette courbe avec Ax. Soit $x = AP = \alpha$ une valeur approchée de la racine $Ak = a$ (fig. 15 et 16) : l'ordonnée $PM = f\alpha$, et la tangente de l'angle T que fait avec Ax la tangente en M est $f'\alpha$ (n° 527). En résolvant le triangle TPM, on trouve $TP.\tang T = PM = f\alpha$, et la valeur de la *sous-tangente* $s = TP$ est

$$s = \frac{f\alpha}{f'\alpha}, \quad \text{d'où } AT = \alpha - \frac{f\alpha}{f'\alpha}.$$

Telle est la nouvelle valeur approchée de $Ak = a$, selon la méthode de Newton, qui a, comme on voit, pour objet de substituer à l'arc Mk sa tangente MT, dans la recherche du point de section k avec l'axe. On fait ensuite servir cette 2e approximation AT à trouver une autre tangente $M'T'$, puis une nouvelle valeur AT' plus approchée, et ainsi de suite. Cette méthode n'est d'ailleurs bonne qu'autant que les points T, T'.... ainsi obtenus se rapprochent sans cesse de k.

Or si l'on eût pris pour l'approximation α, la partie Ap (fig. 15) qui répond au point m voisin du maximum O, il est évident que la tangente mt en ce point, loin de conduire à une valeur plus approchée de Ak, pourrait même donner une sous-tangente presque infinie ; et même pour le point de contact m', cette sous-tangente serait dirigée en sens contraire. Ainsi la forme et la position de l'arc mM relativement à l'axe, peuvent être telles que la règle serait fautive : et il faut la soumettre à des conditions spéciales, si l'on veut être assuré de son succès.

1° *Il faut connaître deux nombres α et β, entre lesquels il n'y ait qu'une seule racine comprise :* car si la courbe coupait l'axe en plu-

sieurs points intermédiaires à α et β, elle y ferait des serpentements ; il serait douteux que le point de contact fût propre à donner une valeur plus voisine de a que α. C'est ce qu'on peut voir sur la fig. 1 où les limites Ap, Ap' ne sauraient permettre d'approcher de Ak et Ak'.

2° *Aucune valeur de* x *entre* α *et* β *ne doit rendre nulles les dérivées* f′x, f″x : car il se trouverait, dans l'intervalle, un point maximum ou minimum, ou bien une inflexion (n°s 529 et 530), circonstances qui pourraient visiblement rendre la méthode de Newton défectueuse.

Nous donnerons (n° 556) des procédés pour trouver les limites α et β, et s'assurer que la condition précédente est remplie.

3° *Lorsqu'on aura trouvé nos deux limites* α *et* β, *on ne pourra se servir, pour pousser l'approximation, que de celle qui rend* fx *et* f″x *de mêmes signes*. Les fig. 15, 16, 17, 18, représentent les positions différentes que peut avoir l'arc, selon qu'il tourne sa convexité ou sa concavité vers le haut. Ak est la racine a : AP, Ap, sont les limites α et β qui l'interceptent seule; la sous-tangente PT est la correction s indiquée par la méthode pour la valeur $AP = \alpha$. Or on voit que, pour la sûreté du procédé, il faut que le pied T de la tangente soit entre celui de P de l'ordonnée et le point k de section avec l'axe : ainsi, du point P, on doit voir la convexité de l'arc, ce qui exige, comme on sait (n° 528), que le signe de l'ordonnée fx soit le même que celui de $f''x$, pour l'abscisse $AP = x = \alpha$. Telle est donc la limite qu'il faudra préférer pour l'approximation ultérieure.

Lorsque la considération des signes aura conduit à préférer celle des deux limites $\alpha > a$, il suit de nos fig. 15 et 18 que toutes les approximations successives seront toujours $> a$, en descendant sans cesse vers cette racine a. Et si, au contraire, on a pris $\alpha < a$ (fig. 16 et 17), on montera vers a, par une suite d'approximations toutes $< a$.

540. Voici donc la marche à suivre : 1° on cherchera deux limites α et β entre lesquelles il n'y ait qu'une seule racine ; 2° l'on resserrera ces limites jusqu'à ce qu'on soit certain qu'entre elles, il ne se trouve aucune racine des équ. $f'x = 0$, $f''x = 0$; 3° enfin on prendra pour première approximation celle α de ces deux limites qui, substituée dans fx et $f''x$ donnera des résultats de mêmes signes. Le calcul fera connaître la valeur s qui est la correction à ajouter, *avec son signe*, à α, pour obtenir la 2e approximation $\alpha + s$;

celle-ci prise pour nouvelle valeur de α servira à en trouver une 3e, etc.

Il est évident qu'on peut se dispenser de prendre exactement la valeur de s, telle que la donne le calcul, et qu'on peut lui en substituer une autre moins composée, *pourvu qu'elle réponde à un point* T *compris entre* P *et* k. Ainsi en réduisant s en fractions décimales, on n'y conservera que les chiffres propres à la racine, pour ne pas compliquer inutilement les calculs suivants. Il est donc indispensable de connaître *le degré d'approximation de chaque correction.*

Or si, par le point m, qui répond à la 2e limite $Ap = \beta$, on mène une parallèle mq à la tangente MT, cette limite se trouvera dans la partie concave de la courbe, et le point k sera visiblement entre les pieds T et q. Le triangle mpq donne $pq = \dfrac{pm}{\text{tang}\, q} = -\dfrac{f\beta}{f'\alpha}$ (on met — parce que $f\beta$ est négatif) :
d'où $Aq = \beta - \dfrac{f\beta}{f'\alpha}$. Voilà donc deux limites connues, entre lesquelles tombe la racine cherchée a, savoir :

$$\alpha' = \alpha - \frac{f\alpha}{f'\alpha}, \quad \beta' = \beta - \frac{f\beta}{f'\alpha}.$$

On ne conservera pour valeur de α' que les chiffres décimaux communs à ces deux expressions ; ce sera la 2e approximation. Bien entendu que dans ces calculs, on aura soin d'affecter les quantités du signe que l'opération même détermine. L'approximation, assez lente d'abord, converge ensuite rapidement vers a, dès qu'on est parvenu à obtenir 3 à 4 chiffres décimaux de la racine. Fourier a démontré la loi de ces approximations dans son *Analyse des équations déterminées.*

Reprenons l'équ. $x^3 - 2x - 5 = 0$. Nous avons trouvé que la racine est entre 2 et 2,1 ; comme $f'x = 3x^2 - 2$, $f''x = 6x$, on voit que fx et $f''x$ sont positifs pour $x = \alpha = 2{,}1$, et qu'on devra toujours préférer les valeurs $> x$. D'ailleurs les racines de l'équ. $3x^2 - 2 = 0$ ne sont pas comprises entre $a = 2{,}1$ et $\beta = 2$. Enfin on a obtenu

$$f\alpha = +0{,}061, \quad f'\alpha = +11{,}23 \quad \text{et} \quad s = -0{,}00543 :$$

ainsi $a = 2{,}09457$. Prenons $\beta = 2{,}09 < a$ (ainsi qu'on le reconnaît, à cause de $f\beta = -0{,}050671$) ; divisons $f\alpha$ par $f'\alpha$, il vient

— 0,00451 ; ainsi la 2e limite de a est $\beta' = 2,09451$. Les quatre 1res décimales sont donc exactes, $x = 2,0945$.

Prenons ce résultat pour valeur de α, d'où $f\alpha = + 0,00054155$ (le signe + annonce que cette limite est $> a$) et $f'\alpha = 11,16204748$; le quotient est la correction 0,000048517 ; d'où $a = 2,094551483$. Pour distinguer les chiffres défectueux, faisons $\beta = 2,0945$; d'où $f\beta = - 0,00057459$; le signe — atteste que cette 2e limite est $< a$, ainsi que cela est nécessaire. Divisant par $f'\alpha$, le quotient est — 0,00005148 ; d'où $\beta' = 2,09455148$. Nous avons donc 8 chiffres décimaux exacts.

Le calcul devient long quand α est un nombre composé ; mais on peut l'abréger. L'approximation α a déjà fait connaître $f\alpha, f'\alpha$; d'où l'on a tiré la correction $s = -\frac{f\alpha}{f'\alpha}$. Pour pousser le calcul plus loin, il faut substituer à x, $\alpha_1 = \alpha + s$, dans $fx, f'x, f''x$; d'où résulte ce développement, qu'à raison de la petitesse du nombre s, on réduit aux 1ers termes :

$$f\alpha_1 = f\alpha + sf'\alpha + \tfrac{1}{2} s^2 f''\alpha, \quad f'\alpha_1 = f'\alpha + sf'\alpha;$$

le calcul est donc facile à achever. Dans notre ex. on a pris $\alpha = 2,1$ et l'on a obtenu $f\alpha = + 0,061$, $f'\alpha = 11,23$, $f''\alpha = 12,6$, $s = - 0,0054$: pour pousser l'approximation plus loin, il faudra poser $\alpha_1 = \alpha - 0,0054$; donc

$$f\alpha_1 = 0,061 - 0,0054 \times 11,23 + (0,0054)^2 \times 6,1,$$
$$f'\alpha_1 = 11,23 - 0,0054 \times 12,6,$$

et $f\alpha_1 = 0,0005417$, $f'\alpha_1 = 11,16196$, $s' = - 0,00004853$.

541. *Méthode de Lagrange*. Ce qu'il importe avant tout de connaître pour trouver les racines d'une équ., c'est *le lieu de ces racines*, c'est-à-dire une suite de nombres entre lesquels chaque racine soit *seule renfermée* : tel est le vrai point de la difficulté. Lorsqu'on substitue pour x les nombres.... — 2, — 1, 0, 1, 2, 3,.... et qu'on trouve autant de résultats successifs de signes différents qu'il y a d'unités dans le degré n de l'équ., toutes les racines sont réelles, et le lieu de chacune est connu. Mais excepté ce cas, on reste incertain sur le nombre des racines réelles et leurs limites, parce qu'on ignore si entre les nombres qui, substitués pour x, ont donné des résultats de signes contraires, il n'y a pas 3, 5.... racines com-

prises; ou bien si entre les nombres qui donnent les mêmes signes, il n'y en a pas 2, 4.... (n° 532). Mais si l'on choisit une série de substitutions successives assez rapprochées pour qu'il ne puisse se trouver plus d'une racine intermédiaire, on sera certain que *chaque changement de signe entre les résultats accuse l'existence d'une seule racine entre les nombres substitués ; tandis qu'il n'y en a aucune entre les nombres qui donnent des résultats de même signe.*

Si deux racines a et b sont entre α et λ, les quatre nombres sont écrits ainsi par ordre de grandeurs croissantes, α, a, b, λ; d'où $\lambda - \alpha > b - a$. Donc, quand cette condition ne subsistera pas, les racines a et b ne seront pas entre α et λ. Ainsi il suffit de choisir α et λ moins écartés que ces racines, pour qu'entre α et λ il ne puisse y avoir qu'un des nombres a et b, ou qu'il n'y en ait aucun. Concluons de là que *si δ est moindre que la plus petite différence entre les racines, et que, partant de la limite inférieure* l', *on substitue les nombres* l', $l' + \delta$, $l' + 2\delta$,.... *jusqu'à la limite supérieure* l, *on obtiendra autant de résultats de signes contraires qu'il existe de racines réelles.* Chaque changement de signe indique une seule racine entre les nombres substitués; et il n'y en a aucune entre les nombres qui ont donné le même signe.

Pour obtenir ce nombre δ, formons l'équ. dont les racines sont les différences de toutes celles de la proposée prises 2 à 2 : y *désignant la différence d'une racine* x *avec toute autre racine*, on changera x en $x + y$ dans $fx = 0$; d'où

$$fx + yf'x + \tfrac{1}{2}y^2 f''y + \ldots = 0;$$

et divisant par y, on a

$$fx = 0, \quad f'x + \tfrac{1}{2}yf''x + \tfrac{1}{6}y^2 f'''x \ldots + ky^{n-1} = 0;$$

x et y sont deux inconnues. Éliminons x (n° 522), il viendra une équ. $Fy = 0$, dont l'inconnue y est la différence entre toutes les racines de la proposée; $Fy = 0$ est *l'équation aux différences*, c'est-à-dire que y est la différence entre une racine quelconque de x et toutes les autres. Ainsi le degré de cette équ. est $n(n-1)$, nombre des arrangements 2 à 2 des n racines de x.

Ces différences $a - b$, $b - a$, $b - c$, $c - b$, sont égales 2 à 2 en signes contraires; en sorte qu'on a ensemble $y = \alpha$ et $-\alpha$, et que Fy devient nul dans les deux cas : ainsi, Fy *ne doit renfermer que*

des puissances paires de y. Cela résulte aussi de ce que Fy peut être décomposé en facteurs de la forme

$$(y^2 - \alpha^2)\ (y^2 - \beta^2)\ldots.$$

On peut donc poser $y^2 = z$ sans introduire de radicaux, et on aura *l'équ. au carré des différences* $\varphi z = 0$, dont l'inconnue z est le carré de toutes les différences entre les racines de x.

542. Nous savons trouver un nombre i moindre que toutes les valeurs positives de z, (nº 512), $i < z$ ou y^2, $\sqrt{i} < y$: donc $\sqrt{i}$, ou une quantité positive moindre, pourra être prise pour la différence δ entre les nombres à substituer pour x. Comme les fonctions Fy, φz, ont les mêmes coefficients, i est aussi la limite inférieure de y, $i < y$, en sorte qu'on peut aussi prendre $\delta = i$. Comme plus δ est petit, et plus il faut faire de substitutions de l' à l, il faut prendre δ le plus grand possible, afin d'abréger les calculs. Ainsi, quand $i > 1$, on prendra $\delta = 1$; on pourra, si l'on veut, substituer les nombres naturels 0, 1, 2, 3.... Mais quand $i < 1$, on doit faire $\delta = \sqrt{i}$.

Les substitutions de nombres fractionnaires et irrationnels seront évitées ainsi qu'il suit :

1º On sait approcher de $\sqrt{i}$ à moins d'une fraction donnée, telle que $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$.... (nº 63) : on prendra donc $\sqrt{i}$ *par défaut* à moins de $\frac{1}{h}$, et on fera $\delta = \frac{g}{h}$. On choisira h de manière à ne pas descendre beaucoup au-dessous de $\sqrt{i}$, et à n'être pas un nombre trop composé.

2º Au lieu de substituer pour x, 0, $\frac{g}{h}$, $\frac{2g}{h}$, ... on rendra les racines, et par conséquent leurs différences, h fois plus grandes (nº 503), en posant $hx = t$, et il restera à substituer pour t, 0, g, $2g$, $3g$.... ou si l'on veut 0, 1, 2, 3.... Ainsi, *on sait transformer une équ. en une autre qui n'ait pas plus d'une racine comprise entre deux entiers successifs quelconques.*

Observez que i se déduit de Fy, et que φz est inutile à former. De plus, en chassant le 2ᵉ terme de $fx = 0$, (nº 506), toutes les racines sont augmentées de la même quantité ; elles conservent leurs différences : Fy se tire plus aisément de cette transformée, et reste la même.

543. Soit, par ex., l'équ. $x^3 - 2x = 5$ dont une seule racine nous est connue (p. 78) ; pour savoir si les deux autres sont réelles,

changeons x en $x + y$, d'où $3x^2 - 2 + 3xy + y^2 = 0$; éliminant x il vient (n° 522) l'équ. $y^6 - 12y^4 + 36y^2 + 643 = 0$. Pour trouver la limite inférieure de y, faisons $y^2 = \frac{1}{v}$, d'où.... $643\, v^3 + 36\, v^2 \ldots = 0$, et $v < 1 + \frac{12}{679}$, et même $v < 1$, d'où $y > 1 = \delta$. En faisant $x = -1, 0, 1, 2\ldots$ on trouvera autant de changements de signes que x a de racines réelles.

L'équ. $x^3 - 12x^2 + 41\,x - 29 = 0$ donne

$$3x^2 - 24x + 41 + (3x - 12)\,y + y^2 = 0,$$

d'où chassant x, $y^6 - 42y^4 + 441y^2 = 49$; on fait $y = \frac{1}{v}$, et il vient $49v^6 - 441v^4\ldots$, puis $v < 10$, $y > \sqrt{\frac{1}{10}}$, ou $\frac{1}{4} = \delta$;

$$\text{faisant } x = \tfrac{1}{4}\,t, \text{ on a } \quad t^3 - 48t^2 + 656t = 1856,$$

équ. qui n'a au plus qu'une seule racine entre deux nombres entiers successifs. Posons $t = 0, 1, 2\ldots$; nous verrons que t est entre 3 et 4, entre 21 et 22, entre 22 et 23 ; donc x est entre $\frac{3}{4}$ et 1, $\frac{21}{4}$ et $\frac{22}{4}$, $\frac{22}{4}$ et $\frac{23}{4}$; il existe deux racines entre 5 et 6 qui n'auraient pas été reconnues sans ce calcul. Les racines sont

$$x = 0{,}95108\ldots\; 5{,}35689\ldots\; 5{,}69203\ldots$$

De même, $x^3 - 7x + 7 = 0$ donne $y^6 - 42y^4 + 441y^2 = 49$, $v < 9$, $y > \frac{1}{9}$ et $\sqrt{\frac{1}{9}}$, $\delta = \frac{1}{3}$: on pose $x = \frac{1}{3}\,t$, etc. On reconnaît bientôt qu'il y a une racine entre -3 et $-\frac{10}{3}$, une entre $\frac{4}{3}$ et $\frac{5}{3}$, enfin une entre $\frac{5}{3}$ et 2, savoir :

$$x = -3{,}04892\ldots\; 1{,}35689\ldots\; 1{,}69203.$$

Enfin pour l'équ. $x^3 - x^2 - 2x + 1 = 0$, comme $x = 0, 1, 2$, donne les résultats $+1, -1, +1$, et qu'en changeant x en $-x$, les nombres 1 et 2 donnent des signes contraires, le lieu des trois racines est connu, et l'équ. aux différences n'est pas utile. Toutefois cette équ. est $y^6 - 14y^4 + 49y^2 = 49$, apprend que $y > 1$, $\delta = 1$, ce qui s'accorde avec ce qu'on vient de dire.

Ces calculs toujours exécutables, n'ont d'autre inconvénient que d'être d'une longueur excessive quand le degré est un peu élevé : la théorie en est claire, complète et sans exception ; mais les opérations deviennent impraticables. Il reste à pousser l'approximation plus loin, et Lagrange a encore exposé une méthode facile qui sera donnée plus tard (n° 613).

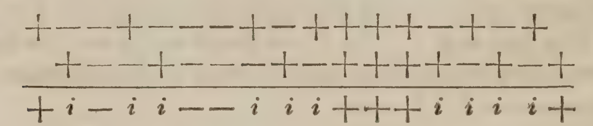
544. *Règle de Descartes.* Lorsqu'une équ. $fx = 0$ est ordonnée, on peut présumer le nombre des racines soit positives, soit négatives, à la seule inspection des signes. Nous appellerons *permanence* la succession de deux signes semblables, et *variation* celle de deux signes différents. La règle de Descartes consiste en ceci : *Toute équ. complète a* AU PLUS *autant de racines positives que de variations, autant de négatives que de permanences.*

En effet, toute équ. $fx = 0$ peut être encore considérée comme le produit d'un polynôme qui a tous ses facteurs binômes imaginaires ; par $x - a$, $x - b, \ldots$ $x + a'$, $x + b' \ldots$ facteurs correspondants aux racines réelles $a, b \ldots - a', - b' \ldots$ Voyons comment les facteurs binômes correspondants introduisent dans le produit soit des variations, soit des permanences.

Supposons, pour fixer les idées, qu'un polynôme Fx présente cette succession de signes :

$$+ - - + - - - + - + + + + - + - +.$$

Multiplions par $x + a'$ pour introduire une nouvelle racine négative $- a'$. Il faut d'abord multiplier par x, puis par a', et ajouter les deux produits qui sont composés des mêmes signes, le 2e étant reculé d'un rang à droite pour l'ordonner ; savoir :



$$\begin{array}{l} + - - + - - - + - + + + + - + - + \\ \quad + - - + - - - + - + + + + - + - + \\ \hline + \; i - i \; i - - i \; i \; i + + + i \; i \; i \; i + \end{array}$$

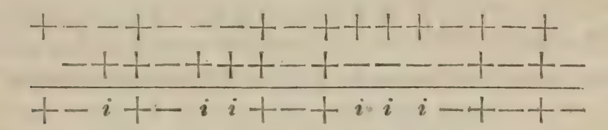
Quand les deux signes correspondants sont les mêmes, ils se conservent au produit ; le cas contraire est marqué de la lettre i, pour indiquer qu'à moins d'avoir égard à la grandeur des coefficients, le signe est *incertain.*

Comme les deux produits partiels sont composés des mêmes signes, les i ne se trouvent que là où il y avait variation : un nombre pair de variations successives donne un égal nombre de i, lesquels sont situés entre des signes semblables ; au contraire, quand la quotité des variations était impaire, les i successifs le sont aussi, entre des signes différents. Donc si l'on veut disposer de tous ces signes i *de manière à introduire le plus grand nombre possible de variations au produit*, il faudra changer tous ces i en $+$ et $-$ alternatifs ; et puisque chaque série de i est entre deux signes semblables ou diffé-

rents, selon que leur nombre est pair ou impair, il est visible qu'on ne pourra introduire plus de variations qu'on n'a de signes *i*, c'est-à-dire plus de variations que la proposée n'en contient. D'ailleurs le produit a un terme de plus ; donc *il a au moins une permanence de plus*.

Il se peut que tous les *i* ne se changent pas en variations, alors le produit aurait deux, quatre.... permanences de plus que Fx. Donc *l'introduction des racines négatives emporte celle d'au moins une permanence pour chacune.*

Multiplions maintenant Fx par $x - a$, pour introduire une racine positive a; le 2ᵉ produit partiel, reculé d'un rang à droite, est formé de signes contraires à ceux de Fx, en sorte que les *i* sont inscrits à chaque permanence :



Une succession de signes semblables dans Fx devant s'y terminer par une variation, toute série de *i* doit être comprise entre + et —. Qu'on dispose de ces *i* en les changeant tous, soit en +, soit en —, pour former *le plus grand nombre de permanences,* il n'y en aura qu'autant que dans Fx : le produit ayant un terme de plus, a donc *au moins une variation de plus*. Si tous les *i* ne se changent pas en permanences, il y a 2, 4.... variations de plus que dans Fx. Donc *l'introduction des racines positives emporte celle d'au moins une variation pour chacune.*

De là résulte le théorème énoncé *.

545. Désignons par P le nombre des racines positives d'une équ. de degré n, par N celui des négatives, par p celui des permanences, et par v celui des variations ; il est démontré que

$$1^\circ\ P = \text{ou} < v, \quad 2^\circ\ N = \text{ou} < p.$$

* Tout ceci suppose que Fx est un polynôme complet, et il sera aisé de voir que, s'il y manque quelques termes, la conséquence relative aux racines positives subsiste encore; mais on a eu raison d'observer qu'il n'en est pas de même pour les négatives ; en sorte que quand une équ. $Fx = 0$ est incomplète, et qu'on veut assigner le nombre possible de celles-ci, il faut changer x en $-x$, afin de reconnaître combien la transformée peut avoir de racines positives, nombre qui convient aux négatives de $Fx = 0$.

Or si toutes les racines sont réelles, on a

$$P + N = n,\ n = p + v,\quad P + N = v + p,$$

puisque la proposée a en tout $n + 1$ termes. Comparons P à v ; il peut arriver trois cas, $P >$, ou $<$, ou $= v$: le 1[er] est démontré impossible (1°); si le 2[e] a lieu, il faut pour que la dernière équ. subsiste, que l'on ait, par compensation, $N > p$, ce qui ne se peut (2°); ainsi $P = v$ et $N = p$. Donc *lorsque toutes les racines d'une équ. sont réelles, elle a précisément autant de racines positives que de variations, et autant de négatives que de permanences.*

546. D'après la règle de Descartes, on peut reconnaître, dans certains cas, qu'une équ. a des racines imaginaires, et se dispenser du long calcul de l'équ. aux différences.

1° Lorsque l'équ. $fx = 0$ est privée de l'un de ses termes, on le remplacera par $\pm 0x^i$, et l'on comptera les permanences et les variations dans les deux cas de $+0$, -0. Or si les termes en x^{i-1} et x^{i+1} sont de signes différents, on trouvera le même nombre des unes et des autres, ce qui indique le plus grand nombre possible des racines positives et négatives : si ces termes ont le même signe, la contradiction que présentent les deux résultats atteste l'existence de racines imaginaires. Ainsi $x^3 + 2x - 5 = 0$ étant changé en $x^3 \pm 0\,x^2 + 2x - 5 = 0$, on trouve 2 permanences et une variation, ou 3 variations à volonté ; ce qui est absurde. Donc *s'il manque un terme entre deux termes de même signe, la proposée a des racines imaginaires.*

2° *Si la proposée manque de plusieurs termes succcessifs, toutes ses racines ne peuvent être réelles :* ceci résulte de ce qu'on vient de dire.

3° Les trois variations de $x^3 - 3x^2 + 12x - 4 = 0$ font présumer l'existence de trois racines positives. Multipliant par $x + a$, il vient

$$x^4 + (a - 3)\,x^3 + (12 - 3a)\,x^2 + (12a - 4)\,x - 4a = 0.$$

Essayons d'introduire des permanences en prenant une valeur convenable de a; par ex., $a = 3\,\frac{1}{2}$ rend les quatre premiers termes positifs. La proposée a donc deux racines imaginaires, puisque sans cela, l'éq. en x^4 en aurait, à volonté, trois négatives, ou quatre positives.

4° Qu'on change x en $y + h$ et $y' + h'$; $fx = 0$ deviendra

$Fy = 0$, et $\varphi\, y' = 0$. Supposons que $\varphi\, y'$ ait quelques variations de moins que Fy : si toutes les valeurs de x sont réelles, $Fy = 0$ aura l'une de ses racines positives α qui sera devenue négative $-\alpha'$, dans $\varphi y' = 0$: d'où $x = \alpha + h = -\alpha' + h'$. Ainsi x a une racine entre h et h'. Comme il en est de même pour chaque variation qu'on a perdue, x aura autant de racines entre h et h' : si la théorie des limites prouve que toutes ces racines de x n'existent pas, on sera assuré que x en a d'imaginaires.

Par exemple, $x^3 - 4x^2 - 2x + 17 = 0$, $x = y + 2$ et $y' + 3$, donnent

$$y^3 + 2y^2 - 6y + 5 = 0, \quad y'^3 + 5y'^2 + y' + 2 = 0;$$

les deux variations qui font présumer que deux racines positives de y sont devenues négatives pour y', annoncent deux valeurs de x entre 2 et 3. Mais d'une part, la limite inférieure de y (n° 510) est $y > \frac{5}{11}$; de l'autre celle de y' est $-\frac{2}{3}$; et à cause de

$$y = y' + 1, \quad 1 - y > \tfrac{2}{3} \quad \text{et}\; y < \tfrac{1}{3}:$$

ces deux limites étant incompatibles, on en conclut que x a deux racines imaginaires. Si ces limites étaient conciliables, on serait, il est vrai, incertain si x a deux racines entre 2 et 3; mais on aurait du moins resserré l'espace qui les renferme.

5° Si toutes les racines de l'équ. $fx = 0$ sont réelles, les carrés de leurs différences sont tous positifs; *les racines de l'équ. au carré des différences étant toutes positives, les signes ne doivent présenter que des variations.*

547. *Méthode de Fourier.* Soit une équ. de degré n, $fx = 0$; prenons-en les dérivées successives, que nous écrirons en ordre renversé, $f^{(n)}$, $f^{(n-1)} \ldots f''\ f'\ f$. Faisons dans ces polynômes $x = a$, nombre arbitraire, positif ou négatif : chacun donnera un résultat numérique dont le signe sera ou $+$, ou $-$; nous inscrirons ces signes consécutifs dans leur ordre, sous les fonctions respectives qui les ont produits, et nous aurons une ligne de signes que nous désignerons par A.

Prenant ensuite $x = b > a$, nous formerons une autre ligne de signes que nous écrirons sous les précédents, et dont nous désignerons l'ensemble B; et ainsi de suite. Comparons les *variations* de signes de ces diverses séries.

Soit φx l'un quelconque de nos polynômes. Prenons pour x trois valeurs très-voisines $a - \delta$, a et $a + \delta$; nous aurons

$$\left.\begin{aligned} \varphi(a-\delta) &= \varphi a - \delta\varphi' a + \tfrac{1}{2}\delta^2\varphi'' a - \tfrac{1}{6}\delta^3\varphi''' a \ldots \\ \varphi a &= \varphi a \\ \varphi(a+\delta) &= \varphi a + \delta\varphi' a + \tfrac{1}{2}\delta^2\varphi'' a + \tfrac{1}{6}\delta^3\varphi''' a \ldots \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Nous supposons δ très-petit, et que φa n'est pas nul ; ces trois résultats ont le signe de φa, attendu que le 1er terme l'emporte sur ceux qui suivent et ont un signe contraire au sien. Donc *lorsqu'on fait croître insensiblement* x, *chacune de nos fonctions* $f^{(n)} \ldots f''\ f'\ f$ *conserve son signe propre, tant qu'elle ne devient pas nulle.*

Mais si a est racine de l'équ. $\varphi x = 0$, les séries (1) perdent leur 1er terme ; et les résultats prennent les signes du terme suivant $\mp\delta\varphi' a$: c'est-à-dire que tant que $x < a$, le signe de φx est celui du produit $-\delta \times \varphi' a$, c'est-à-dire contraire à celui de $\varphi' a$; tandis que pour $x > a$ le signe devient celui de $\varphi' a$; les deux signes sont donc différents pour ces deux résultats. Donc *celle de nos fonctions qui passe par zéro, change aussitôt le signe des résultats qu'elle donne.*

548. Appliquons ces principes à nos polynômes $f^{(n)} \ldots f''\ f'\ f$. Si l'on y fait $x = \alpha$, les résultats formeront une suite de signes ; et si x croît par degrés insensibles, les signes de chacune resteront toujours les mêmes, jusqu'à ce qu'on tombe sur une valeur $x = a$, qui rende nulle quelqu'une de ces fonctions qui sera désignée par φx ; car alors pour celle-ci seulement le signe sera changé. On aura donc l'une de ces deux dispositions :

	$f^{(n)} \ldots$	φ'	φ	$\ldots$	ou	$f^{(n)} \ldots$	φ'	φ	$\ldots$
$x < a$	$\ldots$	$+$	$-$	$+ \ldots$		$\ldots$	$+$	$-$	$- \ldots$
$x = a$	$\ldots$	$+$	0	$+ \ldots$		$\ldots$	$+$	0	$- \ldots$
$x > a$	$\ldots$	$+$	$+$	$+ \ldots$		$\ldots$	$+$	$+$	$- \ldots$

une variation, qui existait dans les signes, se trouve ensuite remplacée par une permanence, quand φx *a passé par zéro :* tous les autres signes sont d'ailleurs les mêmes avant qu'après $x = a$.

Mais il faut encore considérer les signes de la colonne qui est à droite de φ. Quand ils sont les mêmes que pour φ', la suite donnée par $x < a$ a une seconde variation, tandis que celle qui provient de $x > a$ a une permanence; d'où l'on voit que *deux variations ont disparu ensemble.* Mais si le signe commun aux termes qui suivent φ

est contraire à celui de φ', la 1re série a une variation et une permanence, et la 3e une permanence et une variation, en sorte que *aucune variation n'est disparue, mais la variation est seulement reculée d'un rang à droite.* Au delà de $x = a$, en continuant de faire croître x insensiblement, la nouvelle série de signes se conservera, jusqu'à ce qu'on rencontre quelque fonction qui devienne nulle ; et ainsi de suite.

Ceci ne s'applique qu'en partie à la fonction fx, attendu qu'elle n'est suivie d'aucun signe. Si donc $x = a$ est racine de $fx = 0$, il faut supprimer tous les signes qui sont à droite de φ, et l'on voit que *dans le passage par une racine* a *de l'équ.* fx $= 0$, *il disparaît une seule variation.*

549. Examinons le cas où deux dérivées successives sont nulles ensemble pour $x = a$, savoir, $\varphi' a = 0$, $\varphi a = 0$: alors les séries (1) deviennent

$$\left.\begin{array}{r} \varphi(a - \delta) = \frac{1}{2}\delta^2\varphi'' a - \frac{1}{6}\delta^3\varphi''' a + \text{etc.} \\ \varphi a = 0 \\ \varphi(a + \delta) = \frac{1}{2}\delta^2\varphi'' a + \frac{1}{6}\delta^3\varphi''' a + \text{etc.} \end{array}\right\} \quad (2)$$

Les signes des résultats étant ceux du 1er terme, sont les mêmes que celui de $\varphi'' a$, tant pour $x < a$, que pour $x > a$; et pour le second zéro répondant à φa, le signe de $\varphi'' a$ reparaît. Mais φ' et φ'' sont dans le même cas qu'étaient φ et φ' ci-devant : et en effet $\varphi'(a \mp \delta) = \varphi' a \mp \delta\varphi'' a + \text{etc.}$, se réduit à $\mp \delta\varphi'' a + \text{etc.}$ à cause de $\varphi' a = 0$; ainsi pour $x < a$, on a un signe contraire à celui de φ'', et pour $x > a$, le signe de φ''. Voici donc les tableaux des deux systèmes :

					ou					
$f^{(n)} \ldots$	φ''	φ'	φ	...		$f^{(n)} \ldots$	φ''	φ'	φ	.....
$x < a$	+	−	+	+		.....	+	−	+	−. . .
$x = a$	+	0	0	+		.....	+	0	0	−. . .
$x > a$	+	+	+	+		.....	+	+	+	−. . .

ainsi on a dans le 1er cas deux variations, et dans le dernier deux permanences, et l'*on perd deux variations quand* φx *et* φ'x *passent ensemble par zéro.* Nous n'examinons pas ici quels sont les signes de la colonne à droite, puisqu'étant tous trois les mêmes, il est indifférent qu'ils soient + ou −.

On n'appliquera pas ceci au cas où la fonction φ serait f, parce

que l'équ. $fx = 0$ aurait des racines égales, si l'on avait aussi $f'x = 0$, et nous supposons fx dégagé de facteurs égaux (n° 521).

Si trois fonctions successives sont nulles pour $x = a$, savoir, φ, φ' et φ'', le même raisonnement prouve que $x < a$ a 4 ou 3 variations, selon le signe de la colonne suivante, tandis que pour $x > a$, on n'a aucune variation ou une seule : en sorte qu'il disparaît 4 ou 2 variations.

	$f^{(n)}$. . . .	φ'''	φ''	φ'	φ. . .	ou	$f^{(n)}$. . .	φ'''	φ''	φ'	φ. . . .		
$x < a$	. . . . .	+	−	+	−	−	. . . .	+	−	+	−	+	. .
$x = a$	. . . . .	+	0	0	0	−	. . . .	+	0	0	0	+	. .
$x > a$	. . . . .	+	+	+	+	−	. . . .	+	+	+	+	+	. .

Quand $x = a$ rend nulles 4, 5.... fonctions successives, les développements (1) perdent autant de termes initiaux, et le 1er terme est affecté de + si ce nombre de zéros est pair, et de ∓ s'il est impair. Chaque zéro répond à une variation pour $x < a$, et à une permanence pour $x > a$, et *les variations disparaissent toujours par couples.* Il en faut conclure que s'il y a z zéros consécutifs, il disparaît z variations quand z est pair, et $z \pm 1$ quand z est impair, en prenant + quand le signe qui précède ces zéros est le même que celui qui les suit, et — dans l'autre cas.

Dans l'ex. suivant, on suppose donnée la série de $x = a$; la première s'obtient en mettant au-dessus de chaque zéro un signe contraire à celui qui est à sa gauche; et la troisième en répétant au contraire ce même signe; de manière à former autant de variations pour $x < a$, et de permanences pour $x > a$: on conserve les signes dans les colonnes exemptes de zéros,

$x < a$	+	+	−	+	−	+	−	−	+	−	+	+	+	8 *vari.*
$x = a$	+	+	0	0	0	0	−	−	0	0	0	+	+	
$x > a$	+	+	+	+	+	+	−	−	−	−	−	+	+	2 *vari.*

Six variations sont perdues dans le passage par $x = a$. Cette pratique est appelée *règne du double signe :* nous en ferons un fréquent usage.

550. En partant de $x = a$ et qui donne une série de signes, faisons croître x par degrés continus : les résultats conserveront leurs signes tant qu'on ne tombera pas sur une valeur $x = a$, qui rende nulle quelqu'une des fonctions $f^{(n)}$.... f'' f' f. Si c'est fx qui est

$= 0$, par cette valeur, il disparaîtra une variation seule. Mais si c'est quelque dérivée qui est nulle, ou il partira deux variations, ou du moins une variation sera déplacée vers la droite. Il pourra disparaître à la fois 2, 4, 6 . . . . variations, parce que plusieurs dérivées successives seraient nulles ensemble. Mais lorsque x reçoit les valeurs r, r', r''. . . . des racines de l'équ., $fx = 0$, les variations partent une à une, tandis que les racines des équations $f'x = 0$, $f''x = 0$ . . . . les laissent subsister, ou les font disparaître 2 à 2. Mais *jamais une variation perdue ne peut reparaître dans la suite des valeurs croissantes qu'on attribue à* x.

Aucune de nos fonctions φ ne peut passer par zéro, qu'autant que le résultat de la substitution, dans cette fonction, d'un nombre un peu moindre que la racine de $\varphi x = 0$, donnerait un signe contraire à celui qui le précède, afin que cette variation se puisse changer en une permanence immédiatement au delà de cette racine.

Comme le 1er terme des polynômes $f^{(n)}$.... f'', f', f est alternativement de degré pair et impair, si l'on fait $x = -\infty$, ou seulement $x =$ la limite $-l'$ des racines négatives de $fx = 0$, $f'x = 0$, etc., on n'obtiendra que des résultats $+$ et $-$ successifs, ou n variations, parce que le 1er terme l'emportera sur ceux de signes contraires qui le suivent. Si l'on fait $x = +\infty$, ou $=$ la limite l des racines positives, on n'aura que des $+$. Ainsi, en faisant croître x insensiblement depuis $-l'$ jusqu'à $+l$, toutes les variations seront disparues. Réciproquement deux nombres $-l'$ et $+l$ qui ne donnent l'un que des variations, l'autre que des permanences, sont les limites entre lesquelles toutes les racines des équations $fx = 0$, $f'x = 0$, etc., sont comprises. Car chaque racine de l'une de ces équ. devant chasser une seule variation, on ne peut trouver, hors de ces limites, aucun nombre qui produise cet effet. C'est donc une preuve que tout nombre l qui rend nos polynômes f, f', f''.... positifs, est limite supérieure des racines de l'équ. $fx = 0$, et le théorème du nº 510 reçoit une démonstration nouvelle et plus étendue.

Soit $2i$ le nombre des racines imaginaires de $fx = 0$, $n - 2i$ celui des racines réelles, qui sont entre $-l'$ et l. Quand on fera passer x graduellement de $-l'$ à l, les n variations de la 1re série de signes disparaîtront jusqu'à la dernière. Et puisque les racines réelles r, r', r''.... chassent les variations une à une, les $2i$ autres variations seront chassées, par couples, en rendant nulles les diverses dérivées f', f''.... Ces dernières substitutions sont donc les

indicateurs de l'existence des racines imaginaires, et en accusent la quotité.

551. Ce qui précède démontre le théorème de la *règle des signes de Descartes* avec plus d'étendue. Faisons $x = 0$, et la ligne des signes *sera composée des signes successifs de* fx ; car chaque fonction est réduite à son dernier terme, qui, comme on sait, est le produit par 1 . 2 . 3 .... des coefficients respectifs de fx pris en ordre rétrograde. Cette suite de signes donnée par $x = 0$ a les mêmes variations et permanences que fx. Soit v le nombre des 1[res], et $n - v$ celui des autres. Passons de $x = 0$ à $x = + l$; la 1[re] série perdra ses v variations, et si $fx = 0$ n'a que des racines réelles, cette équ. en a v positives. De même, posant $x = - l'$, comme on n'a que des variations (en nombre n), on perdra donc $n - v$ variations en passant de $- l'$ à 0; il y a donc $n - v$ racines négatives, autant que fx a de permanences. Mais si la proposée a des racines imaginaires, comme il disparaîtra par couples des variations qui en sont les indications, on voit que *toute équation qui n'a que des racines réelles, a précisément autant de variations que de racines positives, et autant de permanences que de racines négatives* *. *Et s'il existe des racines imaginaires, il y aura* v — 2i *racines positives, et* p — 2i' *négatives,* v *étant le nombre des variations et* p *celui des permanences du polynôme* fx, i *et* i' *des nombres entiers.*

552. Notre théorie démontre que si l'on substitue pour x deux nombres a et b dans toutes nos fonctions, et qu'on écrive les signes des résultats en deux séries correspondantes A et B, b étant $> a$,

1° Il n'y aura jamais plus de variations dans B que dans A;

2° Si le nombre des variations est le même dans A et B, la proposée n'a aucune racine entre a et b;

3° Si la série B a une variation de moins que A, il y a une seule racine entre a et b;

4° S'il y a deux variations de moins dans A que dans B, ou la proposée a deux racines réelles entre a et b, ou ces racines manquent et sont remplacées par deux imaginaires ; il restera à distin-

* *Si l'équ.* fx = o *est privée d'un de ses termes, et si les deux termes entre lesquels celui-ci manque ont mêmes signes, cette équ. a des racines imaginaires.* En effet le polynôme fx comprend les termes $qx^h + sx^{h-2}$, et lorsqu'on fait $x = a$ dans toutes les dérivées, la série des signes consécutifs contient + o +, qui est équivalente à $+ \overset{-}{\underset{+}{o}} +$, caractère qui annonce l'existence des racines imaginaires. V. p. 92.

guer l'un de ces cas de l'autre. Dans le 1er, on pourra séparer les racines, en substituant des nombres intermédiaires qui chassent les variations une à une, ce qui serait impossible dans le deuxième cas;

5° Lorsque la série B a trois variations de moins que A, ou il existe trois racines réelles entre a et b, ou il n'y en a qu'une seule, les deux autres étant remplacées par des imaginaires. Des procédés spéciaux feront reconnaître ces circonstances.

Et ainsi de suite;

6° La valeur de x qui, sans être racine de l'équation $fx = 0$, fait perdre deux variations, en passant par voie de continuité de a à b, se rapporte aux racines imaginaires de cette équ. et en est l'indication; elle rend nulle quelqu'une des dérivées, les signes de la précédente et de la suivante étant les mêmes; deux de ces fonctions successives peuvent aussi être annulées ensemble. S'il disparaît 4 variations, parce que 3 ou 4 fonctions dérivées consécutives sont nulles, il y a deux couples d'imaginaires pour l'équ. $fx = 0$. Enfin, autant les séries perdent de fois 2 variations, *les substitutions suivant la loi de continuité*, autant la proposée a de couples de racines imaginaires.

553. Comme la substitution des nombres continus n'est pas possible, pour faire usage de cette théorie, il faut opérer ainsi qu'il suit:

1° On substitue des nombres pris à volonté, qu'on étendra depuis celui l' qui ne donnera que des $+$ et $-$ alternatifs, jusqu'à celui l qui ne donnera que des $+$; ces nombres l' et l seront les limites entre lesquelles toutes les racines sont comprises. Entre eux, il y a souvent de grands intervalles qui n'interceptent aucune racine et qu'il convient de dépasser; des essais faits sur des nombres pris au hasard conduisent aisément à éviter des calculs inutiles;

2° Lorsque deux séries A et B sont formées des mêmes signes, aucun des polynômes $f, f', f''\dots$ ne peut devenir zéro par une valeur de x entre a et b. L'une de ces fonctions devient nulle, quand une variation est déplacée vers la droite; et s'il n'y a que déplacement, le nombre qui le produit n'accuse l'existence d'aucune racine imaginaire de l'équ. $fx = 0$. Cette équ. aurait deux racines imaginaires, s'il disparaissait deux variations pour une valeur de x qui annulerait quelque dérivée;

3° Quand en partant de a, on perd jusqu'à b un nombre impair

de variations, il est évident que fa et fb ont des signes différents : le signe est le même, quand il disparaît un nombre pair de variations. Nous retrouvons donc ce théorème, qu'il y a un nombre pair ou impair de racines entre a et b, selon que les résultats fa et fb ont un signe semblable ou différent, zéro étant au rang des nombres pairs ;

4° Lorsqu'en faisant $x = a$, la suite de signes A contient un terme nul, ou plusieurs zéros successifs, on formera les séries $a - \delta$ et $a + \delta$ selon la règle des doubles signes, p. 92, la 1[re] sera comparée à la série qui précède A, pour indiquer les racines $< a$, et la seconde à celle qui suit A pour faire connaître les racines $> a$; enfin, en comparant les deux séries de $a - \delta$ et $a + \delta$, on saura combien de racines imaginaires sont attestées par le nombre pair de variations perdues de l'une à l'autre.

Par ex., $fx = x^5 + x + 1$, $f' = 5x^4 + 1$, $f'' = 20x^3$, etc., donnent le tableau qui suit, où l'on a fait usage de la règle du double signe pour chaque résultat nul.

	f^{v}	f^{iv}	f'''	f''	f'	f	
$x = -1$	+	−	+	−	+	−	5 *vari.*
$x = 0$	+	$\overset{-}{\underset{-}{0}}$	$\overset{+}{\underset{+}{0}}$	$\overset{-}{\underset{+}{0}}$	+	+	4 ou 0 *vari.*

on voit qu'il existe une racine réelle entre -1 et 0, et que les 4 variations qui disparaissent de $x < 0$ à $x > 0$ annoncent 4 racines imaginaires. La courbe dont l'équ. est $y = fx$ est celle de la figure 12.

Pour $fx = x^4 - 4x^3 - 3x + 23$, $f'x = 4x^3 - 12x^2 - 3$

$$f'' = 12x^2 - 24x,\quad f''' = 24x - 24,\quad f^{iv} = 24$$

	f^{iv}	f'''	f''	f'	f	
=	+	−	$\overset{+}{\underset{-}{0}}$	−	+	2 ou 4 *vari.*
$x = 1$	+	$\overset{-}{\underset{+}{0}}$	−	−	+	2 *vari.*
$x = 2$	+	+	$\overset{-}{\underset{+}{0}}$	−	+	2 *vari.*
$x = 3$	+	+	+	−	−	1 *vari.*
$x = 4$	+	+	+	+	+	0 *vari.*

Il y a deux racines imaginaires qui chassent deux variations de $x<0$ à $x>0$; les zéros qu'on rencontre à $x=1$ et 2 ne font partir aucune variation, ce qui vient de ce que *chaque zéro est entre deux signes différents*. Enfin, il y a une racine entre 2 et 3, puis une entre 3 et 4 : il restera à en pousser l'approximation. La courbe $y=fx$ est représenté fig. 20, par MOM'.

554. Lorsqu'il n'existe qu'une seule racine entre deux nombres a et b, et par conséquent qu'on ne perd qu'une variation de la série A à B, on approche de cette racine par la méthode de Newton. Mais avant il faut satisfaire aux conditions que cette méthode prescrit (p. 80), savoir que f' et f'' ne changent pas de signes de a à b; c'est-à-dire qu'il faut que la variation perdue soit précisément dans la dernière colonne f. Tous les signes de A et B sont alors les mêmes, excepté le dernier. C'est ce qui arrive pour la racine qui est entre 2 et 3 dans l'ex. précédent.

Mais si la variation est perdue avant le dernier terme des séries, f' et f'' ne sont plus dans la condition exigée. Il faut substituer des nombres intermédiaires à a et b, afin qu'en resserrant l'espace qui contient la racine, il n'y ait plus ni inflexion, ni tangente horizontale à la courbe $y=fx$, dans cette étendue, et qu'on retombe sur le 1er cas.

Ainsi dans le dernier ex., pour approcher de la racine qui est entre 3 et 4, il faut rejeter hors des limites le minimum qui est attesté par le changement de signe de f'. On pose l'équ. $f'x=0$, et on trouve que la seule racine réelle est entre 3 et 3,1. Comme celle de $fx=0$ est entre 3,1 et 4, qu'il faut que f' et f'' soient de même signe, on fera $x=4$, d'où $f'=61$, $f=11$, $S=-0,2$, et $x=3,8$, pour 1re approximation. Faisant $x=3,8$, d'où $f'=43,208$, $f=0,6256$, $S=-0,01448$, on trouve $x=3,78552$; et ainsi de suite. S est la sous-tangente.

555. Quand on perd deux variations de A à B, il reste à reconnaître s'il y a en effet deux racines entre a et b. Cette discussion sera divisée en trois cas.

On comparera, de gauche à droite, les signes correspondants des deux séries; dès qu'on rencontrera deux signes contraires sous la même fonction, une variation sera remplacée par une permanence : plus loin, on trouvera une seconde variation perdue. Si cela arrive avant la colonne des signes de fx, ce sera le 3e cas, traité ci-après : et si la seconde variation n'est perdue qu'au der-

nier signe, on trouvera les deux systèmes suivants, où l'un perd les deux variations dans les trois derniers signes ; dans l'autre, la 1re variation est perdue avant f''.

	1er CAS * . . .	f''	f'	f	2e CAS	f'''	f''	f'	f
$x = a$ . . .	+ + −	+	−	+	+ + ...	+	−	−	+
$x = b$ . . .	+ + −	+	+	+	+ + ...	+	+	+	+

Construisons la courbe parabolique MOM' (fig. 19) dont l'équ. est $y = fx$, entre les abscisses $AP = a$, $AP' = b$.

556. 1er CAS. $f'a$ et $f'b$ sont de signes contraires ; ce sont les valeurs des tangentes des angles T et T' que font, avec l'axe des x, les droites MT, $M'T'$ qui touchent la courbe aux points M et M', dont les abscisses sont a et b. On voit que l'un de ces angles est aigu vers la droite, et l'autre obtus. Comme l'équ. $f'x = 0$ ne perd qu'une seule variation, elle n'a qu'une racine entre a et b, c'est-à-dire que la courbe $y = fx$ a une tangente en un point intermédiaire O, parallèle aux x. $f''x$ ne perd pas de variation et reste positif dans l'intervalle ; ainsi l'arc tourne sa concavité vers le haut (n° 528). Les fig. 19 et 20 représentent la forme de cette partie de l'arc, qui a en O un point de passage, pour $f'x$, du positif au négatif, par zéro.

Si la courbe atteint l'axe dans l'intervalle PP' (fig. 20), il y a deux racines réelles Ak, Ak' : ces racines sont imaginaires dans le cas contraire (fig. 19), et alors les tangentes aux divers points de l'arc MOM' s'inclinent de plus en plus sur l'axe de M en O, où le parallélisme a lieu, puis se relèvent en sens opposé vers M'. La nature concave de l'arc fait qu'il reste compris dans l'angle formé par les deux tangentes en M et M'. On voit donc que, si le sommet B (fig. 19) de cet angle est situé au-dessus de l'axe, la courbe ne peut le couper, et les racines sont certainement imaginaires entre P et P'.

Or les sous-tangentes en M et M' sont

$$PT = S_1 = -\frac{fa}{f'a}, \quad P'T = S_2 = -\frac{fb}{f'b}. \quad . \quad . \quad (1)$$

* Les valeurs de fa et fb peuvent être négatives ensemble, c'est-à-dire que les signes peuvent tous être contraires à ceux qui sont indiqués ici : mais ce cas n'exige pas un examen spécial, et il suffit de tourner les fig. 19 et 20 de l'autre côté des x, par une révolution autour de l'axe, afin de rabattre les fig. en dessous. Tout est alors semblable à ce qui a été exposé dans le texte.

La 1re est positive, $f'a$ ayant le signe $-$, et la 2e négative. Il est clair que si l'on fait abstraction des signes, et que *l'une des sous-tangentes ou leur somme, égale ou surpasse l'intervalle* b — a, *les deux racines présumées sont imaginaires.*

Et si cette circonstance n'a pas lieu, on demeure incertain sur la nature des racines qui peuvent alors être réelles ou imaginaires, la courbe pouvant couper l'axe, ou ne pas le rencontrer, entre P et P'. On doit, dans ce cas, opérer de l'une ou de l'autre manière suivante :

On regardera les limites a et b comme trop écartées pour décider la question, et prenant $x =$ quelque nombre intermédiaire a', on verra si la série des signes, comparée à A et B, fait disparaître les variations une à une ; car alors les racines seraient réelles, l'une entre a et a', l'autre entre a' et b. Et si la double variation se perd encore entre a et a', on calculera la sous-tangente pour $x = a'$, afin de vérifier si la règle précédente a lieu.

Ou bien, on opérerait comme si l'on était assuré que les racines intermédiaires sont réelles, et qu'on voulût en approcher davantage, par la méthode de Newton ; car alors on serait conduit à deux nouvelles sous-tangentes, dont la somme pourrait excéder $b - a$.

Comme à mesure qu'on approche du minimum O, les tangentes approchent d'être parallèles à l'axe, les sous-tangentes deviennent très-grandes, et la règle ci-dessus est plus propre à se vérifier. On comprend que si les racines sont imaginaires, on ne tarde pas à les reconnaître par leurs sous-tangentes dont la somme est $> b - a$.

Au contraire, quand les deux racines sont réelles, les sous-tangentes n'augmentent plus indéfiniment ; on voit converger chaque valeur de x vers deux termes qui sont les racines demandées Ak, Ak' ; et il devient très-facile de trouver une grandeur moyenne qui, substituée pour $\bar{x}$, sépare ces deux racines.

557. 2e CAS. Lorsque fa et $f''a$ sont de signes contraires, la question est d'une autre nature. $f''a$ et $f''b$ ayant des signes différents, et passant par zéro dans l'intervalle (comme f'' perd une variation, $f''x = 0$ a une racine entre a et b), l'arc est convexe vers le haut en m (fig. 19) à la 1re limite $Ap = a$, et concave à la 2^e $AP' = b$: et dans cet espace, il existe un point d'inflexion I, dont l'abscisse Aq est racine de $f''x = 0$. Les sous-tangentes ne lèvent plus alors la difficulté, puisque la tangente mt ne peut se prêter aux conditions prescrites ci-dessus. Il faut d'abord resserrer l'intervalle, pour

que l'inflexion I n'y soit pas comprise. On substituera donc pour x une autre valeur intermédiaire a', propre à séparer les deux racines, hors de l'étendue où est le point I, ce qui ramènera les choses au premier cas.

Il se pourrait cependant que la courbe eût la figure MIM' (fig. 5) où l'inflexion est précisément au point où la tangente est horizontale : on tenterait alors vainement de resserrer assez l'intervalle pour éviter que les f'' fussent de signes différents. Mais comme f' et f'' sont nuls ensemble, les équ. $f'x = 0$, $f''x = 0$, ont alors une racine commune ; c'est un cas de racines égales. Les racines cherchées seraient imaginaires, à moins que l'inflexion I ne fût le point même de section de la courbe avec l'axe, ce qui supposerait en même temps $fx = 0$, et par conséquent la proposée aurait des facteurs égaux.

558. 3[e] cas. La comparaison des suites A et B manifeste la perte de deux variations, avant d'atteindre la dernière colonne. Que ce soit, par ex., dès f''' que la 2[e] variation disparaît : on se proposera de traiter l'équ. $f'''x = 0$, et on cherchera si elle a deux racines entre a et b. Si ces racines n'existent pas, l'équ. $f''x = 0$ a aussi deux racines imaginaires indiquées par les deux variations perdues, puisque la tangente à l'arc de courbe dont l'équ. est $y = f''x$, ne peut être horizontale entre a et b attendu que $f'''x$ n'y est pas nulle ; cet arc n'a donc pas de maximum dans l'intervalle. On reconnaît de même que les équ. $f'x = 0$, $fx = 0$, ont aussi deux racines imaginaires correspondantes.

Mais si les deux racines de $f'''x = 0$ sont réelles entre a et b, la courbe $y = f''x$ a deux tangentes horizontales dans cet espace, et affecte la fig. 21, ayant un double serpentement, avec maximum et minimum. La distance de a à b est donc trop grande, et il faut la diminuer, jusqu'à ce que les inflexions n'y soient plus comprises, et que le minimum s'y trouve seul. On apprendra alors si l'équation $f''x = 0$ a deux racines réelles entre les nouvelles limites plus étroites a' et b'. De là, on cherchera si la courbe dont l'équ. $y = f'x$ a ou non deux sections avec l'axe, et ensuite s'il en est de même de la courbe $y = fx$. Il suffit que les deux racines cherchées soient imaginaires pour l'une des équ. . . . . . $f'''x = 0$, $f''x = 0$, $f'x = 0$ pour que celles qui la suivent soient dans le même cas.

Il ne faut pas oublier, dans la circonstance présente, de s'assurer si l'équ. $f'''x = 0$ a des racines égales : car notre théorie suppose

toujours que l'équ. qu'on traite est dégagée de ces racines. A cet égard, observons que la recherche des racines égales est si longue (n° 521) qu'il convient de l'éviter, et qu'on ne doit s'en occuper qu'autant que les opérations en montrent la nécessité. Comme le cas des racines égales est exceptionnel, c'est un grand avantage de la méthode de Fourier, de ne les chercher que quand, par accident, cela est reconnu indispensable.

559. Il reste à examiner ce qu'il faut faire quand il disparait plus de deux variations de a à b. On comprend qu'en rapprochant ces deux limites, il arrivera que les variations partiront soit une à une, soit deux à deux, ce qui ramènera aux cas traités ci-dessus. Cependant, il se pourrait aussi que pour une valeur de x entre a et b, plusieurs dérivées devinssent nulles, ce qui conduirait à trouver plusieurs zéros successifs dans la série de signes correspondante à quelque nombre intermédiaire inconnu a', comme cela est arrivé p. 96; il disparaîtrait alors 4 ou 6 variations à la fois, indice assuré d'autant d'imaginaires. Ce cas est facile à reconnaître, car ces dérivées ont des facteurs communs, qui égalés à zéro donnent la valeur de x qui produit ces zéros successifs, et met en évidence l'existence des racines imaginaires.

560. Appliquons ces principes à divers exemples :

I. $fx = x^3 - 5x + 3$, $f' = 3x^2 - 5$, $f'' = 6x$, $f''' = 6$.

	f'''	f''	f'	f	
$x = -3$	+	−	+	−	3 *vari.*
-2	+	−	+	+	2 *vari.*
0	+	0	−	+	2 *vari.*
		+			
$+1$	+	+	−	−	1 *vari.*
$+2$	+	+	+	+	0 *vari.*

Les trois racines de la proposée sont réelles, entre -3 et -2, 0 et $+1$, 1 et 2. La courbe est représentée fig. 11.

II. $fx = x^3 - 2x - 5$, $f' = 3x^2 - 2$, $f'' = 6x$, $f''' = 6$.

	f'''	f''	f'	f	
$x = -1$	+	−	+	−	3 *vari.*
0	+	$\overline{0}$	−	−	1 *vari.*
		+			
$+1$	+	+	+	−	1 *vari.*
$+2$	+	+	+	−	1 *vari.*
$+3$	+	+	+	+	0 *vari.*

Outre la racine réelle qui est entre 2 et 3, on en présume deux entre 0 et -1 ; mais celles-ci sont imaginaires, car on trouve pour $x = -1$ que $f' = +1$, $f = -4$, d'où $S_2 = 4$ qui est > 1.

$$\text{III. } fx = x^5 + x^3 + 2x^2 + 2,\quad f' = 5x^4 + 3x^2 + 4x.$$
$$f'' = 20x^3 + 6x + 4,\quad f''' = 60x^2 + 6,\quad f^{\text{IV}} = 120x,\quad f^{\text{V}} = 120.$$

	v	IV	'''	''	'		
$x = -2$	+	−	+	−	+	−	5 *vari.*
-1	+	−	+	−	+	+	4 *vari.*
0	+	$\overset{-}{\underset{+}{0}}$	+	+	$\overset{-}{\underset{+}{0}}$	+	0 ou 4 *vari.*

Il existe une racine entre -1 et -2 : les autres racines sont toutes quatre imaginaires, d'après la règle des doubles signes. La proposée équivaut à $(x^3 + 2)(x^2 + 1) = 0$.

$$\text{IV. } fx = x^4 - x^3 + 2x^2 - 6x + 5,\quad f' = 4x^3 - 3x^2 \text{ etc.}$$

	IV	'''	''	'		
$x = 0$	+	−	+	−	+	4 *vari.*
1	+	+	+	−	+	2 *vari.*
2	+	+	+	+	+	0 *vari.*

On présume qu'il y a deux racines entre 1 et 2 ; comme les f et f'' ont même signe $+$, et que les f' ont des signes contraires, on calcule les sous-tangentes. $x = 1$ donne $S_1 = 1$, nombre égal à l'intervalle $2 - 1$; ainsi ces deux racines manquent. Il en faut dire autant entre 0 et 1 ; car les deux variations sont perdues dès f'', et l'équ. $f''x = 0$ a visiblement ses racines imaginaires.

$$\text{V. } fx = x^3 - x^2 + 2x - 5,\quad f' = 3x^2 - 2x + 2, \text{ etc.}$$

	'''	''	'		
$x = 0$	+	−	+	−	3 *vari.*
1	+	+	+	−	1 *vari.*
2	+	+	+	+	0 *vari.*

La proposée a une racine entre 1 et 2 ; quant à celles qu'on doit chercher entre 0 et 1, elles sont imaginaires : on voit en effet que les deux variations sont perdues dès f', et que l'équ. $f'x = 0$ n'a pas de racines réelles. La courbe est celle de la fig. 12.

VI. $fx = x^3 - 3x^2 - 4x + 13$, $f' = 3x^2 - 6x - 4$, etc.

$$
\begin{array}{rl}
 & \quad\ \ ''' \ \ '' \ \ ' \\
x = -3 \ldots\ldots & + \ - \ + \ - \ 3 \ \textit{vari.} \\
-2 \ldots\ldots & + \ - \ + \ + \ 2 \ \textit{vari.} \\
+2 \ldots\ldots & + \ + \ - \ + \ 2 \ \textit{vari.} \\
+3 \ldots\ldots & + \ + \ + \ + \ 0 \ \textit{vari.}
\end{array}
$$

Outre la racine qui est entre -3 et -2, on en présume deux entre 2 et 3. On trouve

$$x = +2{,}5\ldots\ + \ + \ - \ - \ 1 \ \textit{vari.}$$

Ainsi il y a une racine entre 2 et 2,5, puis une autre entre 2,5 et 3. Comme la supposition $x = 2{,}5$ qui a mis ces racines en évidence, est due au hasard, voici comment on a dû opérer pour les reconnaître sûrement. Les f et f'' sont positifs pour $x = 2$, et les f' passent du $-$ au $+$: il s'agit de distinguer quelle est celle des formes de la fig. 20 qui convient à la courbe. On prendra les sous-tangentes aux deux limites,

$$x = 2,\ f = 1,\ f' = -4,\ S_1 = \tfrac{1}{4};\ x = 3,\ f = 1,\ f' = 3,\ -S_2 = -\tfrac{1}{3}.$$

On supposera donc $x = 2\frac{1}{4}$, et $x = 2\frac{2}{3}$. La 1[re] de ces valeurs donne $f = 0{,}2$, $f' = -2{,}3$, $S_1 = 2\frac{2}{23} = 0{,}09$, et $x = 2{,}34$: on tire de la 2[e], $f = 0{,}23$, $f' = 2{,}72$, $S_2 = 0{,}08$ et $x = 2{,}72$. On est donc conduit à prendre un nombre intermédiaire tel que $x = 2{,}5$.

VII. $fx = x^4 - \frac{4}{3}x^3 + 4x^2 - 4x + 1$

$$
\begin{array}{rll}
 & \ \ \text{IV} \ \ ''' \ \ '' \ \ ' & \\
x = 0 \ldots\ldots & + \ - \ + \ - \ + \ 1 & 4 \ \textit{vari.} \\
\tfrac{1}{3} \ldots\ldots & + \ \ 0 \ \ + \ - \ + \ 2 & \text{ou } 4 \ \textit{vari.} \\
 & \quad\ \ + & \\
\tfrac{2}{3} \ldots\ldots & + \ + \ + \ + \ - \ 1 & \textit{vari.} \\
1 \ldots\ldots & + \ + \ + \ + \ + \ 0 & \textit{vari.}
\end{array}
$$

Les limites des racines sont 0 et 1 : et comme les quatre variations disparaissent dans cet intervalle, il faut le resserrer. On fait $x = \frac{1}{3}$ et $\frac{2}{3}$. D'une part, on trouve un zéro entre deux $+$, il y a deux racines imaginaires ; de l'autre on voit qu'il y a une racine entre $\frac{1}{3}$ et $\frac{2}{3}$, puis une entre $\frac{2}{3}$ et 1.

VIII. $fx = x^5 - 6x^3 + 7x^2 - 8x + 7$

	v	IV	‴	″	′		
$x = -4$	+	—	+	—	+	—	5 vari.
-3	+	—	+	—	+	+	4 vari.
0	+	0 (+)	—	+	—	+	4 vari.
1	+	+	+	—	—	+	2 vari.
2	+	+	+	+	+	+	0 vari.

$fx = 0$ a une racine entre -3 et -4 ; on en présume deux entre 0 et 1, et deux entre 1 et 2. Pour les 1res, comme les deux variations sont perdues à f', on pose $f'x = 0$: or f' et f''' ont des signes contraires quand $x = 1$; l'intervalle doit donc être diminué. On prend $x = \frac{1}{2}$, d'où $f''' = -21$, $f'' = -1\frac{1}{2}$, $f' = -5\frac{3}{16}$, et la différence de signes de f' et f''' n'existe plus. On prend les soustangentes pour s'assurer s'il y a deux racines entre 0 et $\frac{1}{2}$; S_2 est $> \frac{1}{2}$, ce qui prouve que ces racines sont imaginaires. Celles de l'équ. $fx = 0$ le sont donc aussi.

Quant aux racines entre 1 et 2, il faut aussi diminuer l'intervalle ; on fait $x = 1\frac{1}{2}$, et comme $f = -1,9....$, tandis que pour $x = 1$ et 2, les résultats sont 1 et 3, on voit qu'il y a une racine entre 1 et $1\frac{1}{2}$, puis une autre entre $1\frac{1}{2}$ et 2.

IX. $fx = 3x^5 - 25x^3 + 90x - 127$

	v	IV	‴	″	′		
$x = -2$	+	—	+	—	+	—	5 vari.
-1	+	—	+	+	+	—	3 vari.
$+1$	+	+	+	—	+	—	3 vari.
$+2$	+	+	+	+	+	—	1 vari.
$+3$	+	+	+	+	+	+	0 vari.

On reconnaît l'existence d'une racine entre 2 et 3 ; en faisant $x = 2.5$, il vient $f = 0,34$, $f' = 207,19$, $S = -0,002$, d'où $x = 2.498....$

Quant aux autres racines, elles sont imaginaires. En effet, les variations perdues de 1 à 2, le sont dès f', ce qui conduit à traiter d'abord l'équ. $f'x = 0$. On pose $x = 1,5$, ce qui ne laisse subsister dans f' qu'une seule variation *, et sépare les deux racines réelles.

* L'équation $f'x = 15\,(x^4 - 5x^2 + 6) = 0$, se résout par le second degré, et revient à $(x^2 - 3)(x^2 - 2) = 0$; ainsi $x = \pm\sqrt{3} = \pm 1,732....$ et $= \pm\sqrt{2} = \pm 1,414....$

Il reste à savoir si celles de l'équ. $fx = 0$ sont aussi séparées. On a

	v	iv	'''	''	'		
$x = 1$	+	+	+	—	+	—	3 *vari.*
$x = 1,5$	+	+	+	—	—	—	1 *vari.*

Les conditions de signes étant remplies, on procède au calcul des sous-tangentes. On trouve $f = 53,59$, $f' = -2,81$, $S_2 = \frac{5359}{281} > 0,5$, ainsi la proposée manque des deux racines entre 1 et 2.

Pour les racines qu'on croit exister entre -1 et -2, on est encore conduit à l'équ. $f'x = 0$, qui a deux racines réelles séparées par $x = -1,6$: il vient

	v	iv	'''	''	'		
$x = -2$	+	—	+	—	+	—	5 *vari.*
$x = -1,6$	+	—	+	—	—	—	3 *vari.*
$x = -1,5$	+	—	+	+	—	—	3 *vari.*

les conditions de signes ayant lieu, on calcule la sous-tangente $S_1 = \frac{200}{37} > 0,5$. On remarque que $x = -1,5$ donnent f et f'' de signes contraires, ce qui montre que l'intervalle de $-1,5$ à -2 est trop étendue.

X. $fx = x^6 - 6x^5 + 40x^3 + 60x^2 - x - 1$

	vi	v	iv	'''	''	'		
$x = -1$	+	—	+	—	+	—	+	6 *vari.*
$-0,5$	+	—	+	+	+	—	+	4 *vari.*
0	+	—	0	+	+	—	—	3 *vari.*
1	+	0	—	0	+	+	+	2 *vari.*
2	+	+	0	—	+	+	+	2 *vari.*
3	+	+	+	+	+	+	+	0 *vari.*

Comme en omettant $x = -\frac{1}{2}$, il serait disparu 3 variations de -1 à 0, il a été nécessaire de prendre cet intermédiaire.

Les résultats zéro n'apprennent rien sur l'existence des imaginaires, parce qu'ils sont entre des signes contraires (p. 96). Il y a une racine entre $-\frac{1}{2}$ et 0, et une entre 0 et 1 ; elles sont $x = -0,13\ldots$ et $+0,12\ldots$ Venons-en aux quatre autres qu'on présume entre -1 et $-\frac{1}{2}$; et entre 2 et 3.

Les deux variations sont perdues dès f'', et il faut poser $f''x = 0$: mais on doit s'assurer avant tout si cette équ. a des racines égales, ce qui a lieu en effet, car

$$f'' = 30\ (x^2 - 2x - 2)^2, \quad f''' = 120\ (x - 1)\ (x^2 - 2x - 2).$$

La courbe dont l'équ. est $y = f''x$ touche l'axe au point dont les abscisses sont les racines de l'équ. $x^2 - 2x - 2 = 0$, savoir, $x = 1 \pm \sqrt{3}$ (*v.* la fig. 22), à cause de ces racines doubles. Si donc on prenait ces valeurs de x pour en déduire la suite de signes de nos fonctions, on trouverait deux zéros successifs, et par conséquent la règle des doubles signes montrerait qu'il disparait deux variations, quelque voisines que les deux limites soient de ces racines, qui n'étant pas communes avec $f'x = 0$, prouvent que cette dernière équ. n'a pas de racines réelles entre -1 et $-0,5$, ni entre 2 et 3 : la proposée est donc aussi dans le même cas.

XI. Pour $x^4 - 4x^3 + x^2 + 6x + 2 = 0$, $f' = 4x^3 - 12x^2$ etc.

	IV	'''	''	'		
$x = -1$	+	−	+	−	+	4 *vari.*
0	+	−	+	+	+	2 *vari.*
1	+	0	−	0	+	2 *vari.*
2	+	+	+	−	+	2 *vari.*
3	+	+	+	+	+	0 *vari.*

On pense que les racines sont par couples entre 0 et -1, et entre 2 et 3. En cherchant ces dernières, on trouve $S_1 = \frac{2}{6}$, $S_2 = -\frac{2}{12}$; la somme est $\frac{1}{2} < 1$, et on reste dans l'incertitude s'il y a deux racines intermédiaires; on a les racines approchées $x = 2,4$ et $2,8$. On substitue, et on trouve

$x = 2,4$	+	+	+	−	3,024	+ 0,0416
2,8	+	+	+	+	5,328	+ 0,2976

Ainsi $S_1 = 0,01$, $S_2 = -0,06$, $x = 2,41$ et $2,74$. Comme les soustangentes décroissent, loin d'augmenter, en approchant du minimum, on reconnaît que les racines sont réelles. On les sépare en prenant une moyenne, telle que

$$x = 2,5 \ldots + + + - -$$

ainsi deux racines réelles sont mises en évidence, et on peut procéder à l'approximation. On voit de même que les racines sont aussi réelles entre 0 et -1. La proposée a pour racines

$$x = 1 \pm \sqrt{2} = 1 \pm 1,41421\ldots, \text{ et } x = 1 \pm \sqrt{3} = 1 \pm 1,73205\ldots$$

Elle équivaut à $(x^2 - 2x - 1)(x^2 - 2x - 2) = 0$;

la courbe $y = fx$ a à peu près la forme de la fig. 13.

561. *Théorème de M. Sturm.* On procède par la méthode du commun diviseur, à la recherche des facteurs égaux de fx (n° 520), avec l'attention de *changer chaque reste de signe* avant de le prendre pour diviseur. Ainsi on divisera fx par $f'x$, puis $f'x$ par le reste changé de signe, etc. On obtiendra de la sorte une suite de polynômes de degrés décroissants, dont chacun est tour à tour dividende et diviseur, tels que *

$$fx,\ f'x, \ldots\ Fx,\ \varphi x,\ \psi x \ldots\ V. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (M)$$

Chaque terme est le reste, changé de signe, de la division des deux termes qui sont à sa gauche, et V est un nombre.

Qu'on substitue dans tous ces polynômes un nombre a quelconque pour x ; et qu'on écrive sur une ligne les signes successifs des résultats obtenus ; qu'on en fasse autant pour un autre nombre b, et qu'on place les signes des résultats en correspondance avec les premiers. Il s'agit de démontrer que, si $b > a$, *la seconde suite de signes a perdu autant de variations qu'il y a de racines de l'équ.* $fx = 0$ *entre* a *et* b. Quand les deux séries ont un égal nombre de variations, il n'existe aucune racine entre ces deux nombres.

1° Il a été démontré p. 91, que si l'on fait croître x par degrés insensibles de a vers b, tout polynôme φx donnera des résultats de même signe tant que φx ne sera pas nul ; mais si $x = \alpha$ donne $\varphi\alpha = 0$, φx change de signe ; tant que $x < \alpha$, le signe de φx est contraire à celui de $\varphi'\alpha$; mais il devient celui de $\varphi'\alpha$ quand $x > \alpha$.

2° *Deux de nos polynômes successifs* (M) *ne peuvent être nuls ensemble :* car trois fonctions successives Fx, φx, ψx, sont l'une dividende, l'autre diviseur, et la 3e reste changé de signe, savoir,

$$Fx = Q \times \varphi x - \psi x.$$

Or si l'on suppose que $x = \alpha$ donne $\varphi\alpha = \psi\alpha = 0$, on a aussi $F\alpha = 0$, c'est-à-dire que le polynôme Fx qui précède φx devient aussi nul ; et ainsi de proche en proche jusqu'à $f'x$ et fx : ainsi fx aurait des facteurs égaux contre l'hypothèse. On voit de même que $F\alpha = \varphi\alpha = 0$ donnerait $\psi\alpha = 0$, et par suite toutes les fonctions seraient nulles, ainsi que V : si $fx = 0$ est supposé dégagé de racines égales, V doit être un nombre constant.

* Le plus long de ces calculs est celui qui donne le reste de la division de fx par $f'x$, et la note de la p. 57 contient une règle qui abrége beaucoup l'opération.

3° *Tout polynôme qui devient nul est placé entre deux résultats de signes contraires ;* car si $\varphi\alpha = 0$, on a $F\alpha = -\psi\alpha$, d'où l'on voit que les trois polynômes deviennent $+ 0 -$, ou $- 0 +$. Ainsi lorsqu'on fait croître x de a vers b par valeurs continues, le passage de l'un quelconque de nos polynômes par zéro, ne change pas le nombre des variations, puisque comparant les deux suites avant et après $x = \alpha$, elles sont $+ - -$, et $+ + -$.

Mais examinons ce qui arrive pour le dernier et le 1er polynôme, car ils ne sont pas placés entre deux signes, comme les autres. V est un nombre qui conserve toujours le même signe aux résultats. Quant à fx, nous savons que si $f\alpha = 0$, le signe, qui était contraire à celui de $f'\alpha$ placé à sa droite, devient celui de $f'\alpha$; ainsi une variation s'est changée en permanence.

En continuant de faire croître x par degrés continus, $f'x$ pourra à son tour passer par zéro, et changer de signe, sans pour cela, altérer le nombre des variations, comme on l'a démontré : et dès que fx et $f'x$ se retrouveront avoir des signes contraires, fx pourra de nouveau passer par zéro, reprendre le signe qu'avait d'abord $f'x$, et perdre une nouvelle variation. Et ainsi de suite.

Cela démontre notre théorème, puisque le passage de fx par zéro produit une diminution, chaque fois, dans le nombre des variations, et que c'est le seul de nos polynômes qui amène ce résultat.

Il est d'ailleurs évident qu'on peut, sans changer ces conséquences, multiplier ou diviser l'un de nos polynômes par un *nombre positif;* ces facteurs numériques permettent d'éviter les coefficients fonctionnaires, comme dans la méthode du commun diviseur.

Voici l'usage de ce théorème. Dans tous les polynômes (M), on fera $x = 0$, ce qui donne pour chaque fonction le signe de son dernier terme ; puis $x =$ la limite supérieure l des racines positives ; cette limite donne les signes successifs du 1er terme de chaque polynôme ; attendu qu'elle revient à faire $x = \infty$. On pose ensuite $x = -l'$, limite des racines négatives, laquelle donne les mêmes signes que $x = -\infty$. On comptera les variations de chacune de ces trois suites ; si quelque résultat est zéro, on le remplacera par un $+$, ou un $-$, à volonté, ou on n'en tiendra pas compte; ce qui est indifférent, puisque ce zéro doit se trouver entre deux signes contraires. On conclura de là que la proposée $fx = 0$ a autant de racines négatives qu'on a perdu de variations en passant de $-l$ à 0, et autant de positives qu'on a perdu de variations de 0 à $+l$.

Pour séparer ces racines les unes des autres, on substituera des nombres intermédiaires, qu'on rapprochera jusqu'à ce que les variations disparaissent une à une ; et même pour opérer avec plus d'ordre, on substituera d'abord zéro pour x, puis des nombres croissants, tant positifs que négatifs, jusqu'à ce qu'on obtienne les suites de signes que produisent $+\infty$, et $-\infty$, car on aura alors atteint les deux limites, qui se présenteront ainsi d'elles-mêmes.

Prenons pour ex. $fx = x^4 - x^3 + 2x^2 - 6x + 5 = 0$, d'où

$$f' = 4x^3 - 3x^2 + 4x - 6, \quad -13x^2 + 68x - 74,$$
$$-792x + 1141, \quad +1892293$$

$x = 0$	+	−	−	+	+	2 *vari.*
1	+	−	−	+	+	2 *vari.*
2	+	+	+	−	+	2 *vari.*
4	+	+	−	−	+	2 *vari.*

aucune racine n'est donc ni négative, ni > 4 : et comme dans cet intervalle on ne perd aucune variation, les quatre racines sont imaginaires.

Pour $x^5 + x^3 + 2x^2 + 2 = 0$, on a $5x^4 + 3x^2 + 4x$, $-x^3 - 3x^2 - 5$,

$$-16x^2 + 7x - 25, \quad -3x - 19, \quad +6400$$

$x = -4$	−	+	+	−	+	+	3 *vari.*
-2	−	+	−	−	−	+	3 *vari.*
-1	+	+	−	−	−	+	2 *vari.*
-0	+	0	−	−	−	+	2 *vari.*
$+1$	+	+	−	−	−	+	2 *vari.*

Il ne peut y avoir de racines qu'entre -4 et $+1$, et comme on ne perd qu'une seule variation, il n'y a qu'une seule racine réelle, qui est entre -1 et -2.

Soit $fx = x^5 - 6x^3 + 7x^2 + 8x + 7$, d'où

$$5x^4 - 18x^2 + 14x - 8, \quad 12x^3 - 21x^2 + 32x - 35, \quad 769x^2 - \text{, etc.}$$

$x = -4$	−	+	−	+	+	−	4 *vari.*
-3	+	+	−	+	+	−	3 *vari.*
0	+	−	−	−	+	−	3 *vari.*
$+1$	+	−	−	−	+	−	3 *vari.*
$+2$	+	+	+	+	−	−	1 *vari.*

Il y a donc une racine entre -3 et -4, deux entre 1 et 2 ; les autres sont imaginaires.

Pour $fx = x^4 - \frac{4}{3}x^3 + 4x^2 - 4x + 1$, on a

$$5x^3 - x^2 + 2x - 1,\quad -5x^2 + 7x - 2,\quad -54x + 29,\quad -925$$

$x = 0$	$+ - - + -$	3 *vari.*
$\frac{1}{3}$	$+ - - + -$	3 *vari.*
$\frac{2}{3}$	$- + + - -$	2 *vari.*
1	$+ + 0 - -$	1 *vari.*

On a une racine entre $\frac{1}{3}$ et $\frac{2}{3}$, et une entre $\frac{2}{3}$ et 1 ; les deux autres sont imaginaires.

Enfin $x^4 - x^3 + x^2 + 6x + 2$ donne

$$2x^3 - 6x^2 + x + 3,\quad 5x^2 - 10x - 7,\quad x - 1,\quad +12$$

$x = -1$	$+ - + - +$	4 *vari.*
0	$+ + - - +$	2 *vari.*
1	$+ 0 - 0 +$	2 *vari.*
2	$+ - - + +$	2 *vari.*
3	$+ + + + +$	0 *vari.*

on a deux racines entre 0 et -1, et deux entre 2 et 3.

Le théorème de M. Sturm est très-remarquable, et doit faire partie des éléments d'algèbre. L'analogie qu'il a avec celui de Fourier est évidente, et les aveux de l'auteur montrent qu'il s'en est servi pour diriger ses recherches. Il reste encore à séparer les unes des autres, celles des racines qui ne sont pas isolées entre les nombres substitués, ce qui exige de nouvelles substitutions intermédiaires. Au reste, cette méthode ne donne aucune ressource pour procéder à cette séparation, ni pour approcher de plus en plus des racines.

562. *Méthode de M. Budan.* Soit fait $x = a + y$ dans l'équ. $fx = 0$; l'inconnue de cette transformée sera $y = x - a$: nous avons donné p. 42 un procédé propre à obtenir facilement cette équation. Soit de même composé des transformées en $x - b$, $x - c, \ldots$ a, b, c étant des nombres quelconques croissants. Observez que ces équ. se déduisent successivement les unes des autres; car soient $b = a + \alpha$, $c = b + \beta \ldots$, vous tirerez de la 1re transformée en y ou $x - a$, celle dont l'inconnue est

$$z = y - \alpha = x - (a + \alpha) = x - b.$$

De même, de cette dernière, vous tirerez celle dont l'inconnue est $t = z - \beta = x - c$, etc.

Admettons d'abord que toutes les racines de $fx = 0$ soient réelles ; le nombre des positives est égal à celui des variations (nº 545) ; il en faut dire autant de chacune de nos transformées. Mais si des racines sont entre 0 et a, elles rendent négatif $y = x - a$; ainsi le nombre des variations de la transformée en $x - a$ sera moindre d'autant d'unités qu'il y a de racines entre 0 et a. Donc si la proposée et sa transformée en $x - a$ ont un égal nombre de variations, il n'y a aucune racine entre o et a; il y en a une seule, si cette transformée perd une variation ; 2, 3, 4.... racines font disparaître 2, 3, 4.... variations. De même pour l'équation en $z = y - \alpha$, autant on aura perdu de variations de l'équ. en y, à celle en z, autant il y aura de racines de y entre 0 et α, c'est-à-dire autant de racines de x entre a et b, puisque $b = a + \alpha$; et ainsi de suite. Quant aux racines négatives, on change x en $-x$ dans $fx = 0$, et on cherche de nouveau les positives.

Cette conséquence n'est plus vraie quand la proposée a des racines imaginaires ; et lorsqu'on perd à la fois deux variations, on ignore si cette perte est due à l'existence de deux racines intermédiaires, ou si ces racines manquent et sont remplacées par deux imaginaires. La perte de trois variations laisse douter s'il y a trois racines ou une seule, etc.

Selon M. Budan, il faudrait alors fractionner l'intervalle pour le resserrer, afin que, s'il existe en effet deux racines intermédiaires, on puisse les séparer ; ce qu'on reconnaîtra par la perte des variations une à une. Si ces racines sont très-rapprochées, qu'elles ne diffèrent par ex. que dans les 2es décimales, ce n'est que lorsque l'intervalle entre les nombres 0, a, b, c,.... sera d'un centième, qu'on sera certain de les avoir séparées. Non-seulement ces calculs sont pénibles ; mais si les racines qu'on cherche manquent en effet, comme la séparation est impossible, on pousserait fort loin l'approximation, sans avoir jamais la preuve que ces racines n'existent pas, parce qu'elles pourraient être plus rapprochées que le degré d'approximation qu'on a obtenu. Cette objection contre la méthode est insurmontable, si ce n'est dans des cas particuliers pour lesquels M. Budan donne une solution de la difficulté, qui reste d'ailleurs entière dans tous les autres cas. Ainsi cette méthode ne peut être regardée comme satisfaisante.

Voyons maintenant comment l'auteur la fait servir à approcher les racines. De l'équ. $fx = 0$, il tire successivement toutes les trans-

formées en $x-1$, $x-2$, $x-3$,.... par le procédé de la p. 42, jusqu'à ce qu'il arrive à une équ. qui n'ait que des $+$: d'après le nombre de variations perdues, il apprend combien *il peut exister* de racines entre les nombres 0, 1, 2,.... ce qui donne l'entier contenu dans chacune. Si la transformée en $x-a$ a zéro pour dernier terme, $x-a$ est facteur de fx (n° 500); et quand plusieurs derniers termes de cette transformée sont nuls à la fois, la racine a est multiple : ce qui fait connaître toutes les racines entières inégales ou égales. Il reste ensuite à traiter à part le quotient de fx divisé par $x-a$.

Nous désignerons par (0), (1), (2),.... les transformées en $x-0$, $x-1$, $x-2$, etc.

Ainsi pour l'équ. $x^4-6x^3+16x^2-24x+16=0$, on a

$$\begin{array}{llllll}(0) \ldots\ldots & 1 & -6 & +16 & -24 & +16 \\ (1) \ldots\ldots & 1 & -2 & +4 & -6 & +3 \\ (2) \ldots\ldots & 1 & +2 & +4 & 0 & 0\end{array}$$

ainsi $(x-2)^2$ divise fx, et comme $(x-1)^2+2(x-1)+4=0$ est le quotient, et que cette équ. a ses racines imaginaires, l'équ. proposée est résolue.

Prenons $x^4-8x^2-16x-12=0$; en nous bornant aux transformées qui perdent des variations et qu'il suffit de traiter, nous avons

$$\begin{array}{lllllll}
 & (0) \ldots\ldots 1 & 0 & -8 & -16 & -12 & 1 \textit{ vari.} \\
 & (3) \ldots\ldots 1 & +12 & +46 & +44 & -51 & 1 \textit{ vari.} \\
 & (4) \ldots\ldots 1 & +16 & +88 & +176 & +52 & 0 \textit{ vari.} \\
\hline
\text{Changeant } x \text{ en } -x, & (0) \ldots\ldots 1 & 0 & -8 & +16 & -12 & 3 \textit{ vari.} \\
 & (1) \ldots\ldots 1 & +4 & -2 & +4 & -3 & 3 \textit{ vari.} \\
 & (2) \ldots\ldots 1 & +8 & +16 & +16 & +4 & 0 \textit{ vari.}
\end{array}$$

On voit qu'il existe une racine entre 3 et 4, et qu'entre -1 et -2 il peut y en avoir trois, ou peut-être une seule, sans qu'on sache lequel de ces deux cas a lieu.

Dans tous les cas, on connaît donc ainsi la partie entière a de chaque racine ; cherchons le chiffre a' des dixièmes, celui a'' des centièmes, etc. ; posons

$$x-a=\tfrac{1}{10}x',\ x'-a'=\tfrac{1}{10}x'',\ x''-a''=\tfrac{1}{10}x''',\ \text{etc.},$$

d'où $$x=a+\tfrac{1}{10}a'+\tfrac{1}{100}a''+\tfrac{1}{1000}a'''+\text{etc.}$$

Or a étant l'entier le plus grand contenu dans x, $x - a$ est < 1, d'où $x' < 10$: de même si a' est le plus grand entier contenu dans x', $x' - a'$ est < 1, et $x'' < 10$, et ainsi de suite. D'où l'on voit que les entiers $a', a'', a''' \ldots$ contenus dans $x', x'', x''' \ldots$ sont tous < 10, et composent les chiffres décimaux successifs de la valeur de x.

Lorsqu'on aura trouvé la transformée en $x - a$ qui perd une variation, et fait connaître l'entier a de la racine, on composera la transformée en x', qui consiste, d'après l'équ. $x - a = \frac{1}{10} x'$, à multiplier par 10^0, 10^1, $10^2 \ldots$ les coefficients respectifs de l'équ. en $x - a$. De cette équ. en x', on tirera les transformées en $x' - 1$, $x' - 2 \ldots$; celle en $x' - a'$ qui perd une variation (a' étant < 10) donnera le chiffre a' des dixièmes. Multipliant de nouveau les coefficients successifs de l'équ. en $x' - a'$ par 10^0, 10^1, $10^2 \ldots$ on aura l'équ. en x'', d'où l'on déduira les transformées en $x'' - 1$, $x'' - 2, \ldots x'' - a''$; celle-ci perdant une variation, $a'' < 10$ sera le chiffre des centièmes de la racine : ainsi des autres chiffres.

Observez que si, au lieu d'arrêter le calcul des transformées à celle qui a une variation de moins, on le poussait jusqu'à l'équ. en $x' - 10$, comme $x' - 10 = 10\,[x - (a + 1)]$, les coefficients de cette transformée seraient les produits par 10^0, 10^1, $10^2 \ldots$ de ceux de l'équ. en $x - (a + 1)$; ce qui donne un moyen de vérifier l'exactitude des calculs.

Ainsi, dans l'ex. précédent, si l'on supprime les transformées inutiles, on a, pour la racine entre 3 et 4,

équ. en x',	(0)	1	+	120	+	4600	+	44000	—	510000
	(6)	1	+	144	+	6976	+	113024	—	53184
	(7)	1	+	148	+	7414	+	127412	+	66961
	(10)	1	+	160	+	8800	+	176000	+	520000

On en conclut que x' est entre 6 et 7, d'où $x = 3{,}6$. L'équ. (10) étant la même que l'équ. (4) ci-dessus, dont les coefficients sont multipliés par 1, 10, 100, 1000,.... sert à vérifier les calculs. Pour trouver les centièmes de la racine, on reprendrait l'équ. (6), dont on multiplierait les coefficients par les mêmes facteurs, et on aurait l'équ. en x'', etc. C'est ainsi qu'on trouverait $x = 3{,}64575\ldots$

De même, pour la racine comprise entre -1 et -2, qui est $-1{,}64575\ldots$ Les deux autres racines sont imaginaires.

Ce mode d'approximation est général ; mais il est long, et moins

commode que d'autres, auxquels, pour cette raison, on donne la préférence. C'est aussi celui qu'on emploie pour séparer les racines, quand il s'en trouve plusieurs comprises entre deux entiers successifs : car alors les variations qu'on perdait à la fois dans le passage d'une transformée à la suivante, se trouvent ne disparaître que l'une après l'autre, lorsqu'on atteint au premier des chiffres décimaux qui n'est pas commun à ces racines. C'est ce qu'on voit sur cet exemple :

$$x^4 - 4x^3 + x^2 + 6x + 2 = 0.$$

	(0)	1	− 4	+ 1	+ 6	+ 2	2 *vari.*
	(1)	1	0	− 5	0	+ 6	2 *vari.*
	(2)	1	+ 4	+ 1	− 6	+ 2	2 *vari.*
	(3)	1	+ 8	+ 19	+ 12	+ 2	0 *vari.*
Changeant x en $-x$,	(0)	1	+ 4	+ 1	− 6	+ 2	2 *vari.*
	(1)	1	+ 8	+ 19	+ 12	+ 2	0 *vari.*

Il peut exister deux racines entre 2 et 3, et deux entre 0 et − 1. Pour s'en assurer et approcher de leurs valeurs, on fera $x - 2 = \frac{1}{10}x'$, pour trouver les racines entre 2 et 3 : il vient

(0)	1	+ 40	+ 100	− 6000	+ 20000	2 *vari.*
(4)	1	+ 56	+ 676	− 3024	+ 416	2 *vari.*
(5)	1	+ 60	+ 850	− 1500	− 1875	1 *vari.*
(7)	1	+ 68	+ 1234	− 2152	− 979	1 *vari.*
(8)	1	+ 72	+ 1444	+ 5328	+ 2976	0 *vari.*

Il y a donc deux racines de x entre 2 et 3, savoir $x = 2,4\ldots$ et $2,7\ldots$ On poussera l'approximation plus loin, en partant des équ. (4) et (7), et cherchant d'abord les centièmes, puis les millièmes.... on trouvera $x = 2,414\ldots$ et $2,732\ldots$

Pour les racines qu'on présume exister entre 0 et − 1, on prendra l'équ. (0) après avoir changé x en $-x$, et comme par accident, cette équ. est la même que (3), et conduit aux transformées ci-dessus, les fractions décimales sont les mêmes, $x = -0,414\ldots$ et $-0,732\ldots$

Voy. la note qui termine l'algèbre de M. Bourdon.

Racines imaginaires.

563. *Les opérations algébriques faites sur les binômes imaginaires*

$a + b\sqrt{-1}$, $a' + b'\sqrt{-1}$, *conduisent toujours à des résultats de même forme.* En effet :

1° L'addition donne $(a + a') + (b + b')\sqrt{-1}$. La soustraction se fait en changeant a' et b' de signe.

2° Le produit est $(aa' - bb') + (ab + a'b)\sqrt{-1}$.

3° Le quotient $\dfrac{a + b\sqrt{-1}}{a' + b'\sqrt{-1}} = \dfrac{(aa' + bb') + (a'b - ab')\sqrt{-1}}{a'^2 + b'^2}$,

en multipliant les deux termes par $a' - b'\sqrt{-1}$.

4° Le développement de $(a + b\sqrt{-1})^m$ s'obtient en faisant $(a + h)^m$, se servant de la formule 6, p. 11, et remplaçant ensuite h par $b\sqrt{-1}$. Or il est évident que les termes alternatifs où h est affecté de puissances impaires sont seuls imaginaires, et tous les autres réels ; car en formant les puissances 1, 2, 3, 4.... de $\sqrt{-1}$, on trouve une période composée des seuls termes $[\sqrt{-1}, -1, -\sqrt{-1}, +1]$ qui se reproduisent indéfiniment. Ainsi le développement a la forme $p + q\sqrt{-1}$.

5° Observez que si m est entier et positif, la série est limitée, et p et q sont des quantités finies : le même calcul est applicable aux cas où m est négatif ou fractionnaire : seulement p et q sont des développements illimités. Toujours b est facteur de q.

6° Ce cas comprend celui des extractions de racines de tous les degrés : comme celui des racines carrées revient fréquemment, nous l'examinerons à part. Pour avoir $\sqrt{(a + b\sqrt{-1})}$, posons

$$k = \sqrt{(a + b\sqrt{-1})} + \sqrt{(a - b\sqrt{-1})},$$
$$l = \sqrt{(a + b\sqrt{-1})} - \sqrt{(a - b\sqrt{-1})},$$

d'où $k^2 = 2a + 2\sqrt{(a^2 + b^2)}$, $l^2 = 2a - 2\sqrt{(a^2 + b^2)}$;

comme $\sqrt{(a^2 + b^2)} > a$, on voit que k^2 est un nombre positif, et l^2 un négatif $-g^2$; ainsi k est réel, et l a la forme $g\sqrt{-1}$. Ainsi en ajoutant ou retranchant les expressions ci-dessus, on a

$$\sqrt{(a \pm b\sqrt{-1})} = \tfrac{1}{2}(k \pm l) = \tfrac{1}{2}k \pm \tfrac{1}{2}g\sqrt{-1}.$$

La forme du binôme n'a donc pas changé. En faisant $a = 0$, et $b = 1$, on trouve $k^2 = 2$, $l^2 = -2$, d'où

$$\sqrt{\sqrt{-1}} = \tfrac{1}{2}\sqrt{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{2}\,.\sqrt{-1} = \tfrac{1}{2}\sqrt{2}\,(1 + \sqrt{-1}).$$

7° Lorsqu'on fait $x = a + b\sqrt{-1}$ dans un polynôme rationnel et entier $kx^n + px^{n-1} \ldots$, comme chaque terme se développe et a la forme $k + l\sqrt{-1}$, il s'ensuit que le polynôme a aussi cette même forme *.

8° Les mêmes opérations faites sur 3, 4,.... binômes imaginaires conduisent à une conséquence semblable.

II. Soit $x = a + b\sqrt{-1}$ une racine de l'équ. $fx = 0$: si l'on effectue les calculs, le polynôme fx prenant la forme $P + Q\sqrt{-1}$, et le résultat étant $= 0$, il est clair qu'on a $P = 0$ et $Q = 0$, puisque la partie réelle ne peut détruire l'imaginaire. Or si l'on fait $x = a - b\sqrt{-1}$ dans fx, comme Q contient toutes les puissances impaires de b, et qu'il suffit de changer ci-dessus b en $-b$, le résultat sera $P - Q\sqrt{-1}$, et par conséquent $= 0$; ainsi $a - b\sqrt{-1}$ est aussi racine de l'équation, et fx est divisible par $(x-a)^2 + b^2$, produit des deux facteurs du 1[er] degré. Donc *si une équation* $\mathrm{f x} = 0$ *a pour racine* $\mathrm{a} + \mathrm{b}\sqrt{-1}$, *elle a aussi* $\mathrm{a} - \mathrm{b}\sqrt{-1}$ *et le polynôme* fx *a le facteur du second degré* $\mathrm{x}^2 - 2\mathrm{ax} + \mathrm{a}^2 + \mathrm{b}^2$.

III. Pour former les polynômes P et Q, il suffit de changer i en $b\sqrt{-1}$ dans l'équ. p. 42 ; et supprimant le facteur b qui est com-

* Pour développer $(a + b\sqrt{-1})^h$, posez

$$a = r\cos t, \quad b = r\sin t, \quad \text{d'où } r^2 = a^2 + b^2, \quad \tang t = \frac{b}{a},$$

relations qui, dans tous les cas, donnent des valeurs réelles pour r et l'angle t ; r, ou $\sqrt{(a^2 + b^2)}$, est ce qu'on appelle *le module de l'imaginaire* $a + b\sqrt{-1}$. Par un théorème qui sera démontré n° 572, on en tire

$$a \pm b\sqrt{-1} = r(\cos t \pm \sin t \,.\, \sqrt{-1}),$$
$$(a \pm b\sqrt{-1})^h = r^h(\cos ht \pm \sin ht \,.\, \sqrt{-1}).$$

Ainsi $fx = kx^n + px^{n-1} + qx^{n-2} \ldots$ se développe sous la forme $\mathrm{P} + \mathrm{Q}\sqrt{-1}$, et on a

$$\mathrm{P} = kr^n \cos nt + pr^{n-1}\cos(n-1)t + qr^{n-2}\cos(n-2)t \ldots$$
$$\mathrm{Q} = kr^n \sin nt + pr^{n-1}\sin(n-1)t + qr^{n-2}\sin(n-2)t \ldots$$

Si $x = a \pm b\sqrt{-1}$ est racine de l'équ. $fx = 0$, on a les équ. $\mathrm{P} = 0$ et $\mathrm{Q} = 0$, qui sont équivalentes, sous une autre forme, à celles du paragraphe suivant III. Les facteurs du 2[e] degré de fx sont $x^2 - 2rx\cos t + r^2$.

Lorsque $h = \frac{1}{i}$, on a pour la racine i[e]

$$\sqrt[i]{a \pm b\sqrt{-1}} = \sqrt[i]{r}\left(\cos\frac{t}{i} \pm \sin\frac{t}{i} \,.\, \sqrt{-1}\right).$$

mun à tous les termes de Q, les équ. $P = 0$, $Q = 0$, deviennent

$$fa - \frac{b^2}{2} \cdot f''a + \frac{b^4}{2.3.4} \cdot f^{\text{iv}}a - \text{etc.} = 0,$$

$$f'a - \frac{b^2}{2.3} \cdot f'''a + \frac{b^4}{2.3.4.5} \cdot f_{\text{v}}a - \text{etc.} = 0;$$

et même ces équ. feront connaître les racines imaginaires de l'équ. quand a et b^2 seront commensurables; éliminant b^2, il suffira de traiter l'équ. finale en a par le procédé de la p. 52.

Soit, par ex., l'équ.

$$x^4 - 3x^2 - 12x + 40 = 0;$$

d'où $\quad a^4 - 3a^2 - 12a + 40 - (6a^2 - 3)\, b^2 + b^4 = 0,$

$$4a^3 - 6a - 12 - 4ab^2 = 0.$$

Éliminant b^2, on a $16a^6 - 24a^4 - 151a^2 - 36 = 0$ pour équ. finale : on obtient les racines commensurables $a = +2$ et -2, d'où $b^2 = 1$ et 4, puis $x = 2 \pm \sqrt{-1}$ et $-2 \pm 2\sqrt{-1}$: la proposée

$= [(x-2)^2 + 1]\,[(x+2)^2 + 4] = (x^2 - 4x - 5)\,(x^2 + 4x + 8).$

Soit encore $x^4 - 4x^3 + 10x^2 - 8x + 16 = 0$, d'où

$$a^4 - 4a^3 + 10a^2 - 8a + 16 - b^2\,(6a^2 - 12a + 10) + b^4 = 0,$$

$$4a^3 - 12a^2 + 20a - 8 - b^2\,(4a - 4) = 0;$$

eliminant b^2; $-4a^6 + 24a^5 - 68a^4 + 112a^3 - 97a^2 + 34a = 0$, ainsi $a = 0$ et 2, d'où $b^2 = 2$ et 4; ainsi la proposée revient à $(x^2 + 2)\,(x^2 - 4x + 8) = 0$.

Quand l'équ. finale en a n'a pas de racine commensurable, cette théorie ne fait connaître a et b que par approximation.

564. Mais il reste à démontrer que *toutes les racines imaginaires ont la forme* $\text{x} = \text{a} \pm \text{b}\sqrt{-1}$, et même que *toute équ. a une racine*. C'est à peu près ainsi qu'il suit que Legendre prouve ces théorèmes (*Théorie des nombres*, I, p. 175).

I. Si l'on change x en $x + h$ dans un polynôme fx, le développement est $fx + hf'x + \frac{1}{2}h^2, f''x \ldots$; posant ensuite $x = a + b\sqrt{-1}$, fx prend la forme $c + d\sqrt{-1}$, expression

qui n'est pas nulle, parce que nous ne supposons pas que $a+b\sqrt{-1}$ soit racine de l'équ. $fx=0$. De même, $f'x$, $f''x$,.... prennent la forme $c'+d'\sqrt{-1}$, etc. : seulement quelques-unes de ces dernières expressions peuvent être nulles. Admettons que i soit la plus basse des puissances de h dont le coefficient n'est pas nul, en sorte que fx devienne, pour $x=a+b\sqrt{-1}+h$,

$$(c+d\sqrt{-1})+h^i(c'+d'\sqrt{-1})+h^{i+1}(c''+d''\sqrt{-1}).....$$
$$=P+Q\sqrt{-1},$$

d'où
$$P=c+c'\alpha^iz^i+c''\alpha^{i+1}z^{i+1}....=0,$$
$$Q=d+d'\alpha^iz^i+d''\alpha^{i+1}z^{i+1}....=0.$$

Nous remplaçons ici h par αz, et nous supposons que .... $x=a+b\sqrt{-1}+\alpha z$, soit racine de l'équ. $fx=0$. Il est évident que ces deux équ. $P=0$, $Q=0$, qui expriment cette condition, reviennent à $P^2+Q^2=0$, puisque cette équation ne peut subsister sans reproduire les précédentes. Développant les carrés de P et Q, il vient

$$P^2+Q^2=(c^2+d^2)+2(cc'+dd')\alpha^iz^i+\text{etc.}$$

Comme on peut prendre α aussi petit qu'on veut, le terme en α^iz^i donne son signe (n° 513) à la somme de tous les termes qui suivent c^2+d^2; et prenant $z^i=+1$, ou -1, selon les cas, pour donner au 2e terme un signe contraire à celui du 1er, la somme P^2+Q^2 est $<c^2+d^2$.

Il est vrai que $cc'+dd'$ pourrait être nul ; mais alors on ferait $z^i=\pm\sqrt{-1}$; car $P+Q\sqrt{-1}$ deviendrait alors

$$c+d\sqrt{-1}\pm(c'+d'\sqrt{-1})\alpha^i\sqrt{-1}+\text{etc.}$$

d'où
$$P=c\mp d'\alpha^i\text{ etc.},\quad Q=d\pm c'\alpha^i\text{ etc.},$$
$$P^2+Q^2=c^2+d^2\mp 2(cd'-c'd)\alpha^i+....$$

ainsi on a encore $P^2+Q^2<c^2+d^2$, pour de petites valeurs de α, en prenant ici le signe contraire à celui de $cd'-c'd$.

On ne pourrait d'ailleurs avoir $cd'-c'd=0$, et $cc'+dd'=0$; car la somme des carrés de ces équ. revient à $(c^2+d^2)(c'^2+d'^2)=0$, ce qui supposerait, contre l'hypothèse, que c et d, où c' et d' sont nuls ensemble.

II. Quant à l'équ. $z^i=\pm1$, ou $\pm\sqrt{-1}$, il est aisé de la résoudre.

1° Pour $z^i = 1$, on a $z = 1$.

2° Pour $z^i = -1$, on a $z = -1$, quand i est impair.

Si $i = 2k$ est double d'un nombre impair k, $z^{2k} = -1$; on pose $z^2 = t$, d'où $t^k = -1$, et $t = -1 = z^2$, puis $z = \pm\sqrt{-1}$.

Si $i = 4k$, $z^{4k} = -1$ donne $t^{2k} = -1$, puis $t = \pm\sqrt{-1} = z^2$; donc $z = \pm\sqrt{(\pm\sqrt{-1})}$ expression qu'on sait mettre sous la forme $\alpha + \beta\sqrt{-1}$ (n° 563, 6°).

Pour $i = 8k$, $z^{8k} = -1$ donne $t = \alpha + \beta\sqrt{-1} = z^2$, et extrayant la racine, z prend la forme $\alpha' + \beta'\sqrt{-1}$, et ainsi de suite.

3° Quant aux équ. $z^i = \pm\sqrt{-1}$, soit v l'une des racines, v^2 le sera de $z^{2i} = -1$, équation qu'on sait résoudre, et qui donne $z = \alpha + \beta\sqrt{-1} = v^2$; ainsi v a encore la forme $\alpha' + \beta'\sqrt{-1}$.

III. Il est donc démontré, dans toute équ. $fx = 0$, même quand les coefficients sont imaginaires, que si l'on pose $x = a + b\sqrt{-1}$, ce qui donne $c + d\sqrt{-1}$, on sait corriger l'hypothèse en faisant $x = a + b\sqrt{-1} + \alpha z$, de manière à obtenir un développement $P + Q\sqrt{-1}$, dans lequel on a $P^2 + Q^2 < c^2 + d^2$. Partant ensuite de cette valeur corrigée de x, on en formera une seconde, par le même procédé, où $P^2 + Q^2$ aura diminué, et cela indéfiniment. Et comme ce binôme est essentiellement positif et décroissant, on le rendra ainsi autant qu'on voudra voisin de zéro ; c'est-à-dire qu'on est assuré qu'il existe une valeur $x = A + B\sqrt{-1}$ qui donnera $P + Q\sqrt{-1}$, et $P^2 + Q^2 = 0$, d'où P et $Q = 0$. 1° *L'équation* fx $= 0$ *a donc toujours une racine de la forme* a $+$ b $\sqrt{-1}$, *et par suite une* 2ᵉ, a $-$ b $\sqrt{-1}$, *et un facteur réel du* 2ᵉ *degré* $(\mathrm{x} - \mathrm{a})^2 + \mathrm{b}^2$: *cependant si* b $= 0$, *la racine est réelle et n'a plus sa conjuguée.*

2° *Toute équ. de degré pair est décomposable en facteurs réels du* 2ᵉ *degré ; il en est de même des équ. de degré impair, mais il y a en outre un facteur binôme du* 1ᵉʳ *degré.*

3° *Les racines imaginaires des équ. sont toujours conjuguées sous la forme* a $\pm$ b $\sqrt{-1}$; *et toute fonction imaginaire est réductible à cette forme ;* car en égalant cette fonction à z, on pourra, par des transpositions et élévations de puissances, chasser de cette équ. tous les radicaux (n° 577), et arriver à une équ. $fz = 0$, qui a pour racines les valeurs de la fonction proposée, racines dont la forme est $a \pm b\sqrt{-1}$.

565. La théorie qu'on vient d'exposer, permet d'approcher des racines imaginaires de l'équ. $fx = 0$; car posant $x = a + b\sqrt{-1}$

où a et b sont des nombres réels quelconques qu'il convient de prendre entre les limites connues des racines réelles, fx deviendra $c + d\sqrt{-1}$, etc. Soit y une quantité très-petite par rapport à $\sqrt{(a^2 + b^2)}$; faisons $x = a + b\sqrt{-1} + y$; nous aurons, en négligeant les puissances de y supérieures à la plus basse i,

$$f(a + b\sqrt{-1} + y) = c + d\sqrt{-1} + y^i(c' + d'\sqrt{-1}) + \text{etc.} \quad (1)$$

posons $$y^i(c' + d'\sqrt{-1}) = -m(c + d\sqrt{-1}),$$

d'où $$y^i = -m \cdot \frac{c + d\sqrt{-1}}{c' + d'\sqrt{-1}} = -m\frac{cc' + dd'}{c'^2 + d'^2} + m\sqrt{-1} \cdot \frac{cd' - c'd}{c'^2 + d'^2} \quad (2)$$

et $$fx = (1 - m)(c + d\sqrt{-1}) + \text{etc.} \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

m désigne ici une fraction positive dont la valeur arbitraire sera telle que y soit contenu plusieurs fois dans $a + b\sqrt{-1}$. Le premier terme de la valeur (3) de fx étant ainsi rendu plus petit, la tendance de fx vers 0 est accrue, et la marche de l'approximation est évidente. Le choix du nombre m laisse beaucoup de latitude, et quand la racine sera suffisamment approchée, on pourra faire $m = 1$.

Soit, par ex., l'équation $fx = x^3 + 2x^2 - 3x + 2 = 0$; prenons $x = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{-1})$, d'où $fx = \frac{1}{4}(1 - \sqrt{-1})$; on posera

$$x = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{-1} + y, \text{ avec } m = 1,$$

d'où, $\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\sqrt{-1} - y(1 - \frac{7}{2}\sqrt{-1}) = 0$, $y = 0{,}09 + 0{,}05\sqrt{-1}$

ainsi, $x = 0{,}59 + 0{,}55\sqrt{-1}$, 1re approximation;

ensuite, $-0{,}0009 + 0{,}056\sqrt{-1} - y(-0{,}5032 + 4{,}047\sqrt{-1})$

puis, $$y = -\frac{0{,}2271 - 0{,}0245\sqrt{-1}}{16{,}6302} = -0{,}0137 + 0{,}0015\sqrt{-1}$$

et $x = 0{,}5763 + 0{,}5515\sqrt{-1}$, et ainsi de suite.

Ces calculs sont plus aisés en se servant de la transformation indiquée dans la note p. 116; d'où l'on tire les expressions (1) et (2): et ensuite, quand $i = 1$, ce qui est le cas le plus ordinaire, (2) est la valeur de la correction y. Mais quand $i > 1$, on doit extraire une racine de degré i, ce qu'on fait, ainsi qu'il est expliqué dans la note citée.

CHAPITRE III.

RÉSOLUTION D'ÉQUATIONS PARTICULIÈRES.

Abaissement des Équations.

566. *On peut abaisser le degré d'une équ.* $fx = 0$, *quand on connaît une relation* $\varphi(a, b) = 0$ *entre deux de ses racines* a *et* b. Car mettons a et b pour x dans fx, nous aurons ces trois équations $\varphi(a, b) = 0$, $fa = 0$, $fb = 0$; éliminant b entre la 1re et la 3e, on a un dernier diviseur $F(a, b)$, et une équ. finale en a seul, qui doit coexister avec $fa = 0$, et avoir avec elle un commun diviseur en a; égalant ce diviseur à zéro, on trouve a; ensuite $F(a, b) = 0$ donne b. Si ce diviseur n'existait pas, la relation donnée $\varphi(a, b) = 0$ n'existerait pas.

Si l'on sait, par ex., que deux des racines x et a de l'équation $x^3 - 37x = 84$, sont telles qu'on a $1 = a + 2x$; éliminant a de $a^3 - 37a = 84$, on trouve $2x^3 - 3x^2 - 17x + 30 = 0$, qui doit avoir un commun diviseur avec la proposée. En effet, ce facteur est $x + 3$, d'où $x = -3$, puis $a = 1 - 2x = 7$; ce sont les deux racines ; la 3e est $x = -4$.

Soit $x^3 - 7x + 6 = 0$; si l'on donne encore $1 = a + 2x$, on élimine a de $a^3 - 7a + 6 = 0$, et on a $(2x^2 - 3x - 2)\, 4x = 0$, dont $x - 2$ est le commun diviseur avec la proposée ; donc $x = 2$, $a = -3$; enfin $x = 1$.

Supposons qu'on sache que 2 est la somme de deux des racines de l'équ. $x^4 - 2x^3 - 9x^2 + 22x = 22$; comme d'ailleurs $+2$ est la somme des quatre racines, les deux autres ont zéro pour somme, $a = -x$; substituant dans $a^4 - 2a^3 \ldots = 0$, on tombe sur la proposée où les signes alternatifs sont changés $x^4 + 2x^3 - 9x^2 \ldots$ ajoutant et retranchant ces deux équ. en x, il vient

$$x^4 - 9x^2 - 22 = 0, \quad 2x^3 - 22x = 0;$$

$x^2 - 11$ est facteur commun ; ainsi $x = \pm\sqrt{11}$, et par suite

$$x = 1 \pm \sqrt{-1}.$$

567. Les *équ. réciproques* sont celles dont les termes à égale dis-

tance des extrêmes, ont même coefficient ;

$$fx = kx^n + px^{n-1} + qx^{n-2} \ldots + qx^2 + px + k = 0; \quad \ldots \quad (1)$$

si α est l'une des racines, $\frac{1}{\alpha}$ l'est aussi, parce qu'en substituant ces deux valeurs et chassant les dénominateurs, on obtient des résultats identiques. *Les racines s'accouplent deux à deux par valeurs réciproques ;* de là, le nom qu'on donne à ces équ. On exprime analytiquement cette propriété par l'équ.

$$fx = x^n f\left(\frac{1}{x}\right).$$

1er CAS, *degré impair.* $n+1$ qui est le nombre des termes de l'équ. (1) est pair, et le coefficient P du terme moyen se répète : il est visible que $x = -1$ satisfait à l'équ. Ainsi -1 est la seule racine qui ne s'accouple pas avec une réciproque, parce qu'elle est elle-même sa réciproque. On divisera $fx = 0$ par $x + 1$ (procédé p. 37), et désignant le quotient par $Fx = 0$, cette équ. d'ordre pair sera réciproque, puisque ses racines sont réciproques. C'est au reste ce qu'on démontre directement ; car si l'on change x en $\frac{1}{x}$ dans l'équ. identique $fx = (x+1)\,Fx$, et si l'on multiplie par x^n, on sait que le 1er membre restera fx ; ainsi

$$x = \left(\frac{1}{x} + 1\right) x^n F\left(\frac{1}{x}\right) = (x+1)\,x^{n-1} F\left(\frac{1}{x}\right) :$$

égalant ces deux valeurs de fx, on a $Fx = x^{n-1} F\left(\frac{1}{x}\right)$, ce qui est le caractère propre aux équ. réciproques. Soit

$$3x^9 - 10x^8 + 2x^7 + 13x^6 - 8x^5 - 8x^4 + 13x^3 \text{ etc.} + 3 = 0$$

on a $$3x^8 - 13x^7 + 15x^6 - 2x^5 - 6x^4 - 2x^3 \text{ etc.} + 3 = 0$$

2e CAS, *degré pair.* Le coefficient moyen P ne se répète pas. Changeons n en $2m$ dans l'équ. (1), et divisons par x^m ; puis réunissons les termes à coefficients égaux,

$$k\,(x^m + x^{-m}) + p\,(x^{m-1} + x^{-(m-1)}) + q\,(x^{m-2} \ldots + P = 0 \ldots (2)$$

posons $z = x + x^{-1}$; une fois qu'on aura formé et résolu la trans-

formée en z, on aura x par

$$x = \tfrac{1}{2} z \pm \sqrt{(\tfrac{1}{4} z^2 - 1)}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Or, pour éliminer x, nous avons visiblement

$$(x^{i-1} + x^{-(i-1)})(x + x^{-1}) = x^i + x^{-i} + x^{i-2} + x^{-(i-2)};$$

d'où $\quad x^i + x^{-i} = (x^{i-1} + x^{-(i-1)}) z - (x^{i-2} + x^{-(i-2)})$.

Faisons successivement $i = 2, 3, 4\ldots$, il vient

$x^2 + x^{-2} = z^2 - 2 \quad , \quad x^3 + x^{-3} = z^3 - 3z,$
$x^4 + x^{-4} = z^4 - 4z^2 + 2, \quad x^5 + x^{-5} = z^5 - 5z^3 + 5z,$
$x^6 + x^{-6} = z^6 - 6z^4 + 9z^2 - 2$, etc.

En général, chacune de ces expressions est la somme des deux pré cédentes multipliées par z et par -1. On peut en déduire l'équ. générale

$$x + x^{-i} = z^i - iz^{i-2} + \frac{i(i-3)}{2} z^{i-4} - \frac{i(i-4)(i-5)}{2.3} z^{i-6}$$
$$+ \frac{i(i-5)(i-6)(i-7)}{2.3.4} z^{i-8}, \text{ etc.} \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Un terme quelconque T se tire de celui S qui le précède par la relation $T = -\dfrac{(i-2h+1)(i-2h+2)}{h(i-h)z^2} S$, h désignant le nombre de termes antérieurs à T. Nous ne démontrons pas cette théorie qui repose sur les mêmes principes que les séries de sin. et cos. d'arcs multiples (*voy.* n° 634).

Notre ex. ci-devant traité $3x^8 - 13x^7\ldots$ devient

$$3(x^4 + x^{-4}) - 13(x^3 + x^{-3} + 15(x^2 + x^{-2}) - 2(x + x^{-1}) - 6 = 0,$$

d'où $\quad 3z^4 - 13z^3 + 3z^2 + 37z - 30 = 0$

et $z = 1, 2, 3$ et $-\frac{5}{3}$; puis $x = 1 \pm 0$, $\frac{1}{2}(3 \pm \sqrt{5})$ et $-\frac{1}{6}(5 \pm \sqrt{-11})$.

L'équ. proposée du 9e degré revient donc à

$$(x + 1)(x - 1)^2 (x^2 - x + 1)(3x^2 + 5x + 3) = 0.$$

L'équ. $2x^8 - 11x^7 + 27x^6 - 43x^5 + 50x^4 - 43x^3 \ldots + 2 = 0$

donne $\quad 2z^4 - 11z^3 + 19z^2 - 10z = 0,$

et $z=0$, $\frac{5}{2}$, 2 et 1 ; puis $x=\pm\sqrt{-1}$, 1 ± 0, $\frac{1}{2}(1\pm\sqrt{-3})$, 2 et $\frac{1}{2}$; donc on a $(x^2+1)(x-1)^2(x^2-x+1)(x-2)(2x-1)=0$.

De même, l'équ.

$$x^9+x^8-9x^7+3x^6-8x^5-8x^4+3x^3\ldots+1=0$$

donne $\quad x^8-9x^6+12x^5-20x^4+12x^3-9x^2+1=0$;

d'où $\quad (x^4+x^{-4})-9(x^2+x^{-2})+12(x+x^{-1})=20$;

d'où $z^4-13z^2+12z=0$, et $z=0$, 1, 3 et -4, ainsi $x=\pm\sqrt{-1}$, $\frac{1}{2}(1\pm\sqrt{-3})$, $\frac{1}{2}(3\pm\sqrt{5})$ et $-2\pm\sqrt{3}$. L'équ. du 9e degré revient donc à

$$(x+1)(x^2+1)(x^2-x+1)(x^2-3x+1)(x^2+4x+1)=0.$$

Équations à deux termes, racines de l'unité.

568. Résolvons l'équ. $Ax^n=B$; A et B étant positifs. Soit k la racine n^e de $\frac{B}{A}$, $k^n=\frac{B}{A}$; mettant Ak^n pour B, on a $x^n-k^n=0$; faisant $x=ky$, il reste à résoudre l'équ. $y^n-1=0$, et à multiplier par k toutes les valeurs de y. *Tout nombre a donc* n *valeurs différentes pour sa racine* n^e; *on les obtient en multipliant sa racine arithmétique par les* n *racines de l'unité.*

L'équ. $Ax^n+B=0$, par le même calcul se ramène à $x^n+k^n=0$, puis à $y^n+1=0$.

Comme l'équ. $y^n-1=0$ est satisfaite par $y=1$, divisons-la par $y-1$; nous trouvons cette équ. réciproque, susceptible d'être abaissée (n° 567),

$$y^{n-1}+y^{n-2}+y^{n-3}\ldots+y+1=0. \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Si n est impair comme $y^n-1=0$ ne peut avoir de racines négatives, et que l'équ. (1) n'en a pas de positives, la proposée n'a qu'une racine réelle.

Si n est pair, $y^n-1=0$ est satisfaite par $y=\pm1$, et divisible par y^2-1; d'où $y^{n-2}+y^{n-4}\ldots+y^2+1=0$ (n° 567). Comme il n'y a dans cette équation que des exposants pairs et des termes positifs, il n'y a ni racines positives, ni négatives ; la proposée n'a donc d'autres racines réelles que $y=\pm1$. Soit $n=2m$; on a

$y^{2m} - 1 = (y^m - 1)(y^m + 1)$; et l'équ. proposée se partage en deux autres.

Par ex., $y^3 - 1 = 0$ donne $y^2 + y + 1 = 0$; d'où

$$y = 1, \quad y = -\tfrac{1}{2}(1 \pm \sqrt{-3}).$$

De même, $x^4 - k^4 = 0$ donne $y^4 - 1 = 0$; divisant par $y^2 - 1$, on trouve $y^2 + 1 = 0$; de là $y = \pm 1$, et $\pm\sqrt{-1}$; enfin $x = \pm k$, et $\pm k\sqrt{-1}$.

569. Soit α l'une des racines de l'équ. $y^n - 1 = 0$; comme $\alpha^n = 1$, on a $\alpha^{np} = 1$, quel que soit l'entier p, positif ou négatif. L'équ. $y^n - 1 = 0$ est donc satisfaite par $y = \alpha^p$; c'est-à-dire que *si α est racine, α^p l'est aussi.* De là cette suite infinie de nombres qui sont tous racines :

$$\ldots .\alpha^{-4},\ \alpha^{-3},\ \alpha^{-2},\ \alpha^{-1},\ \alpha^0,\ \alpha^1,\ \alpha^2,\ \alpha^3. \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

1° Si l'on prend $p > n$, en divisant par n, p a la forme $nq + i$, i étant $< n$; $\alpha^p = \alpha^{nq+i} = \alpha^{nq} \times \alpha^i = \alpha^i$, à cause de $\alpha^{nq} = 1$. Ainsi dès que p dépasse n, on retombe sur les mêmes valeurs, dans le même ordre : de là cette période

$$(\alpha^1,\ \alpha^2,\ \alpha^3 \ldots .\ \alpha^n). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

2° Si p est négatif, on a $\alpha^{-p} = \alpha^{n-p} = \alpha^{2n-p} = \ldots .$ à cause de $\alpha^n = 1$; l'exposant $-p$ peut donc être remplacé par $nk - p$. D'où l'on voit que les exposants négatifs reproduisent encore les mêmes nombres que les positifs, et dans le même ordre.

Les valeurs (2) *sont donc telles, que si l'on en prend une quelconque, et les* n — 1 *qui la suivent ou la précèdent, on a une période qui se reproduit indéfiniment dans les deux sens.* En outre, l'équ. $\alpha^p = \alpha^q$ est satisfaite non-seulement par $p = q$, mais encore par des valeurs de α qui supposent p et q inégaux; car, divisons par α^q, il vient $\alpha^{p-q} - 1 = 0$. Il suffit donc, pour que $\alpha^p = \alpha^q$, que α soit racine de l'équ. $y^{p-q} - 1 = 0$.

570. Il reste à savoir si les n termes de la période (3) sont en effet inégaux. Examinons s'il se peut que $\alpha^p = \alpha^q$, p et q étant $< n$; il faut que α, déjà racine de l'équ. $y^n - 1 = 0$, le soit aussi de $y^m - 1 = 0$, en faisant $p - q = m$; ce qui suppose que ces équ. ont un commun diviseur qui, égalé à zéro, donnera α. Cherchons ce facteur par la méthode accoutumée (n° 102). On divise d'abord

$y^n - 1$ par $y^m - 1$, ce qui conduit aux restes, $y^{n-m} - 1$, $y^{n-2m} - 1\ldots$, enfin $y^i - 1$, i étant l'excès de n sur les multiples de m, qui y sont contenus. Ensuite on divise $y^m - 1$ par ce reste $y^i - 1$, qui donne le reste $y^l - 1$, l étant l'excès de m sur le plus grand multiple de i, etc.; en un mot, on procède comme pour trouver le facteur commun entre n et m.

1° *Si* n *est un nombre premier,* le commun diviseur entre n et m est 1, et celui de $y^n - 1$ et $y^m - 1$ est $y - 1$; donc il n'y a que $\alpha = 1$ qui puisse rendre $\alpha^p = \alpha^q$; *tous les termes* de la période *sont inégaux;* une seule racine imaginaire α donne, par ses puissances, $\alpha^2, \alpha^3 \ldots \alpha^n$ ou 1, toutes les autres racines.

2° *Si* n *est le produit de deux facteurs premiers* l *et* h, $n = lh$; posons les équ. $y^l - 1 = 0$, $y^h - 1 = 0$, et soient β et γ des racines autres que $+1$, savoir, $\beta^l = 1$, $\gamma^h = 1$; d'où $\beta^{lh} = \gamma^{lh} = (\beta\gamma)^{lh} = 1$. Puisque β^n, γ^n et $(\beta\gamma)^n$ sont $= 1$, β, γ, et $(\beta\gamma)$ sont racines de $y^n - 1 = 0$; $(\beta, \beta^2 \ldots \beta^l)$ forment l nombres différents, qui se reproduisent périodiquement (n° 569); ainsi les n puissances de β ne forment que l nombres distincts, qui, dans $(\beta, \beta^2 \ldots \beta^n)$, reviennent h fois. De même $(\gamma, \gamma^2 \ldots \gamma^n)$ forment l périodes de h termes.

Mais $(\beta\gamma, \beta^2\gamma^2, \beta^3\gamma^3 \ldots \beta^n\gamma^n)$ sont différents et constituent la période des n racines cherchées. En effet, pour qu'on eût $(\beta\gamma)^p = (\beta\gamma)^q$, ou $(\beta\gamma)^{p-q} - 1 = 0$, il faudrait que $\beta\gamma$ fût racine commune à $y^{p-q} - 1 = 0$ et $y^n - 1 = 0$, équ. qui ne peuvent avoir pour facteurs que $y^l - 1$ ou $y^h - 1$, puisque $n = lh$. Donc on aurait $\beta^l\gamma^l = 1$; d'où $\gamma^l = 1$, à cause de $\beta^l = 1$; et comme aussi $\gamma^h = 1$, l et h auraient un facteur autre que un, contre l'hypothèse. Concluons de là que si l'on prend $\alpha = \beta\gamma$, le période sera $(\alpha, \alpha^2, \alpha^3 \ldots \alpha^n)$, formée de n termes différents.

On peut abaisser l'exposant p de $\beta^p\gamma^p$ au-dessous de l pour β, de h pour γ, puisque $\beta^l = \gamma^h = 1$, et l'on peut ôter de p tous les multiples de l ou h. Ainsi, $\beta^b\gamma^c$ représente tous les termes de la période, b et c étant les restes de la division de p par l et h. Donc, pour obtenir toutes les racines de $y^n - 1 = 0$, on cherchera β et γ, c'est-à-dire l'une des racines, autre que $+1$, des équ. $y^l - 1 = 0$, $y^h - 1 = 0$; puis on formera $\beta^b\gamma^c$, en prenant pour b et c toutes les combinaisons des nombres de 1 à l pour b, de 1 à h pour c.

Lorsque $l = 2$, on fait $\beta = -1$.

Quand n est le produit lhi de trois nombres premiers, on prouve

de même qu'il faut poser $y^l - 1 = 0$, $y^h - 1 = 0$, $y^i - 1 = 0$; tirer de chacune une racine autre que $+1$; faire le produit de ces racines $\beta\gamma\delta$; enfin, en prendre les puissances, toutes comprises dans la forme $\beta^b\gamma^c\delta^d$, *b*, *c*, et *d* étant les combinaisons des nombres 1, 2, 3,.... jusqu'à *l*, *h* et *i*; et ainsi des autres cas.

3° Lorsque l'exposant *n* est de la forme h^k, *h* étant un nombre premier, on raisonnera comme dans l'ex. suivant.

$y^{81} - 1 = 0$, où $81 = 3^4$. Posez $y^3 - 1 = 0$, et soit θ une racine imaginaire de cette équ.; extrayez-en les racines 1, 3, 9 et 27, savoir, θ, $\sqrt[3]{\theta}$, $\sqrt[9]{\theta}$, $\sqrt[27]{\theta}$; ce seront autant de solutions de la proposée, puisque les puissances 81es sont des puissances de θ^3, qui $= 1$: le produit $\theta \,.\, \sqrt[3]{\theta} \,.\, \sqrt[9]{\theta} \,.\, \sqrt[27]{\theta} = \alpha$ est aussi racine de *y*, par la même raison. Or, $\alpha, \alpha^2, \alpha^3 \ldots \alpha^{81}$ sont des quantités toutes différentes, puisque sans cela α serait une racine commune à $y^{81} - 1 = 0$ et $y^i - 1 = 0$, ce qui suppose entre ces équ. un facteur commun, qui ne peut être que $y^3 - 1 = 0$; ainsi α serait racine de celle-ci, $\alpha^3 = 1$, ou $\theta^3 \,.\, \theta \,.\, \sqrt[3]{\theta} \,.\, \sqrt[9]{\theta} = 1$; élevant à la puissance 9, il vient $\theta = 1$ contre l'hypothèse. Ainsi $\alpha, \alpha^2, \alpha^3 \ldots \alpha^{81}$ sont les 81 racines de la proposée.

En général, pour résoudre $y^n - 1 = 0$ lorsque $n = h^k$, posez $y^h - 1 = 0$; θ étant l'une des racines autre que $+1$, extrayez de θ diverses racines dont les degrés *i* sont marqués par $i = h^0\, h^1\, h^2 \ldots h^{k-1}$, en sorte que vous formiez les *k* résultats $\beta, \gamma \ldots$ désignés par $\sqrt[i]{\theta}$; ils seront tous des racines de $y^n - 1 = 0$, aussi bien que leur produit $\alpha = \beta\gamma\delta \ldots$ et les termes $\alpha, \alpha^2 \ldots \alpha^n$, tous différents, constitueront les *n* racines cherchées.

On voit de même que si $n = h^k l^i$, il faut résoudre $y^h - 1 = 0$ et $y^l - 1 = 0$, multiplier entre elles toutes les racines de ces équ., et faire ce produit $= \alpha$.

Soient β et γ des racines, autres que $+1$, de chaque équ.; qu'on fasse

$$\beta' = \sqrt[h]{\beta},\ \beta'' = \sqrt[h]{\beta'},\ \beta''' = \sqrt[h]{\beta''} \ldots \gamma' = \sqrt[l]{\gamma},\ \gamma'' = \sqrt[l]{\gamma'} \ldots,$$

on aura $$\alpha = \beta\beta'\beta'' \ldots \times \gamma\gamma'\gamma'' \ldots$$

Soit, par ex., $y^6 - 1 = 0$; on traite $y^2 - 1 = 0$ et $y^3 - 1 = 0$,

d'où $$\beta = -1, \quad \gamma = -\tfrac{1}{2}(1 + \sqrt{-3});$$

puis,

$\alpha = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{-3})$, $\alpha^2 = \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{-3})$, $\alpha^3 = -1$, etc.,
et $y = \pm 1$, $\frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{-3})$, $-\frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{-3})$.

Pour $y^{12} - 1 = 0$, faites $y^4 - 1 = 0$ et $y^3 - 1 = 0$; pour la 1re équ., prenez -1 et $\sqrt{-1}$, leur produit $-\sqrt{-1} = \beta$; γ est le même que ci-dessus, et l'on a

$\alpha = \frac{1}{2}(\sqrt{-1} - \sqrt{3})$, $\alpha^2 = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{-3})$, $\alpha^3 = \sqrt{-1}$, etc.;
d'où $y = \pm 1$, $\pm\sqrt{-1}$, $\pm\frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{-3})$, $\pm\frac{1}{2}(\sqrt{-1} \pm \sqrt{3})$.

571. Puisque $y = \alpha, \alpha^2, \alpha^3, \ldots$ l'équ. (1) (nº 568) donne

$$1 + \alpha + \alpha^2 \ldots \alpha^{n-1} = 0,\ 1 + \alpha^2 + \alpha^4 \ldots \alpha^{2n-2} = 0,\ 1 + \alpha^3 + \alpha^6 \ldots = 0$$
ou
$$S_1 = S_2 = S_3 \ldots = S_k = 0, \quad S_n = n,$$

en désignant par S_k la somme des puissances k de toutes les racines, k étant entier et non divisible par n.

572. Nous avons réduit la résolution de l'équ. $y^n - 1 = 0$, au cas où n est un nombre premier. Nous nous servirons maintenant des lignes trigonométriques, en renvoyant pour le reste à la note XIV de la *Résol. numér. des équ.*

En faisant $\cos x = p$, on a vu, nº 361, que chacun des cosinus successifs des arcs $2x$, $3x$, $4x \ldots$ s'obtient en multipliant les deux précédents par $2p$ et -1, puis ajoutant. Pour mettre en évidence la loi que les résultats observent, faisons usage d'un artifice d'analyse. Soit $2\cos x = y + y^{-1}$; il suit de la loi indiquée, que pour avoir $\cos 2x$, il faut multiplier $\cos x$ ou $\frac{1}{2}(y + y^{-1})$ par $y + y^{-1}$, qui est $2\cos x$, et retrancher $\cos 0x$ ou 1. On trouve $2\cos 2x = y^2 + y^{-2}$; on obtient de même

$$2\cos 3x = y^3 + y^{-3}, \quad 2\cos 4x = y^4 + y^{-4}, \text{ etc.}$$

Démontrons que les résultats suivent toujours la même loi. Supposons que cette loi soit vérifiée pour deux degrés consécutifs $n-2$ et $n-1$, ou

$$2\cos(n-2)x = y^{n-2} + y^{-(n-2)}, \quad 2\cos(n-1)x = y^{n-1} + y^{-(n-1)},$$

multiplions la deuxième équation par $y + y^{-1}$, et retranchons la 1re; il viendra $2\cos nx = y^n + y^{-n}$; ce qui prouve la proposition.

On a $\quad 2\cos x = y + \frac{1}{y},\quad 2\cos nx = y^n + \frac{1}{y^n};$

d'où * $y^2 - 2y\cos x + 1 = 0,\quad y^{2n} - 2y^n\cos nx + 1 = 0 \ldots .$ (1)

Si l'on a $\cos x$, ces équ. donneront y, puis $\cos nx$; ainsi on pourra trouver $\cos nx$ sans chercher successivement $\cos 3x$, $\cos 4x\ldots$; c'est le terme général de la série des cosinus, et l'on pourrait employer ces équ. à la composition des tables; mais le calcul serait compliqué d'imaginaires.

Si les tables de sinus sont formées, qu'on y prenne les valeurs de $\cos x$ et $\cos nx$, nos deux équ. ne contenant plus que y, devront avoir une racine commune α; mais si l'on a $y = \alpha$, on a aussi $y = \frac{1}{\alpha}$, ainsi qu'on peut le reconnaître (les équ. (1) sont réciproques), donc elles ont deux racines communes, ou plutôt la 1re divise la 2e. Posons $nx = \varphi$; quel que soit l'arc φ, il faut donc que

$$y^2 - 2y\cos\left(\frac{\varphi}{n}\right) + 1 \quad \text{divise} \quad y^{2n} - 2y^n\cos\varphi + 1 \ldots . \quad (2)$$

573. Pour appliquer ce théorème, qui est dû à Moivre, au cas qui nous occupe, faisons $\varphi = k\pi$, k désignant un entier quelconque, et π la demi-circonf.; $\cos\varphi$ est $+1$ ou -1, selon que k est pair ou impair, et le 2e trinôme devenant $y^{2n} \mp 2y^n + 1$, ou $(y^n \mp 1)^2$, on voit que

$$y^2 - 2y\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right) + 1 \quad \text{divise} \quad y^n \mp 1, \ldots . \quad (3)$$

k étant un entier quelconque, *pair pour* $y^n - 1$, *impair lorsqu'il s'agit de* $y^n + 1$. Si le 1er trinôme est un carré, on ne prendra pour diviseur que sa racine; ce cas exige que le cosinus soit ± 1; alors k est $0, n, 2n\ldots$, et le facteur se réduit à $y \pm 1$.

* En résolvant ces équ. (1), on trouve

$$y = \cos x \pm \sin x \,.\, \sqrt{-1},\quad y^n = \cos nx \pm \sin nx \,.\, \sqrt{-1};$$

d'où $\quad (\cos x \pm \sin x \,.\, \sqrt{-1})^n = \cos nx + \sin nx \,.\, \sqrt{-1}.$

Cette belle propriété, dont on fait un fréquent usage dans l'Algèbre supérieure, n'est, il est vrai, démontrée ici qu'autant que n est entier et positif, quoiqu'elle subsiste dans tous les cas. Nous reviendrons sur ce sujet, n° 630.

Les racines de $y^n \pm 1 = 0$ sont donc comprises dans

$$y = \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right) \pm \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) \cdot \sqrt{-1} \quad \ldots \ldots \quad (4)$$

Tant que l'entier k ne passe pas n, l'arc $\frac{k\pi}{n}$ est une fraction croissante de la demi-circonf. ; ces arcs ont des cosinus inégaux, et l'on obtient des facteurs différents du 2[e] degré, que nous représenterons par $A,B,C \ldots L,M$. Comme $n+i$ et $n-i$ ont $2n$ pour somme, ces nombres sont ensemble pairs ou impairs, soit $k = n \pm i$, i étant $< n$; l'arc devient $\frac{k\pi}{n} = \pi \pm \frac{i\pi}{n}$, arcs dont le cosinus est le même : d'où résulte que le facteur trinôme est le même pour $k = n - i$ et $n + i$. Après avoir donc pris pour k tous les nombres (pairs ou impairs) jusqu'à n, au delà on retrouve les mêmes facteurs de 2[e] degré en ordre rétrograde $M,L \ldots C,B,A$.

Passé $2n$, k a la forme $2qn + i$, et l'arc devient $2q\pi + \frac{i\pi}{n}$, dont le cosinus est encore le même ; ainsi, on retombe sur les mêmes facteurs dans le même ordre $A,B \ldots L,M \ldots, B,A$. Il est, comme on voit, *inutile de donner à* k *des valeurs* $>$ n.

1° *Si* n *est pair*, $\frac{1}{2}n \pm i$ sont ensemble pairs ou impairs; $k = \frac{1}{2}n \pm i$ donne les arcs $\frac{k\pi}{n} = \frac{1}{2}\pi \pm \frac{i\pi}{n}$, dont les cosinus sont égaux en signes contraires, savoir, $= \mp \sin\left(\frac{i\pi}{n}\right)$; ainsi, *lorsque* n *est pair, on ne fera pas* k $> \frac{1}{2}$ n, *mais on prendra les cosinus avec le signe* $\pm$.

2° *Si* n *est impair*, l'un de ses nombres $n - i$ et i est pair et l'autre impair, puisque leur somme est impaire : ainsi, on n'est en droit de prendre que l'un d'eux pour valeur de k. Soit $k = n - i$, i étant $< \frac{1}{2}n$; on a $\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right) = \cos\left(\pi - \frac{i\pi}{n}\right) = -\cos\left(\frac{i\pi}{n}\right)$; c'est-à-dire que quand k dépasse $\frac{1}{2}n$, les cos. de notre facteur trinôme (3), sont, en signe contraire, les mêmes que si l'on eût pris $k = i$, valeur exclue et $< \frac{1}{2}n$. Donc *on fera* k $= 0, 1,2,3 \ldots$ *sans aller au delà de* $\frac{1}{2}$ n, *et on obtiendra des arcs* $< \frac{1}{2}\pi$, *dont les cos. conviendront au théorème* (3), *mais en changeant de deux en deux le signe du cosinus*.

Enfin, $y = \frac{x}{a}$ donne $x^2 - 2ax \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right) + a^2$, pour la formule générale des facteurs de $x^n \mp a^n$.

Pour $y^4 + 1$, k doit être impair; $k = 1$ donne l'arc $\frac{1}{4}\pi$ ou 45°, dont le cos est $\frac{1}{2}\sqrt{2}$; pris en $\pm$, on a les deux facteurs $y^2 \pm y\sqrt{2} + 1$; ainsi

$$x^4 + a^4 = (x^2 + ax\sqrt{2} + a^2)(x^2 - ax\sqrt{2} + a^2).$$

Pour $y^6 + 1$, $k = 1$ donne l'arc $\frac{1}{6}\pi$, dont le cos est $\frac{1}{2}\sqrt{3}$, qu'on prendra en $\pm$; $k = 3$ donne le cos zéro; donc

$$y^6 + 1 = (y^2 + y\sqrt{3} + 1)(y^2 - y\sqrt{3} + 1)(y^2 + 1).$$

Soit $y^6 - 1$; faisons $k = 0$ et 2; les cos. de zéro et $\frac{1}{3}\pi$ sont 1 et $\frac{1}{2}$, qui, pris en $\pm$, donnent

$$y^6 - 1 = (y + 1)(y^2 + y + 1)(y^2 - y + 1)(y - 1);$$

$$y^4 - 1 = (y^2 - 1)(y^2 + 1) = (y + 1)(y - 1)(y^2 + 1);$$

$y^8 - 1 = (y^4 + 1)(y^4 - 1)$. Ces facteurs viennent d'être décomposés.

Pour $y^9 - 1$, il faut faire $k = 0, 1, 2, 3$, et 4, et prendre les cos. de rangs pairs en signes contraires, savoir 1, $-\cos 20°$, $+\cos 40°$, $-\cos 60°$ et $+\cos 80$, les facteurs sont, outre $y - 1$ et $y^2 + y + 1$, $(y^2 + 1{,}879\ldots y + 1)(y^2 - 1{,}532\ldots y + 1)(y^2 - 0{,}347\ldots y + 1)$

$$y^9 - 1 = (y - 1)(y^2 + y + 1)(y^6 + y^3 + 1).$$

Quant à $y^9 + 1$, on opérera de même, en prenant avec un signe contraire les cos. de rangs impairs, ce qui revient à changer ci-dessus les signes de tous les 2es termes des facteurs, savoir :

$$y^9 - 1 = (y + 1)(y^2 - y + 1)(y^6 - y^3 + 1),$$

et en effet, il est clair qu'il suffit de changer y en $-y$.

Il est facile de résoudre par rapport à l'arc t, l'équ.

$$k\cos mt + p\cos(m - 1)t + q\cos(m - 2)t \ldots + P = 0.$$

Car en posant $2\cos t = x + x^{-1}$, on a (n° 572)

$$k(x^m + x^{-m}) + p(x^{m-1} + x^{-(m-1)}) + q(x^{m-2}\ldots) + P = 0,$$

équation traitée p. 122. On pourrait aussi développer les cos. d'arcs

multiples selon les puissances ascendantes des cos. d'arcs simples, par les formules que nous ferons connaître plus tard.

574. La proposition (3) est ce qu'on nomme le *Théorème de Côtes :* ce savant l'avait présentée sous une forme géométrique. Du rayon $AR = a$ (fig. 24, 24 *bis*) soit décrit le cercle $ACHL$, et le diamètre AH, passant en un point arbitraire O; à partir de A partagez la circonférence en $2n$ arcs égaux Aa, aB, Bb,.... chacun est le n^e de π; menez des rayons vecteurs du point O aux points de division. Celui qui va au point quelconque C forme le triangle COP, duquel, en faisant l'angle $CRA = \alpha$, $OR = x$, on tire

$$CP = a \sin \alpha, \quad RP = a \cos \alpha, \quad OP = a \cos \alpha - x;$$

donc $OC^2 = x^2 - 2ax \cos \alpha + a^2 = OC \,.\, OL$; et si l'arc AC contient k divisions, on a $\alpha = \dfrac{k\pi}{n}$. Ce trinôme étant facteur de $x^n \mp a^n$, selon que k est pair ou impair, les rayons vecteurs, menés aux points de divisions alternatifs, constituent tous ces facteurs. $OA = a - x$, $OH = a + x$, répondent aux facteurs réels du 1er degré.

Désignons par Z, Z', Z''.... les rayons menés aux divisions paires, et par z, z', z''.... ceux qui vont aux impaires; on aura

$$z \,.\, z' \,.\, z'' \ldots = a^n + x^n, \text{ que } O \text{ soit intérieur ou extérieur;}$$
$$Z \,.\, Z' \,.\, Z'' \ldots = a^n - x^n, \text{ si } O \text{ est intérieur (fig. 24);}$$
$$Z \,.\, Z' \,.\, Z'' \ldots = x^n - a^n, \text{ si } O \text{ est extérieur (fig. 24 bis).}$$

Équations à trois termes.

575. Prenons l'équ. $Ax^{2n} + Bx^n + C = 0$, où l'un des exposants de x est double de l'autre ; en faisant $x^n = z$, il vient

$$Az^2 + Bz + C = 0.$$

1° Si les racines de z sont réelles, telle que f et g, on doit résoudre ces équ. à deux termes $x^n = f$, $x^n = g$.

Par exemple, trouver deux nombres tels, que leur produit soit 10, et la somme des cubes 133?

$$x^3 + \left(\frac{10}{x}\right)^3 = 133, \quad x^6 - 133x^3 + 1000 = 0.$$

Faisant $x^3 = z$, $z^2 - 133z + 1000 = 0$; d'où $z = 8$ et 125; posant ensuite $x^3 = 8$ et 125, il vient $x = 2$ et 5, et en outre (n° 569) 2α, et $5\alpha^2$, puis 5α et $2\alpha^2$, α étant une racine cubique imaginaire de l'unité. Telles sont les trois solutions du problème.

2° Si les racines sont égales, on a $B^2 - 4AC = 0$, la proposée est un carré exact, $(ax^n + b)^2 = 0$, et l'on retombe sur une équ. à deux termes. Par ex., trouver un nombre tel, qu'en divisant son double par 3, et 3 par son double, 2 soit la somme des 4es puissances des quotients?

$$\left(\frac{2x}{3}\right)^4 + \left(\frac{3}{2x}\right)^4 = 2, \quad \text{d'où } (16x^4 - 81)^2 = 0\,;$$

et comme $y^4 = 1$ a pour racines ± 1 et $\pm \sqrt{-1}$, on a $x = \pm \frac{3}{2}$ et $\pm \frac{3}{2}\sqrt{-1}$.

3° Enfin, quand les racines sont imaginaires, ou $B^2 - 4AC < 0$, on fera $Ax^{2n} = Cy^{2n}$, et la proposée, devenant

$$y^{2n} + \frac{B}{\sqrt{(AC)}}\, y^n + 1 = 0,$$

sera comparable à (2) (n° 572); car le coefficient de y^n est < 2, à cause de $B^2 < 4AC$. Il y a donc un arc φ qui a la moitié de ce facteur pour cosinus, arc qu'on déterminera par log. d'après la relation

$$\cos\varphi = -\frac{B}{2\sqrt{(AC)}}. \quad \ldots\ldots \quad (5)$$

Notre transformée est donc divisible par $y^2 - 2y\cos\left(\frac{\varphi}{n}\right) + 1 = 0$, en prenant pour φ tous les arcs dont le cos est donné par l'équ. (5), et qui sont non-seulement l'arc $\varphi < 180°$, donné par la table, mais encore $\varphi + 2\pi$, $\varphi + 4\pi\ldots$, en général, $\varphi + 2k\pi$, k étant un entier quelconque : soit $\psi = \dfrac{\varphi + 2k\pi}{n}$, tous les facteurs cherchés sont compris dans la forme

$$x^2 \sqrt[n]{A} - 2x \sqrt[2n]{(AC)}\,.\cos\psi + \sqrt[n]{C} = 0. \quad \ldots \quad (6)$$

Il est d'ailleurs inutile de prendre $k > n$, puisque $k = qn + i$ donne l'arc $2q\pi + \dfrac{\varphi + 2i\pi}{n}$; et supprimant les circonf. $2q\pi$, il reste à

prendre le cos de l'arc qu'on a eu pour $k = i < n$; on retomberait donc sur les mêmes facteurs.

Observez qu'ici le rayon est $= 1$, et que si l'on fait usage des tables de log., il faut soustraire 10 de tous les log. des cos. qu'on emploie dans le calcul (*voy*. t. I, p. 339).

Par ex., soit l'équ. $x^6 - 2x^3 + 1 = 0$: $A = C = 1$, $B = -2$, $n = 3$; on trouve $\cos\varphi = 1$, les arcs $\psi = 0°$, $120°$ et $240°$; partant la proposée a ses trois facteurs de la forme $x^2 - 2x\cos\psi + 1$; et comme $\cos\psi$ a pour valeurs 1, $-\sin 30° = -\frac{1}{2}$ et $-\cos 60° = -\frac{1}{2}$, on trouve $x^2 - 2x + 1$, et $x^2 + x + 1$, ce dernier facteur étant double. Ainsi la proposée est le carré de $(x-1)(x^2+x+1)$, ou de $x^3 - 1$.

Soit encore $x^4 + x^2 + 25 = 0$: $A = B = 1$, $C = 25$, $n = 2$, et $\cos\varphi = -\frac{1}{10}$; les tables donnent, à cause du signe $-$, $\varphi = 95° 44' 20''$, dont la moitié ψ est $47° 52' 10''$; ajoutons $180°$, et nous formerons un arc dont le cosinus est le même que le précédent en signe contraire.

Substituant dans le 2ᵉ terme de la formule générale (6), le calcul ci-contre donne -3 pour coefficient de l'un des facteurs. Ainsi nos facteurs sont $x^2 \pm 3x + 5$.

$\cos\psi$...	$\bar{1}$,8266074	
2........	0,3010300	—
$\sqrt{5}$........	0,3494850	
3........	0,4771224	—

Enfin, pour $2x^6 + 3x^3 + 5 = 0$, on a $\cos\varphi = \dfrac{-3}{2\sqrt{10}}$.

3 ...	0,4771213 —		2 ...	0,3010300 —
2	— 0,3010300		$\sqrt[6]{10}$...	0,1666667
$\sqrt{10}$	— 0,5000000		$2\sqrt[6]{10}$...	0,4676967 —
$\cos\varphi$ ...	$\bar{1}$,6760913 —			

On trouve $\varphi = 61° 41'$, ou plutôt $118° 19'$, en prenant le supplément, à cause du signe $-$. Le tiers est $\psi = 39° 26' 20''$; ajoutant $120°$ deux fois successives, et prenant les $\cos\psi$, on a $\cos 39° 26' 20''$, $-\sin 69° 26' 20''$, et $\sin 9° 26' 20''$. Donc

$2\sqrt[6]{10}$...	0,46770 —	0,46770 —	0,46770 —
$\cos\psi$ ...	$\bar{1}$,88779	$\bar{1}$,97141 —	$\bar{1}$,21483
	0,35549 —	0,43911 +	$\bar{1}$,68253 —

Soit fait $\alpha = -2,2672 \quad +2,7486 \quad -0,48143$,

et nos trois facteurs sont de la forme $x^2\sqrt[3]{2} + \alpha x + \sqrt[3]{5}$.

Racines des expressions compliquées de Radicaux.

576. Admettons que $a+\sqrt{b}$ soit un carré, et cherchons-en la racine, qui doit avoir la forme $\sqrt{x}+\sqrt{y}$; si elle était $f+\sqrt{y}$, on aurait $x=f^2$. Posons donc

$\sqrt{(a+\sqrt{b})}=\sqrt{x}+\sqrt{y}$, d'où $x+y+2\sqrt{(xy)}=a+\sqrt{b}$,
puis, $\quad x+y=a,\quad 2\sqrt{(xy)}=\sqrt{b}$,

en séparant l'équ. en deux, comme p. 115. Pour tirer x et y de ces équ., formez les carrés et retranchez, vous aurez

$$x^2-2xy+y^2=(x-y)^2=a^2-b.$$

Comme x et y sont supposés rationnels, a^2-b doit être un carré exact connu, que nous ferons $=k^2$; $x-y=k$, et $x+y=a$ donnent la solution cherchée

$$x=\tfrac{1}{2}(a+k),\ y=\tfrac{1}{2}(a-k),\ k=\sqrt{(a^2-b)},$$

Soit $\sqrt{(4+2\sqrt{3})}$; on a $a=4$, $b=12$; d'où $a^2-b=k^2=4$, puis $k=2$, $x=3$ et $y=1$; la racine demandée est $\pm(1+\sqrt{3})$. Celle de $4-2\sqrt{3}$ est $\pm(1-\sqrt{3})$.

Pour $\sqrt{(-1+2\sqrt{-2})}$, $a^2-b=9$, $k=3$, $x=1$, $y=-2$, et l'on a $\pm(1+\sqrt{-2})$ pour racines.

Si $a+\sqrt{b}$ est un cube exact, on pose

$$\sqrt[3]{(a+\sqrt{b})}=(x+\sqrt{y})\sqrt[3]{z},$$

z étant une indéterminée dont on dispose à volonté pour faciliter le calcul. En élevant au cube et comparant les termes rationnels, on trouve

$$a=z(x^3+3xy),\ \sqrt{b}=z\sqrt{y}(3x^2+y);$$

carrant ces équ. et retranchant, on a

$$a^2-b=z^2\left[(x^3+3xy)^2-(3x^2\sqrt{y}+y\sqrt{y})^2\right].$$

Or, le facteur de z^2 est la différence de deux carrés, et revient visiblement à $(x+\sqrt{y})^3\times(x-\sqrt{y})^3$, ou $(x^2-y)^3$; donc $\dfrac{a^2-b}{z^2}=(x^2-y)^3$. Mais x et y sont supposés rationnels; ainsi le

1er membre doit être un cube exact; et il sera toujours facile de déterminer z de manière à remplir cette condition, ne fût-ce qu'en posant $z=(a^2-b)^2$: si a^2-b est un cube, on fera $z=1$. En général, on décomposera a^2-b en facteurs premiers, et l'on distinguera bientôt quels facteurs doivent être introduits ou supprimés, pour avoir un cube exact. Ainsi, z et k seront connus dans les relations

$$k=\sqrt[3]{\left(\frac{a^2-b}{z^2}\right)},\quad x^2-y=k,\quad a=zx\,(x^2+3y);$$

d'où $$y=x^2-k,\quad 4zx^3-3kxz=a.$$

Cette dernière équ. donne x, en se contentant des seules racines rationnelles; la précédente fait connaître y, et l'on a la racine demandée.

Pour $10+6\sqrt{3}$ on a $a=10$, $b=108$, $a^2-b=-8$; ainsi $z=1$, et $k=-2$. Donc $4x^3+6x=10$, d'où $x=1$, puis $y=3$; enfin, $\sqrt[3]{(10+6\sqrt{3})}=1+\sqrt{3}$.

Soit encore $8+4\sqrt{5}$; on a $a^2-b=-16$; on fera $z=4$, $k=-1$; d'où $4x^3+3x=2$, et $x=\frac{1}{2}$, $y=\frac{5}{4}$; enfin, $\frac{1}{2}\sqrt[3]{4}\,.\,(1+\sqrt{5})$ est racine cubique de $8+4\sqrt{5}$.

En posant $$\sqrt[n]{(a+\sqrt{b})}=(x+\sqrt{y})\sqrt[n]{z},$$

et raisonnant de même, on déterminerait x, y et z, dans le cas où $a+\sqrt{b}$ est une puissance n^e exacte.

577. Dans toute autre formule, il ne suffit pas de substituer, pour les radicaux qui s'y trouvent, leur valeur approchée, parce qu'on néglige ainsi toutes valeurs imaginaires dont ces radicaux sont susceptibles. On doit remplacer $\sqrt[n]{A}$, par $\alpha\sqrt[n]{A}$, $\alpha^2\sqrt[n]{A}\ldots$ (n° 569), en prenant 1, α, $\alpha^2\ldots.$ pour les racines de l'équ. $y^n-1=0$.

Si l'on a $x=a\sqrt[n]{g}+b\sqrt[n]{g^2}+c\sqrt[n]{g^3}+\ldots.$, il suffit de poser

$$y^n=g,\quad x=ay+by^2+cy^3\ldots.,$$

et d'éliminer y entre ces deux équ.; toutes les racines de l'équ. finale en x seront les valeurs cherchées de x.

Quand on a une fonct. fx compliquée de radicaux, $\sqrt[n]{A}$, $\sqrt[m]{B}\ldots.$

pour obtenir toutes les valeurs de fx, posez $y^n = A$, $t^m = B$, et introduisez pour vos radicaux, les n valeurs de y, les m de t...., combinées entre elles de toutes les manières possibles.

Quand des radicaux fonctions de x entrent dans une équ. on l'en dégage en représentant chaque radical par une nouvelle inconnue, qu'on élimine ensuite par les procédés ordinaires. Ainsi pour l'équ. $x - \sqrt[3]{x} - 2\sqrt{(x+1)} = 0$, on pose $x = z^3$, $x + 1 = y^2$, d'où $x - z - 2y = 0$: éliminant y, il vient

$$4x + 4 = x^2 - 2xz + z^2, \text{ avec } z^3 - x = 0.$$

Enfin, éliminant z, on obtient l'équ. finale

$$x^6 - 12x^5 + 34x^4 + 8x^3 - 167x^2 - 192x - 64 = 0;$$

on trouve d'abord $x = 8$ et -1, qui sont les solutions réelles demandées; quant aux quatre autres racines, elles se rapportent aux combinaisons des valeurs des racines imaginaires des radicaux carré et cubique de la proposée.

Équations du troisième degré.

578. Pour résoudre l'équ. $kx^3 + ax^2 + bx + c = 0$, chassons le 2e terme et le coefficient du premier, en posant (page 43)

$$x = \frac{x' - a}{3k},$$

d'où, $$x'^3 + 3x'(3kb - a^2) + 2a^3 - 9abk + 27ck^2 = 0.$$

Ainsi toute équ. du 3e degré est réductible à

$$x^3 + px + q = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Posons $x = y + z$; d'où, $x^3 = 3yz(y+z) + y^3 + z^3$; ainsi la proposée devient

$$(3yz + p)(y + z) + y^3 + z^3 + q = 0.$$

Or, le partage de x en deux nombres y et z peut se faire d'une infinité de manières, et l'on a le droit de se donner leur produit, ou leur différence, ou leur rapport, etc.... Posons donc que le 1er facteur est nul, ou

$$yz = -\tfrac{1}{3}p, \quad y^3 + z^3 = -q.$$

Le cube de la 1re équ. $y^3z^3 = -(\frac{1}{3}p)^3$ montre que y^3 et z^3 ont $-q$ pour somme, et $-(\frac{1}{3}p)^3$ pour produit, c'est-à-dire que les inconnues y^3 et z^3 sont les racines t et t' de l'équ. du 2e degré (n° 137, 5°)

$$t^2 + qt = (\tfrac{1}{3}p)^3, \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

qu'on nomme *la Réduite*. Connaissant t et t', on a $y^3 = t$, $z^3 = t'$; $1, \alpha, \alpha^2$, étant les trois racines cubiques de l'unité (n° 569), on a donc

$$y = \sqrt[3]{t},\ \alpha\sqrt[3]{t},\ \alpha^2\sqrt[3]{t}, \quad z = \sqrt[3]{t'},\ \alpha\sqrt[3]{t'},\ \alpha^2\sqrt[3]{t'}.$$

Mais il ne faut pas, pour obtenir $x = y + z$, ajouter toutes ces valeurs deux à deux, puisqu'on aurait 9 racines au lieu de 3. Comme, au lieu de l'équ. $yz = -\frac{1}{3}p$, on en a employé le cube, on a triplé le nombre des racines ; il ne faut donc ajouter que celles de ces valeurs de y et de z dont le produit est $-\frac{1}{3}p$, ou $\sqrt[3]{(tt')}$, puisque le 2e membre de l'équ. (2) étant $= -t.t'$, la racine cubique est $= \frac{1}{3}p$. Il est facile de voir, à cause de $\alpha^3 = 1$, que des 9 combinaisons, on ne doit admettre, avec $x = \sqrt[3]{t} + \sqrt[3]{t'}$, que

$$x = \alpha\sqrt[3]{t} + \alpha^2\sqrt[3]{t'}, \quad \text{et} \quad \alpha^2\sqrt[3]{t} + \alpha\sqrt[3]{t'}.$$

Substituant pour α et α^2 leurs valeurs $-\frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{-3})$, n° 568, et faisant, pour abréger,

$$\text{on a} \quad \left.\begin{array}{l} s = \sqrt[3]{t} + \sqrt[3]{t'}, \quad d = \sqrt[3]{t} - \sqrt[3]{t'} \\ x = s, \quad x = -\frac{1}{2}(s \pm d\sqrt{-3}) \end{array}\right\} \quad \ldots \quad (3)$$

Donc, pour résoudre l'équ. du 3e degré (1), il faut d'abord résoudre la réduite (2); et connaissant t et t', on introduira leurs valeurs dans les formules (3).

Par ex., $x^3 + 6x = 7$ donne $p = 6$, $q = -7$, et la réduite $t^2 - 7t = 8$; d'où $t = \frac{7}{2} \pm \frac{9}{2}$, $t = 8$, $t' = -1$; les racines cubiques sont 2 et -1; donc,

$$s = 1,\ d = 3,\ x = 1,\ \text{et} -\tfrac{1}{2}(1 \pm 3\sqrt{-3}).$$

Soit $y^3 - 3y^2 + 12y = 4$; on pose $y = x + 1$ pour chasser le 2e terme, et l'on a $x^3 + 9x + 6 = 0$, $p = 9$, $q = 6$, et la réduite

$t^2 + 6t = 27$; donc $t = 3$, $t' = -9$, et

$$s = \sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{9} = -0,637835 = x, \quad d = 3,522333,$$

puis, $y = 0,362165$, et $1,318918 \pm 1,761167\sqrt{-3}$.

L'équ. $x^3 - 3x = 18$ donne $t^2 - 18t + 1 = 0$, $t = 9 \pm 4\sqrt{5}$; la racine cubique est (p. 136) $\frac{3}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{5}$; ainsi $s = 3$, $d = \sqrt{5}$; enfin, $x = 3$, et $-\frac{1}{2}(3 \pm \sqrt{-15})$.

$x^3 - 27x + 54 = 0$ donne $t^2 + 54t + 729 = 0$, ou $(t + 27)^2 = 0$,

$$t = -27 : \text{ainsi } x = -6 \text{ et } 3 \text{ (racine double).}$$

On peut résoudre l'équ. du 3e degré à l'aide des tables de log., en se servant du procédé décrit t. I, p. 351, pour obtenir les racines t et t' de la réduite.

Si p *est positif*, on pose $\qquad \text{tang}\,\varphi = \dfrac{2\sqrt{(\frac{1}{3}p)^3}}{q}$,

d'où $t = \sqrt{(\frac{1}{3}p)^3}\,\text{tang}\,\frac{1}{2}\varphi$, $\qquad t' = -\dfrac{\sqrt{(\frac{1}{3}p)^3}}{\text{tang}\,\frac{1}{2}\varphi}$,

puis $\sqrt[3]{t} = \sqrt{(\frac{1}{3}p)} \times \sqrt[3]{\text{tang}\,\frac{1}{2}\varphi}$, $\sqrt[3]{t'} = -\dfrac{\sqrt{(\frac{1}{3}p)}}{\sqrt[3]{\text{tang}\,\frac{1}{2}\varphi}}$.

Si p *est négatif*, on pose $\qquad \sin\varphi = \dfrac{2\sqrt{(\frac{1}{3}p)^3}}{q}$;

d'où $\qquad \sqrt[3]{t} = -\sqrt{(\frac{1}{3}p)} \times \sqrt[3]{\text{tang}\,\frac{1}{2}\varphi}$, $\quad \sqrt[3]{t'} = -\dfrac{\sqrt{(\frac{1}{3}p)}}{\sqrt[3]{\text{tang}\,\frac{1}{2}\varphi}}$.

Une fois qu'on a trouvé les racines cubiques de t et t', on en tire les valeurs de s et de d, et par suite celles de x.

Par ex., pour l'équ. $x^3 + 9x + 6 = 0$ de la p. 138, on a $p = 9$, $q = +6$; c'est le 1er cas ci-dessus ;

2.	0.3010300				
3.	0.4771213				
$\sqrt{3}$.	0.2385606	. . . .	0.2385606	. . . . . .	0.2385606 —
6.	— 0.7781513	$\sqrt[3]{\text{tang}}$.	$\bar{1}.9204798$	. . . . . . —	$\bar{1}.9204798$
Tang φ	0.2385606	1er. .	0.1590404	2^e^. . .	0.3180808 —

$\varphi = 60^\circ$, $\frac{1}{2}\varphi = 30^\circ$ log tang $= \bar{1}.7614394$

1er terme. . . . 1,442250

2^e^ . . . . — 2,080083

$$s = x = -0,637833, \quad d = 3,522333$$

$$x = +0,318916 \pm 1,761166 . \sqrt{-3}$$

De même, pour $x^3 - 2x - 5 = 0$ (page 81), on a $p = 2$, $q = -5$; on est dans le 2^e cas, et on a

2.	0.3010300				
$\frac{1}{3}$.	$\bar{1}.8239087$				
$\sqrt{}$	$\bar{1}.9119543$	. . . .	$\bar{1}.9119543-$	. . . .	$\bar{1}.9119543-$
5	$-0.6989700-$	$\sqrt[3]{}$ . . .	$\bar{1}.6807114-$	. . .	$-\bar{1}.6807114-$
Sin φ	$\bar{1}.5379230-$,	1er. . .	$\bar{1}.5926657+$,	2^e. . .	$0.2312429+$

$\varphi = -12^\circ\,34'\,33''\,18$, $\frac{1}{2}\varphi = -6^\circ\,17'\,16''\,59$ log tang $= \bar{1}.0421343$

1er terme. . . . $+\ 0{,}391441$

2e. . . . . $+\ 1{,}703111$

$$s = x = +\ 2{,}094552 \qquad d = 1{,}311670$$

$$x = -\ 1.047276 \pm 0{,}655835\ .\ \sqrt{-3}$$

579. Tant que *les deux racines* t *et* t′ *de la réduite sont réelles*, $\sqrt[3]{t}$, $\sqrt[3]{t'}$ le sont, ainsi que s et d ; il suit des formules (3) que *la proposée n'a qu'une racine réelle*. Cependant, si $t = t'$, on a $d = 0$, et les trois valeurs de x sont réelles, deux étant égales à la moitié de la 3e en signe contraire. C'est ce qu'on voit dans l'exemple p. 139.

Mais *si la réduite a ses racines imaginaires*, c'est-à-dire si $27\,q^2 + 4p^3 < 0$, ce qui emporte la condition que p soit négatif, les expressions (3) restant compliquées d'imaginaires, il semble qu'aucune des trois racines ne soit réelle, contre ce qu'on sait d'ailleurs (n° 533, II). Cette circonstance, qui n'arrive que quand précisément *les trois racines sont réelles*, a beaucoup embarrassé les algébristes, qui ne savaient pas trouver ces racines, et ils l'ont nommée *cas irréductible*. Ce cas se rencontre quand p est négatif, et que $4p^3 > 27q^2$, relations que nous avons exprimées en une seule condition.

Les valeurs de t et t' étant représentées par $a \pm b\sqrt{-1}$, la racine cubique, ou la puissance $\frac{1}{3}$, se développe (page 15) en série. Sans exécuter ce calcul, il est visible qu'on n'y peut trouver d'imaginaires que dans les termes où $b\sqrt{-1}$ est affecté d'exposants impairs ; et comme l'une de ces séries se déduit de l'autre en changeant b en $-b$, il est clair qu'elles sont toutes deux comprises dans la forme $P \pm Q\sqrt{-1}$, dont la somme est $s = 2P$, et la différence $d = 2Q\sqrt{-1}$. Ainsi, les formules (3) se réduisent à ces expressions réelles,

$$x = 2\,P, \text{ et } -P \pm Q\sqrt{3}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Nos racines sont donc réelles, précisément lorsque les équ. (3) les donnent sous forme imaginaire. Ce cas singulier vient de ce qu'en posant $x = y + z$, et $yz = -\frac{1}{3}p$, rien n'exprime que y et z soient en effet réels; et notre calcul prouve même qu'ils sont imaginaires quand les trois racines sont réelles. Pour les obtenir, on développera la puissance $\frac{1}{3}$ de $a + b\sqrt{-1}$ sous la forme $P + Q\sqrt{-1}$; et P et Q seront connus dans les équ. (4).

Ce procédé ne serait guère propre à faire connaître les trois racines; les suivants sont préférables.

Lorsqu'on connaît l'une a des racines de x, pour obtenir les deux autres, on divise la proposée par $x - a$; le reste $a^3 + ap + q$ est nul par hypothèse, et le quotient du 2ᵉ degré $x^2 + ax + a^2 + p$, égalé à zéro, donne

$$x = -\tfrac{1}{2}a \pm \sqrt{-p - \tfrac{3}{4}a^2}. \quad \ldots \quad (5)$$

Si la 1ʳᵉ racine a est réelle; pour que les deux autres le soient aussi, il est nécessaire et il suffit que p soit négatif et $> \frac{3}{4}a^2$. Changeons donc p en $-p$, et désignons par δ la differ. positive $\delta = p - \frac{3}{4}a^2$. Pour examiner le cas dont il s'agit, éliminons a entre cette équ. et $q = -a^3 + ap$, afin de rendre la comparaison de p à q exempte de a. L'équ. finale peut s'écrire sous la forme

$$4p^3 - 27q^2 = 4\delta(4\delta - 3p)^2;$$

et comme δ a le signe $+$ dans le cas actuel, on voit que les racines ne sont réelles qu'autant que p est négatif, et que $4p^3 > 27q^2$, ce qui rend imaginaires les racines de la réduite, et s'accorde avec ce qu'on vient de dire.

Pour obtenir les racines dans ce cas, on réduira d'abord à -1 le coefficient du 2ᵉ terme de l'équ. (1) en posant $x = \pm z\sqrt{p}$; on doit préférer ici le signe négatif. En divisant par $\sqrt{p^3}$, la transformée est

$$z^3 - z - \frac{q}{\sqrt{p^3}} = 0.$$

Or la supposition que $4p^3 > 27q^2$, ou $\frac{4}{27} > \frac{q^2}{p^3}$, ou enfin $\frac{2}{\sqrt{27}} > \frac{q}{\sqrt{p^3}}$, prouve que si l'on fait $z = \sqrt{\frac{4}{3}}$ le résultat est positif : il a le signe $-$, pour $z = 1$; il y a donc une racine de z entre 1 et $\sqrt{\frac{4}{3}} = 1,1547$. Faisons $z = 1 + v$, v sera $< 0,1547$,

et on pourra négliger v^3, pour une 1re approximation; savoir, $2v + 3v^2 = \frac{q}{\sqrt{p^3}}$; résolvant cette équ. on a z, et, par suite,

$$x = \pm \tfrac{1}{3} \sqrt{p} \left(2 + \sqrt{1 + \frac{3q}{p\sqrt{p}}} \right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

On donne à cette valeur approchée de x un signe contraire à celui du dernier terme q; on procède ensuite à une approximation ultérieure par les procédés ordinaires (n° 538); l'expression (5), qui revient à $x = -\frac{1}{2} a \pm \sqrt{\delta}$, donne ensuite les deux autres racines.

Ainsi pour l'équation $x^3 - 5x + 3 = 0$, on a $x = -z\sqrt{5}$; d'où $z^3 - z = \frac{3}{5\sqrt{5}}$; d'où

$$x = -\tfrac{1}{3}\sqrt{5}\left(2 + \sqrt{1 + \frac{9}{5\sqrt{5}}}\right) = -\tfrac{1}{3}\sqrt{5} \,.\, 3{,}343 = -2{,}492;$$

puis par suite, $x = -2{,}490862$, $1{,}834245$ et $0{,}6566166$.

580. Mais si l'on veut recourir aux logarithmes, on préfère se servir du procédé suivant. Il suit du théorème (2), n° 572, en faisant $n = 3$, que le rayon étant un,

$$y^2 - 2y \cos \tfrac{1}{3} \varphi + 1 \textit{ divise } y^6 - 2y^3 \cos \varphi + 1.$$

Soit fait $x = m(y + y^{-1})$, dans $x^3 - px + q = 0$; nous mettons $-p$, parce que nous ne traitons ici que le cas où $27q^2 + 4p^3$ est négatif;

d'où, $$m^3 (y^3 + y^{-3}) + (3m^3 - pm)(y + y^{-1}) + q = 0.$$

On chasse le deuxième terme en posant $3m^2 = p$; d'où, $m = \sqrt{\tfrac{1}{3} p}$. Donc $y^6 + \frac{qy^3}{\sqrt{(\frac{1}{3}p)^3}} + 1 = 0$. Mais dans le cas que nous traitons, t est imaginaire dans l'équ. (2), ou $(\tfrac{1}{2}q)^2 < (\tfrac{1}{3}p)^3$: on peut donc trouver un arc φ dont le cos soit la moitié du facteur de y^3, puisque cette moitié est < 1;

$$\cos \varphi = \frac{-q}{2 \,.\, \frac{1}{3} p \sqrt{(\frac{1}{3} p)}}; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

alors la proposée, se trouvant réduite à notre 2e trinôme, est divisible par $y^2 - 2y \cos \tfrac{1}{3} \varphi + 1 = 0$; divisant par y, on a

$y + y^{-1} = 2\cos\frac{1}{3}\varphi$; et comme $x = m\,(y + y^{-1})$, on a

$$x = 2\sqrt{(\tfrac{1}{3}p)}\,.\,\cos\tfrac{1}{3}\varphi. \quad \ldots\ldots \quad (8)$$

L'arc φ sera donné par un calcul logarithmique : on en prendra le tiers, auquel on ajoutera 120° et 240°, parce qu'on peut prendre, outre l'arc trouvé dans la table, les arcs $\varphi + 2\pi$, $\varphi + 4\pi$, qui ont le même cosinus. L'équ. (8), où $\cos\frac{1}{3}\varphi$ prend trois valeurs, déterminera les trois racines réelles.

Soit, par ex., $x^3 - 5x - 3 = 0$; on a $p = 5$, $q = -3$, $\cos\varphi = \dfrac{3}{2\,.\,\frac{5}{3}\sqrt{\frac{5}{3}}}$. Le calcul ci-contre donne $\varphi = 45°48'\,9''$, dont le tiers est 15° 16′ 3″. On y ajoutera 120° et 240°, et l'on prendra les cosinus, qui sont

5 . . .		0,6989700
3 . . .	—	0,4771213
diff. . . .		0,2218487
moitié . . .		0,1109243
2 . . .		0,3010300
dén. . . .	—	0,6338030
3. . . .	+	0,4771213
cos φ . . .		$\bar{1}$.8433183

cos 15° 16′ 3″ — sin 45° 16′ 3″, — cos 75° 16′ 3″.

On prend ci-contre,

$2\sqrt{\frac{5}{3}}$ . . .	0,4119543	0,4119543	0,4119543
$\cos\frac{1}{3}\varphi$	$\bar{1}$,9843955	$\bar{1}$,8515032—	$\bar{1}$,4053576—
x	0,3963498,	0,2634575—,	$\bar{1}$,8173119—,
$x =$	2,490862	—1,834245	—0,6566166

Pour l'équ. $x^3 - 5x + 3 = 0$, il suffit de changer x en $-x$, et l'on retombe sur l'équ. précédente ; on a donc les mêmes racines en signes contraires. Au reste, en traitant directement cet ex., l'équ. (5) donnant $\cos\varphi$ négatif, l'arc φ est $> 90°$, et le supplément du précédent : le calcul se continue de même.

Soit l'équ. $x^3 - 4x + 1 = 0$: d'où $\cos\varphi = \dfrac{-1}{2\,.\frac{4}{3}\sqrt{\frac{4}{3}}}$. Le calcul donne $\varphi = 108°\,57'\,3'',5$, et l'on obtient enfin. . . . .
$x = 1{,}860807$ . . . . — 2,114907 . . . . 0,254099 . . . .

Equations du quatrième degré.

581. Soit proposée l'équ. $x^4 + px^2 + qx + r = 0$; pour la résoudre, employons la même marche que pour le 3e degré; regar-

dons x comme formé de deux parties y et z, $x=y+z$; d'où

$$y^4+(6z^2+p)y^2+(z^4+pz^2+qz+r)$$
$$+4zy^3+(4z^3+2pz+q)y=0.$$

Mais nous pouvons poser une relation à volonté entre y et z : égalant à zéro la 2e ligne qui renferme les puissances impaires de y, nous avons

$$y^2=-z^2-\frac{p}{2}-\frac{q}{4z}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

La transformée devient, en éliminant y^2,

$$z^6+\tfrac{1}{2}pz^4+\tfrac{1}{16}(p^2-4r)z^2-\tfrac{1}{64}q^2=0,$$

équ. qui n'a que des puissances paires de z. Faisons donc, pour simplifier, $z^2=\frac{1}{4}t$, et nous aurons

$$t^3+2pt^2+(p^2-4r)t-q^2=0. \quad . \quad . \quad . \quad (A)$$

C'est *la réduite* qui est du 3e degré, et a nécessairement au moins une racine réelle et positive * : désignons par t cette racine ; nous avons $z=\pm\frac{1}{2}\sqrt{t}$, où le signe est arbitraire. Substituant dans $x=y+z$ et dans (1), il vient

$$x=y\pm\tfrac{1}{2}\sqrt{t},\ y^2=\tfrac{1}{4}\left(-t-2p\mp\frac{2q}{\sqrt{t}}\right). \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

On trouve enfin, en ayant égard à la correspondance des signes, et éliminant y,

$$\left.\begin{aligned} x&=\tfrac{1}{2}\sqrt{t}\pm\tfrac{1}{2}\sqrt{\left(-t-2p-\frac{2q}{\sqrt{t}}\right)}\\ x&=-\tfrac{1}{2}\sqrt{t}\pm\tfrac{1}{2}\sqrt{\left(-t-2p+\frac{2q}{\sqrt{t}}\right)}\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (B)$$

Ainsi l'on résoudra la réduite (A) ; et prenant une racine positive t, on la substituera dans les formules (B), qui donneront les quatre valeurs de x.

Soit, par ex., $2x^4-19x^2+24x=\frac{23}{8}$; $p=-\frac{19}{2}$, $q=12$, etc. ;

* Il faut dégager cette équ. de son 2e terme, en posant $t=\frac{1}{3}(u-2p)$: d'où

$$u^3-3u(p^2+12)+12pr-2p^3-27q^2=0.$$

la réduite est $t^3 - 19t^2 + 96t = 144$. L'une des racines $t = 3$ donne

$$x = \frac{1}{2}\sqrt{3} \pm \sqrt{(4 - 2\sqrt{3})}, \text{ et } -\frac{1}{2}\sqrt{3} \pm \sqrt{(4 + 2\sqrt{3})};$$

et comme (p. 135) $\sqrt{(4 \pm 2\sqrt{3}} = 1 \pm \sqrt{3}$,

on a $$x = 1 \pm \frac{1}{2}\sqrt{3}, \quad x = -1 \pm \frac{3}{2}\sqrt{3}.$$

L'équation $x^4 - 25x^2 + 60x - 36 = 0$ a pour réduite, $t^3 - 50t^2 + 769t = 3600$; prenons $t = 9$, et nous aurons $x = 3, 2, 1$ et -6.

Pour $x^4 - x + 1 = 0$, on a $t^3 - 4t = 1$; d'où $t = 2{,}114907....$ (*voy.* p. 144); on en tire

$$x = -0{,}7271360 \pm 0{,}934099 \sqrt{-1},$$
$$x = +0{,}727136 \pm 0{,}4300139 \sqrt{-1},$$

Enfin, l'équation $x^4 - 3x^2 - 42x = 40$ donne

$$t^3 - 6t^2 + 169t = 1764;$$

d'où $t = 9$; puis $x = 4, \ -1$ et $\frac{1}{2}(3 \pm \sqrt{-31})$.

582. Si l'on mettait pour t, dans les équ. B, toute autre racine de la réduite, on n'obtiendrait pas des valeurs différentes pour x, et l'on ne préfère la racine positive t aux deux autres t' et t'', que pour la commodité des calculs. En effet, exprimons ces valeurs B en fonction des trois racines. On a

$$t + t' + t'' = -2p, \quad t \,.\, t' \,.\, t'' = q^2;$$

la 1re donne $$t' + t'' = -2p - t,$$

la 2e $$\sqrt{(t'\,t'')} = \frac{q}{\sqrt{t}} \quad \ldots\ldots\ldots (3)$$

d'où $$x = \frac{1}{2}\sqrt{t} \pm \sqrt{(\tfrac{1}{4}t' + \tfrac{1}{4}t'' - \tfrac{1}{2}\sqrt{t'\,t''})},$$

ou bien $x = \frac{1}{2}\ (\sqrt{t} \pm \sqrt{t'} \mp \sqrt{t''})$
de même $x = \frac{1}{2}(-\sqrt{t} \pm \sqrt{t'} \pm \sqrt{t''})$ $\ldots\ldots (4)$

Ces équ. ne conviennent qu'autant que q est positif; car il faut observer que la réduite ne contenant pas q, mais q^2, convient à la proposée quel que soit le signe de q, bien que les racines x soient différentes pour $+q$ et pour $-q$. Mais dans les équ. B, comme on doit substituer la valeur de q avec son signe, cette circonstance ré-

tablit les données telles qu'elles sont. Il n'en est pas de même dans les équ. (4) où q n'entre plus ; aussi faut-il avoir égard au signe de q dans l'équ. (3), et prendre $\sqrt{t}$ en —, quand q est négatif, pour que les deux membres y aient le même signe ; les radicaux des deux parts, devant recevoir le $\pm$. Ainsi, quand q sera négatif, il faudra poser $\sqrt{(t'\,t'')} = -\dfrac{q}{\sqrt{t}}$, ce qui donne aux valeurs B la forme

$$\left.\begin{array}{l} x = \frac{1}{2}\ \ (\sqrt{t} \pm \sqrt{t'} \pm \sqrt{t''}) \\ x = \frac{1}{2}(-\sqrt{t} \pm \sqrt{t'} \mp \sqrt{t''}) \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Or remarquons que, dans l'un ou l'autre de ces deux cas, les équ. 4 et 5 sont symétriques en t, t' et t'', c'est-à-dire que les expressions donnent les quatre mêmes valeurs, lorsqu'on change l'une de ces lettres en l'autre. Ainsi ces équ. 4 et 5 étant les mêmes que B sous une autre forme, les équ. B ne donnent que 4 racines.

Les formes 4 et 5 sont d'ailleurs propres à faire reconnaître la nature des racines de x : car

1° *Si la réduite a ses trois racines réelles*, il ne peut arriver que deux cas ; comme leur produit $t \, . \, t' \, . \, t'' = q^2$ est positif, ou deux sont négatives, ou aucune ne l'est. Dans ce dernier cas, $\sqrt{t}$, $\sqrt{t'}$, $\sqrt{t''}$ sont réels, et nos quatre racines de x sont réelles. Dans l'autre cas, au contraire, $\sqrt{t'}$ et $\sqrt{t''}$ sont imaginaires, et les quatre valeurs de x le sont aussi. Donc, *quand la réduite tombe dans le cas irréductible, la proposée a ses quatre racines ensemble réelles ou imaginaires, selon que* t *a trois valeurs positives ou une seule.* On en a vu des exemples ci-dessus.

Cependant s'il arrive, dans ce 2e cas, que $t' = t''$, comme deux de nos valeurs de z contiennent la différence des radicaux $\sqrt{t'}$, $\sqrt{t''}$, les imaginaires s'entre-détruisent, et la proposée a deux racines réelles et égales, et deux imaginaires.

2° *Si la réduite n'a qu'une seule racine réelle* t, comme t est alors positif, $\sqrt{t}$ est réelle. D'ailleurs, désignons t' et t'' par $a \pm b\sqrt{-1}$, d'où

$$\sqrt{t'} \pm \sqrt{t''} = \sqrt{(a + b\sqrt{-1})} \pm \sqrt{(a - b\sqrt{-1})};$$

le carré est $\quad (\sqrt{t'} \pm \sqrt{t''})^2 = 2a \pm 2\sqrt{(a^2 + b^2)}$.

Ce dernier radical est visiblement réel et $> a$; ainsi, notre carré a deux valeurs réelles, l'une positive, l'autre négative : en extrayant

la racine, qui est $\sqrt{t'} \pm \sqrt{t''}$, on a donc une quantité réelle $\sqrt{A}$ d'une part, et une imaginaire $\sqrt{-B}$ de l'autre. Remontant aux valeurs précédentes de x, on voit clairement que *si la réduite n'a qu'une seule racine réelle* t, *celle-ci est positive, et la proposée a deux racines réelles et deux imaginaires.*

CHAPITRE IV.

FONCTIONS SYMÉTRIQUES.

Puissances des racines des Equations.

583. On dit qu'une fonction est *symétrique* ou *invariable,* quand elle n'éprouve aucune altération, en y échangeant toutes les lettres qui s'y trouvent l'une en l'autre : telles sont $a^2 + b^2$, $\sqrt{a} + \sqrt{b}$, $a + b + \sin a . \sin b$, etc., qui demeurent les mêmes lorsqu'on met b pour a, et a pour b. Les coefficients des divers termes d'une équ. $fx = 0$ sont des fonctions symétriques des racines $a, b, c \ldots$ (n° 502).

Nous représenterons à l'avenir, par $[a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots]$, la fonction symétrique dont $a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots$ est un terme, et dont on obtient les autres termes en échangeant chaque lettre $a, b, c \ldots$ en toutes les autres successivement : par S_m la somme des puissances m de ces racines, ou $S_m = a^m + b^m + c^m \ldots$ Or, sans connaître ces racines, prouvons qu'on peut toujours trouver les quantités S_m et $[a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots]$, quels que soient les entiers $m, \alpha, \beta, \gamma \ldots$, en fonction des coefficients $p, q \ldots$ de la proposée,

$$fx = x^m + px^{m-1} + qx^{m-2} \ldots + tx + u = 0.$$

fx est identique avec $(x-a) . (x-b) . (x-c) \ldots$, et l'on a vu (n° 520, 2°) que la dérivée $f'x$ est

$$mx^{m-1} + (m-1)\,px^{m-2} \ldots + t = (x-b)\ (x-c) \ldots + (x-a)\ (x-c) \ldots \text{ etc.}$$

En divisant par fx, on trouve

$$\frac{mx^{m-1} + (m-1)\,px^{m-2} \ldots + t}{x^m + px^{m-1} + qx^{m-2} \ldots + u} = \frac{1}{x-a} + \frac{1}{x-b} + \frac{1}{x-c} \ldots$$

En développant $(x-a)^{-1}$, on a (page 15, I)

$$\frac{1}{x-a}=\frac{1}{x}+\frac{a}{x^2}+\frac{a^2}{x^3}+\frac{a^3}{x^4}+\ldots.$$

Changeant a en $b, c\ldots$; et prenant la somme de tous ces résultats, notre second membre est

$$=\frac{m}{x}+\frac{S_1}{x^2}+\frac{S_2}{x^3}+\frac{S_3}{x^4}+\text{etc.}$$

Multipliant donc l'équ. par $x^m+px^{m-1}+qx^{m-2}+rx^{m-3}\ldots.$

$$mx^{m-1}+(m-1)\,px^{m-2}+(m-2)\,qx^{m-3}\ldots+t=$$

$$\begin{array}{rl|rl|rl|l|rl|l}
mx^{m-1} & +S_1 & x^{m-2} & +S_2 & x^{m-3} & +S_3 & x^{m-4}\ldots\text{etc.} & \ldots & +S_l & x^{m-l-1}\ldots \\
 & +mp & & +pS_1 & & +pS_2 & \ldots & \ldots & +pS_{l-1} & \ldots\ldots \\
 & & & +mq & & +qS_1 & \ldots & \ldots & +qS_{l-2} & \ldots\ldots \\
 & & & & & +mr & \ldots & \ldots & +rS_{l-3} & \ldots\ldots
\end{array}$$

Le 1[er] membre a m termes; le second va à l'infini, chaque ligne ayant son 1[er] terme reculé d'un rang de plus à droite que dans la ligne qui précède; il y a $m+1$ lignes. En comparant les coefficients des mêmes puissances de x dans cette identité, on obtient une infinité d'équ. Les m 1[res] équ. ont chacune un terme de plus que la précédente; elles sont (en supprimant mp, $mq\ldots$, aux deux membres)

$$S_1+p=0,\quad S_2+pS_1+2q=0,\quad S_3+pS_2+qS_1+3r=0\ldots,$$
$$S_k+pS_{k-1}+qS_{k-2}+rS_{k-3}\ldots+kv=0,\quad\ldots\quad(A)$$

k étant un entier $< m$, et v le coefficient de x^{m-k} dans fx. Au delà de ces m équ., le 1[er] membre ne donne plus de terme à comparer avec ceux du 2[e], et l'on trouve

$$S_l+pS_{l-1}+qS_{l-2}+rS_{l-3}\ldots+uS_{l-m}=0,\quad\ldots\quad(B)$$

l étant un entier $>$ ou $=m$. On a $S_0=a^0+b^0\ldots=m$.

584. Ces équ. sont dues à Newton : en voici l'usage.

La 1[re] donne $S_1=-p$, valeur qui, introduite dans la 2[e], donne S_2; on a ensuite $S_3\ldots$

$$S_1=-p,\quad S_2=-pS_1-2q,\quad S_3=-pS_2-qS_1-3r\ldots;$$

et ainsi de proche en proche. En général, la valeur de S_l conduit

à cette règle. Sous les m termes qui, dans la série des S, précèdent celui S_l qu'on veut calculer, écrivez les coefficients de fx en ordre inverse, avec des signes contraires ; multipliez chaque terme par celui qui est au-dessous, ajoutez, et vous aurez le terme suivant S_l:

$$\begin{matrix} S_{l-m}, & S_{l-m-1} \ldots & S_{l-3}, & S_{l-2}, & S_{l-1}, \\ -u, & -t \ldots & -r, & -q, & -p. \end{matrix}$$

Soit, par ex., l'équ. $x^3 - 3x^2 + 2x - 1 = 0$, où $p = -3$, $q=2$, $r = -1$; les facteurs seront $1, -2$ et 3. Ainsi, on trouve d'abord $S_0 = 3$, $S_1 = 3$, $S_2 = 5$; la série des S se continue comme il suit, chaque terme étant formé du produit des trois qui le précèdent, multipliés respectivement par $1, -2$ et 3,

3, 3, 5, 12, 29, 68, 158, 367, 853, 1983, 4610, 10717, 24914, 57918.

Pour $x^3 - 3x^2 + 12x = 4$, les facteurs sont $4, -12$ et 3, et l'on obtient

3, 3, -15, -69, -15, 723, 2073, -2517, -29535....

Enfin, pour $x^3 - 2x = 5$, les multiplicateurs sont 5, 2 et 0 ; on trouve 3, 0, 4, 15, 8, 50, 91, 140, 432....

En appliquant ce théorème à $x^m - 1 = 0$, on trouve, comme page 128,

$$S_1 = S_2 = S_3 = \ldots = 0, \quad S_m = S_{2m} = \ldots = m.$$

Il est donc facile d'obtenir la somme de toutes les puissances entières des racines d'une équ. sans connaître ces racines. S'il s'agissait des puissances négatives, on changerait x en $\frac{1}{y}$, et l'on appliquerait nos formules à la transformée en y ; on aurait les sommes demandées. Pour l'équ. $x^3 - 3x^2 + 2x = 1$, on aurait les facteurs $1, -3$ et 2 de la transformée ; d'où les sommes des puissances positives, qui sont les négatives demandées,

3, 2, -2, -7, -6, 7, 25, 23, -22, -88....

585. *Cherchons à exprimer toute fonction symétrique* $[a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots]$, *à l'aide de* $S_1\ S_2\ S_3 \ldots$, le nombre des racines $a, b, c \ldots$ comprises dans chaque terme étant n. Cette fonction s'obtiendrait en permu-

tant les m lettres $a, b, c \ldots$ de toutes les manières possibles, n à n, donnant à la 1[re] lettre l'exposant α, β à la 2[e]....; le nombre des termes sera $[mPn]$. Cependant, s'il arrivait que deux exposants fussent égaux, $\alpha = \beta$, comme les initiales ab, ba n'apporteraient aucune modification au terme résultant a^2, le nombre des termes ne serait que la moitié du précédent : il serait le 6[e] dans le cas de trois exposants égaux, etc. (*voy.* n° 493).

Pour obtenir la valeur de $[a^\alpha b^\beta]$, dont les termes ne contiennent que deux des m racines, opérons les permutations, comme n° 492, en multipliant

$$S_\alpha = a^\alpha + b^\alpha + c^\alpha \ldots \text{ par } S_\beta = a^\beta + b^\beta + c^\beta \ldots$$

Si les facteurs partiels contiennent la même racine, le produit partiel a la forme $a^{\alpha+\beta}$; sinon ce produit est tel que $a^\alpha b^\beta$. Ainsi le résultat sera $S_{\alpha+\beta} + [a^\alpha b^\beta]$; donc

$$[a^\alpha b^\beta] = S_\alpha \times S_\beta - S_{\alpha+\beta} \ldots \ldots (C)$$

De même, pour la fonction $[a^\alpha b^\beta c^\gamma]$, multiplions $[a^\alpha b^\beta]$ par S_γ; (C) deviendra $= S_\alpha \times S_\beta \times S_\gamma - S_{\alpha+\beta} \times S_\gamma$. Formons le produit

$$(a^\alpha b^\beta + a^\alpha c^\beta + b^\alpha c^\beta + \ldots) \times (a^\gamma + b^\gamma + c^\gamma \ldots).$$

1° Si les facteurs partiels n'ont pas de racine commune, le produit partiel est tel que $a^\alpha b^\beta c^\gamma$; ces résultats réunis forment la fonction $[a^\alpha b^\beta c^\gamma]$ dont on cherche la valeur.

2° Si les facteurs partiels comprennent une racine commune, le terme est tel, que $a^{\alpha+\gamma} b^\beta$, ou $a^\alpha b^{\beta+\gamma}$, suivant que cette racine est le 1[er] facteur ou le 2[e]. De là résultent les fonctions $[a^{\alpha+\gamma} b^\beta]$, $[a^\alpha b^{\beta+\gamma}]$, dont l'équ. C donne les valeurs :

$$S_{\alpha+\gamma} \times S_\beta - S_{\alpha+\beta+\gamma}, \quad S_\alpha \times S_{\beta+\gamma} - S_{\alpha+\beta+\gamma};$$

on a donc. . . . . (D)

$$[a^\alpha b^\beta c^\gamma] = S_\alpha \cdot S_\beta S_\gamma - S_{\alpha+\beta} S_\gamma - S_{\alpha+\gamma} \cdot S_\beta - S_{\beta+\gamma} S_\alpha + 2S_{\alpha+\beta+\gamma}.$$

L'esprit de ce genre de calcul est facile à saisir, et l'on peut l'appliquer aux fonctions symétriques formées de quatre facteurs et au

delà. On sait donc évaluer ces fonctions à l'aide des seuls coefficients de la proposée, puisque les S sont connues par ce qu'on a exposé précédemment.

Observez que si la fonction symétrique proposée était fractionnaire, en la réduisant au même dénominateur, elle formerait une fraction dont chaque terme serait une fonction invariable. C'est ainsi que

$$\left[\frac{a}{b}\right], \text{ ou } \frac{a}{b}+\frac{b}{a}+\frac{a}{c}+\frac{c}{a}+\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\ldots : \frac{a}{b}=\frac{[a^2b]}{abc\ldots}.$$

Appliquons ces préceptes généraux.

Résolution numérique des Équations.

586. Plus a sera grand par rapport aux autres racines $b, c\ldots,$ plus S_k approchera d'être égal à son 1er terme a^k, et S_{k-1} à a_{k-1} : ces S sont d'ailleurs connues d'avance. Donc, en divisant, on trouve $a=S_k : S_{k-1}$. Ainsi, après avoir formé la série des nombres S_0, S_1, $S_2, \ldots$, le quotient de chaque terme par celui qui le précède, approchera de plus en plus de la racine supérieure a, à mesure que l'indice de S sera plus élevé. On pourrait de même obtenir la moindre racine (nº 507, 2º).

Les imaginaires peuvent modifier notre proposition; car soit $x=\alpha\pm\beta\sqrt{-1}$: faisons $\alpha=\lambda\cos\varphi$, $\beta=\lambda\sin\varphi$, ce qui est toujours permis, puisqu'il en résulte

$$\lambda^2=\alpha^2+\beta^2,\quad \text{tang}\,\varphi=\frac{\beta}{\alpha},$$

équ. d'où l'on peut conclure λ et l'arc φ dans tous les cas. On a $x=\lambda(\cos\varphi\pm\sin\varphi.\sqrt{-1})$; d'où (note, page 129)

$$(\alpha\pm\beta\sqrt{-1})^k=\lambda^k(\cos k\varphi\pm\sin k\varphi.\sqrt{-1}).$$

Nos deux racines imaginaires supposées, introduisent donc dans S_k le terme $2\lambda^k\cos k\varphi$. Il faut donc que λ, ou $\sqrt{(\alpha^2+\beta^2)}$ soit moindre que la plus grande racine a, pour que le théorème précédent soit vérifié.

Pour le 1er ex. de la page 148, on a $S_{13}=57918$, $S_{12}=24914$;

le quotient $\frac{57918}{24914} = 2,3247177$ est une valeur approchée de x.

587. Cherchons l'équation au carré des différences,

$$Fz = z^n + Pz^{n-1} + Qz^{n-2} \ldots + U = 0,$$

où les inconnues sont $P, Q \ldots U$. Nous avons

$$(x-a)^l = x^l - lax^{l-1} + A' a^2 x^{l-2} - A'' a^3 x^{l-3} \ldots \pm a^l,$$
$$(x-b)^l = x^l - lbx^{l-1} + A' b^2 x^{l-2} - A'' b^3 x^{l-3} \ldots \pm b^l,$$
$$(x-c)^l = x^l - lcx^{l-1} + A' \text{ etc.}$$

Ces équ. sont en nombre m; $l, A', A'' \ldots$ sont les coefficients du binôme pour la puissance l. Ajoutons, le 2e membre sera

$$mx^l - lS_1 x^{l-1} + A'S_2 x^{l-2} - A''S_3 x^{l-3} \ldots \pm S_l.$$

Changeons successivement x en $a, b, c \ldots$,

$$(a-b)^l + (a-c)^l \ldots = ma^l - lS_1 a^{l-1} + \ldots \pm S_l,$$
$$(b-a)^l + (b-c)^l \ldots = mb^l - lS_1 b^{l-1} + \ldots \pm S_l,$$
$$(c-a)^l + \text{ etc.}$$

En ajoutant toutes ces équ., le 1er membre est *la somme des puissances* l *des différences de toutes les racines, retranchées deux à deux.* Le 2e membre est

$$mS_l - lS_1 S_{l-1} + A'S_2 S_{l-2} - A''S_3 S_{l-3} + \ldots \pm mS_l.$$

Or, si l est impair, on ne peut rien tirer de cette formule, car les différences sont égales deux à deux en signes contraires, et leurs puissances l s'entre-détruisent. Le 2e membre est formé de termes dont ceux qui sont à égale distance des extrêmes ont même coefficient, mêmes indices pour S, avec des signes contraires ; ces termes se détruisent donc aussi : de là $0 = 0$.

Mais si l est pair, $(a-b)^l, (b-a)^l \ldots$ sont égaux deux à deux, et chaque terme du 1er membre est double ; d'ailleurs, les parties du 2e sont encore égales deux à deux, mais ont même signe : elles se doublent donc aussi, excepté le terme moyen, qui ne s'accouple avec aucun autre. Prenant la moitié des deux membres, chaque terme redevient simple, et il faut réduire le terme moyen à moitié. Ainsi, d'une part, faisant $l = 2i$, le 1er membre devient la somme des puissances $2i$ des diff. des racines, ou celle des puissances i des carrés de ces diff., somme que nous représenterons par f_i. D'une autre part $2i, A', A'' \ldots$ désignant les coefficients du binôme, pour

l'exposant $2i$ il vient (p. 5)

$$f_i = mS_{2i} - 2iS_{2i}.\ S_{2i-1} + A'S_2S_{(2i-2)} - A''S_3S_{(2i-3)}\dots$$

$$\pm\frac{1}{2}\cdot\frac{2i(2i-1)(2i-2)\dots(i+1)}{2.3.4\dots 2i}\times(S_i)^2\dots\dots (N)$$

Les coefficients $2i$, A' A''.... ont pour valeurs les nombres de la ligne $2i$ dans le tableau, p. 7; on doit s'arrêter au terme du milieu dont on prend la moitié. Ces facteurs sont pour

$i = 1$ . . . 1, 1
$i = 2$ . . . 1, 4, 3
$i = 3$ . . . 1, 6, 15, 10
$i = 4$ . . . 1, 8, 28, 56, 35
$i = 5$ . . . 1, 10, 45, 120, 210, 126
$i = 6$ . . . 1, 12, 66, 220, 495, 792, 462, etc.

D'où l'on tire

$f_1 = mS_2 - (S_1)^2$
$f_2 = mS_4 - 4S_1S_3 + 3(S_2)^2$
$f_3 = mS_6 - 6S_1S_5 + 15S_2S_4 - 10(S_3)^2$
$f_4 = mS_8 - 8S_1S_7 \dots + 35(S_4)^2$
$f_5 = mS_{10} - 10S_1S_9 \dots - 126(S_5)^2$
$f_6 = mS_{12} - 12S_1S_{11}\dots + 462(S_6)^2$.

Cela posé, si l'on a calculé la série $S_0S_1S_2\dots$, on pourra tirer de cette équ. les valeurs de $(a-b)^2 + (a-c)^2\dots$, en faisant $i=1$; ce sera la somme f_1 des puissances 1 des racines de $Fz=0$; $i=2$ donnera de même $(a-b)^4+(a-c)^4\dots$, ou f_2, etc. En général, l'équ. (N) donnera la somme f_i des puissances i des racines de l'équ. au carré des différences. Or, d'après les équ. (A) p. 148, appliquées à cette équ., on a

$$P = -f_1,\ Q = -\tfrac{1}{2}(Pf_1 + f_2),\ R = -\tfrac{1}{3}(Qf_1 + Pf_2 + f_3)\dots$$

Le calcul des f devra être poussé jusqu'à l'indice $n = \frac{1}{2}m(m-1)$, degré de Fz, et celui des S jusqu'à un indice double.

Pour $x^3 + qx + r = 0$, les $S_0S_1\dots$ sont

$$3,\ 0,\ -2q,\ -3r,\ 2q^2,\ 5qr,\ -2q^3+3r^2;$$

d'où $\quad f_1 = -6q,\ f_2 = 18q^2,\ f_3 = -66q^3 - 81r^2;$

$$P = 6q,\quad Q = 9q^2,\quad R = 27r^2 + 4q^3;$$

Ce sont les coefficients de l'équ. au carré des différences pour le 3ᵉ degré. On trouvera les formules pour le 4ᵉ et le 5ᵉ degré dans la *Résolution numér.* de Lagrange, nᵒˢ 38, 39 et note III.

Equations du second degré.

588. L'équ. $x^2 + px + q = 0$ ayant a et b pour racines inconnues, cherchons la valeur $z = c + mb$, m étant un nombre arbitraire. Comme $a + b = -p$, ces deux équ. feront connaître a et b, quand z sera obtenu. Mais on ne peut trouver cette valeur de $a + mb$, sans obtenir aussi celle de $b + ma$; z, ayant ces deux racines, est donné par cette autre équ. du 2ᵉ degré

$$[z - (a + mb)] \times [z - (b + ma)] = 0.$$

Il est donc impossible de tirer parti de ce calcul, tant que m demeure quelconque. Mais si cette équ. en z est privée du 2ᵉ terme, ce qui arrive quand $m = -1$, on a

$$z^2 = (a - b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab = S_2 - 2q;$$

et comme (p. 148) $S_2 = p^2 - 2q$, on trouve

$$z = a - b = \pm\sqrt{(p^2 - 4q)}, \quad a + b = -p,$$

d'où l'on tire enfin les deux racines a et b.

Équations du troisième degré.

589. Les racines de $x^3 + px + q = 0$ étant a, b, c, la quantité $z = a + mb + nc$ est susceptible de 6 valeurs (équ. 2 ci-après), quand m et n sont quelconques : et comme on ne peut trouver l'une de ces valeurs, sans que le calcul donne en même temps les 5 autres, z doit être racine d'une équ. du 6ᵉ degré : il est donc inutile d'espérer qu'on trouvera z avant x. Cependant si l'on admet que m et n peuvent recevoir des valeurs telles, que cette équ. en z soit $z^6 + Az^3 + B = 0$, résoluble par le 2ᵉ degré (nº 575, on en tire bientôt z, et ensuite x. En effet, posant $z^3 = u$, on a

$$u = -\tfrac{1}{2}A \pm \sqrt{(\tfrac{1}{4}A^2 - B)} = z^3. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Désignant par z' et z'' les deux racines cubiques de u, et par 1, α, α^2 celles de l'unité (nº 569), les six valeurs de z doivent résulter

de tous les changements de place entre a, b, c, dans le trinôme $a + mb + nc$: posons

$$\begin{array}{rl|rl} z' &= a + mb + nc & z'' &= a + nb + mc, \\ \alpha z' &= b + mc + na & \alpha^2 z'' &= b + nc + ma, \\ \alpha^2 z' &= c + ma + nb & \alpha z'' &= c + na + mb. \end{array} \quad . \; . \; . \; (2)$$

Chaque lettre passe ici d'un rang à celui qui est à gauche, et le 1er terme à la dernière place. Il reste donc à déterminer les arbitraires m et n, de manière à ce que ces six équ. soient réalisées. Multiplions $\alpha z'$ par α^2; il vient, à cause de $\alpha^3 = 1$,

$$z' = \alpha^2 b + m\alpha^2 c + n\alpha^2 a = a + mb + nc.$$

L'identité exige que les coefficients respectifs de a, b, c, soient égaux, ou $\alpha^2 = m$, $m\alpha^2 = n$, $n\alpha^2 = 1$; donc $m = \alpha^2$, $n = \alpha$. En substituant dans les six équ. (2), on trouve qu'elles sont une conséquence de

$$z' = a + \alpha c + \alpha^2 b, \quad z'' = a + \alpha b + \alpha^2 c. \quad . \; . \; (3)$$

Ainsi, en prenant $m = \alpha^2$, $n = \alpha$, notre trinôme a six valeurs, qui ne forment que deux cubes différents z'^3, z''^3; car en multipliant les équations (3) par α et α^2, on reproduit les 6 équations (2) dont les 1ers membres n'ont visiblement pour cubes que z'^3 et z''^3.

Il est donc certain que les 6 valeurs de z sont racines d'une équ. de la forme $z^6 + Az^3 + B = 0$, ou

$$(z^3 - z'^3)(z^3 - z''^3) = z^6 - (z'^3 + z''^3)z^3 + z'^3 z''^3 = 0;$$

il reste à déterminer A et B, savoir :

$$A = -(z'^3 + z''^3), \quad B = (z' \,.\, z'')^3;$$

car une fois A et B connus en fonction des coefficients p et q, l'équ. (1) donnera les valeurs de z^3, dont les racines cubiques z' et z'' seront connues. Les équ. (3) donneront ensuite a, b, c, comme nous le montrerons.

Développons le cube de $z' = a + \alpha c + \alpha^2 b$, en mettant 1 pour α^3 chaque fois qu'il se rencontre,

$$z'^3 = S_3 + 6abc + 3\alpha(a^2c + b^2a + c^2b) + 3\alpha^2(a^2b + c^2a + b^2c).$$

On obtient z''^3 en changeant ici b en c; ajoutons ces deux résul-

tats, il vient

$$-A = 2S_3 - 12q + 3(\alpha + \alpha^2)[a^2b] = 5S_3 - 12q,$$

à cause de $abc = -q$, $S_1 = 0$, $\alpha + \alpha^2 = -1$, et de la formule (C, p. 150) qui donne $[a^2b] = S_1S_2 - S_3$; et comme $S_3 = -3q$, on a $A = 27q$.

D'un autre côté, $z'z'' = S_2 + (\alpha + \alpha^2)[ab] = -3p$,

à cause de $S_2 = -2p$, $[ab] = p$, $\alpha + \alpha^2 = -1$,

le cube est $B = -27p^3$.

Ainsi, $$u = -27\left(\tfrac{1}{2}q \pm \sqrt{\tfrac{1}{4}q^2 + \tfrac{1}{27}p^3}\right) = z^3.$$

Comme ici les facteurs de 27 sont les racines t' et t'' de l'équation $t^2 + qt = (\frac{1}{3}p)^3$, on a $z^3 = 27t$.

Éliminant a, b, c, entre les équ. (3) et $a + b + c = 0$, qui provient de ce que la proposée n'a pas de 2ᵉ terme, on a

$$3a = z' + z'', \quad 3b = \alpha z' + \alpha^2 z'', \quad 3c = \alpha^2 z' + \alpha z'';$$

et puisque $z' = 3\sqrt[3]{t'}$, $z'' = 3\sqrt[3]{t''}$, on retrouve les valeurs du nº 578.

Equations du quatrième degré.

590. Pour résoudre l'équ. $x^4 + px^2 + qx + r = 0$, nous ne chercherons pas à former les valeurs de $z = a + lb + mc + nd$, qui sont au nombre de 24 ; mais de $z = a + b + m(c + d)$, qui n'en a que 6 : et même faisant $m = -1$, nous poserons

$$z = a + b - c - d,$$

dont les six valeurs sont égales deux à deux avec des signes contraires. La racine z sera donc donnée par une équ. du 6ᵉ degré, telle que $z^6 + Az^4 + Bz^2 + C = 0$, qui n'a que des puissances paires, en sorte que ces 6 valeurs n'ont que trois carrés différents. Posant $z^2 = t$, on retombera sur une équ. du 3ᵉ degré, qui donnera t, par suite z, et enfin x.

En développant le carré, on a

$$(a + b - c - d)^2 = (a + b + c + d)^2 - 4(ac + ad + bc + bd).$$

La 1re partie est nulle, puisque le 2e terme manque dans la proposée : ajoutant et ôtant $4(ab+cd)$, on a

$$(a+b-c-d)^2=-4[ab]+4(ab+cd).$$

Changeant b en c, puis en d, comme $[ab]=p$, on a

$$(a+c-b-d)^2=-4p+4(ac+bd),$$
$$(a+d-c-b)^2=-4p+4(ad+bc);$$

telles sont les valeurs de nos trois carrés z^2. Il est clair que les calculs seront plus simples, si l'on prend pour inconnue .... $u=\frac{1}{4}z^2+p$, puisque les valeurs de u seront

$$ab+cd,\quad ac+bd,\quad ad+bc:$$

formons l'équ. qui a ces trois racines. Comme on a

$$S_1=0,\ S_2=-2p,\ S_3=-3q,\ S_4=2p^2-4r,$$
$$S_5=5pq,\ S_6=-2p^3+6pr+3q^2,$$

on trouve, d'après la formule D, et en divisant par 2 ou 6 (p. 150), s'il y a lieu, que,

1° La somme des binômes est $[ab]=p$;

2° La somme de leurs produits 2 à 2 est

$$[a^2bc]=S_4-\tfrac{1}{2}S_2{}^2=-4r;$$

3° Le produit des trois binômes est $abcd\times S_2+[a^2b^2c^2]$,

ou $$rS_2+\tfrac{1}{6}S_2{}^3-\tfrac{1}{2}S_4\,.\,S_2+\tfrac{1}{3}S_6=-4pr+q^2;$$

ainsi, on a $$u^3-pu^2-4ru+4pr-q^2=0,$$

ou $$z^6+8pz^4+16z^2(p^2-4r)-64q^2=0,$$

en mettant $\frac{1}{4}z^2+p$ pour u. Une fois connues les trois valeurs de z^2, puis leurs racines $\pm(z, z'$ et $z'')$, il faudra tirer a, b, c, d des équations

$$-S_1=a+b+c+d=0,\quad a+c-b-d=z',$$
$$a+b-c-d=z,\quad a+d-b-c=z''.$$

Ajoutées 2 à 2, ces équ. donnent

$$a+b=\tfrac{1}{2}z,\quad a+c=\tfrac{1}{2}z',\quad a+d=\tfrac{1}{2}z'',$$

dont la somme $a=\frac{1}{4}(z+z'+z'')$: par suite, on a b, c et d. Or

z, z', z'' étant prises en $\pm$, on a 8 racines au lieu de 4 : et en effet, l'équ. en z dépendant de q^2 et non de q, notre calcul laisse le signe de q arbitraire. Le produit des trois dernières équ. est

$$\tfrac{1}{8}\, zz'z'' = a^3 + a^2(b + c + d) + [abc] = -q,$$

à cause de $-a = b + c + d$. Le produit $zz'\,z''$ a donc un signe contraire à q, d'où suivent ces deux systèmes, comme p. 144,

$$q \text{ positif, } x = \tfrac{1}{4}(z \pm z' \mp z''), \text{ et } \tfrac{1}{4}(-z \pm z' \pm z'');$$
$$q \text{ négatif, } x = \tfrac{1}{4}(z \pm z' \pm z''), \text{ et } \tfrac{1}{4}(-z \mp z' \pm z'').$$

Élimination.

591. Soient $Z = 0$, ou $kx^m + px^{m-1} + \text{etc.} + u = 0$,
$T = 0$, ou $k'x^n + p'x^{n-1} + \ldots + u' = 0$;

deux équ. en x et y. Si la 2ᵉ équ. est supposée résolue par rapport à x, savoir, $x = a, b, c \ldots$ on pourra substituer ces valeurs, qui sont en fonction de y dans $Z = 0$; il en résultera autant d'équations $A = 0$, $B = 0$, $C = 0 \ldots$, en y seul. Si la 1ʳᵉ est resolue, les valeurs $y = \alpha, \alpha', \alpha'' \ldots$ étant mises dans $x = a$, donneront les valeurs correspondantes $x = \beta, \beta', \beta'' \ldots$; de là les couples (α, β), $(\alpha', \beta') \ldots$, qui rendront Z et T nuls. On en dira autant pour $B = 0$ et $x = b$, $C = 0$ et $x = c \ldots$

En posant le produit $A \times B \times C \ldots = 0$, cette équ. aura pour racines toutes les valeurs de y ainsi obtenues ; ce sera donc *l'équation finale* en y, dégagée de toute racine étrangère. Il s'agit de composer le produit $ABC \ldots$

Mais comme ce produit ne doit pas varier quand on change a en b, en $c \ldots$, les coefficients sont fonctions symétriques de ces lettres, qu'on suppose être racines de l'équ. $T = 0$, résolue par rapport à x. On saura donc exprimer ces coefficients en S_1, S_2, $S_3 \ldots$ tirés de $T = 0$, c'est-à-dire, en fonction des coefficients de T, qui sont en y. Dès lors le produit $ABC \ldots$ se trouvant dégagé, d'abord de x, et ensuite de $a, b, c, \ldots$ ne contiendra que l'inconnue y.

Donc, mettez successivement pour x dans $Z = 0$, les lettres a, b, $c \ldots$ en nombre n égal au degré de x dans T; multipliez les polynômes résultants, les coefficients du produit seront des fonctions symétriques de $a, b, c \ldots$; tirez ensuite de $T = 0$ les valeurs de

S_1, S_2.... en y, et exprimez vos fonctions symétriques en S_1, S_2....: vous aurez l'équ. finale demandée.

Soient $x^3y - 3x + 1 = 0$, $x^2(y-1) + x - 2 = 0$;
d'où $(a^3y - 3a + 1)(b^3y - 3b + 1) = 0$,

$$a^3b^3y^2 + yS_3 - 3aby\,S_2 + 9ab - 3S_1 + 1 = 0.$$

Mais on tire de la deuxième équation proposée

$$S_1 = \frac{-1}{y-1},\ ab = \frac{-2}{y-1},\ S_2 = \frac{1}{(y-1)^2} + \frac{4}{y-1} \ldots;$$

enfin, on obtient la même équation finale que p. 64.

Ajoutant les exposants qui, dans chaque terme de Z, affectent x et y, désignons par m la plus grande de ces sommes ; m est ce qu'on nomme le *degré* de l'équ. $Z = 0$; y ne doit entrer qu'au premier degré au plus dans le coefficient p de x^{m-1}; au 2e dans celui q de x^{m-2}, etc. Soit n le degré de $T = 0$; prouvons que *le degré de l'équ. finale ne peut excéder le produit* mn *des degrés des équ. proposées.*

On sait que la valeur de S_1 ne contient d'autre coefficient que p'; celle de S_2 contient q', etc.... S_1, S_2, S_3.... ont donc leur degré en y, exprimé par leurs indices respectifs. D'un autre côté, un terme du produit $ABC \ldots$, tel que $y^i\left[a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots\right]$, a son degré $i + \alpha + \beta + \gamma \ldots = mn$ au plus, puisque chaque terme de A est au plus du degré m, et qu'il y a n facteurs A, B, C.... Il suit d'ailleurs des formules du n° 585, qui expriment des fonctions invariables, que $\left[a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots\right]$ sera en y du degré $\alpha + \beta + \gamma$.... Donc, le terme sera lui-même du degré mn au plus : C. Q. F. D.

Voyez un Mémoire de M. Poisson, 11e *Journal polytechnique.*

CHAPITRE V.

FRACTIONS CONTINUES.

Génération et Propriétés.

592. Pour approcher d'une racine de l'équ. $fx = 0$, soit y l'entier immédiatement moindre, et x' une nouvelle inconnue > 1, d'où $x = y + \frac{1}{x'}$: substituant dans $fx = 0$, on a une transformée

$Fx' = 0$. Soit y' l'entier au-dessous de x', on fera $x' = y' + \frac{1}{x''}$; puis $x'' = y'' + \frac{1}{x'''} \ldots x''$, x''' étant > 1; on obtiendra ainsi les équ. (A), et, par substitution, la valeur de x sous la forme (B) qu'on appelle une *fraction continue*.

$$\begin{aligned} x &= y + \frac{1}{x'} \\ x' &= y' + \frac{1}{x''} \quad (A) \\ x'' &= y'' + \frac{1}{x'''} \quad \text{etc.} \end{aligned} \qquad x = y + \cfrac{1}{y' + \cfrac{1}{y'' + \cfrac{1}{y''' + \cfrac{1}{y^{\text{IV}} + \text{etc.}}}}} \quad (B)$$

Les entiers $y, y', y'', y''', \ldots$ sont les *termes de la fraction continue*, que, pour abréger, nous écrirons ainsi :

$$x = y, y', y'', y''', y^{\text{IV}}, \ldots$$

L'évaluation de x en fraction ordinaire se fait par le procédé suivant. Soit, par exemple,

$$= 2, 1, 3, 2, 4 = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{4}}}}$$

Prenant d'abord la portion terminale $2 + \frac{1}{4}$, je la réduis à $\frac{9}{4}$: l'unité divisée par $\frac{9}{4}$ donne $\frac{4}{9}$, et x devient

$$x = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{4}{9}}}$$

de même $3 + \frac{4}{9} = \frac{31}{9}$; puis, $1 : \frac{31}{9} = \frac{9}{31}$, et $x = 2 + \cfrac{1}{1 + \frac{9}{31}}$, qui revient à $2 + 1 : \frac{40}{31} = 2 + \frac{31}{40}$; enfin $x = \frac{111}{40}$. La marche du calcul revient visiblement à celle de la p. 32, t. I. Dans les ex. suivants, la 1[re] ligne contient les termes de la fraction continue, et l'opération se fait ainsi : *Multipliez chaque terme par le nombre inscrit au-dessous, et ajoutez celui qui est à la droite de ce dernier; placez la somme au rang à gauche.*

$x =$	2,	1,	3,	2,	4		$x =$	3,	2,	1,	1,	3,	2,	4
111,	40,	31,	9,	4,	1		617,	182,	71,	40,	31,	9,	4,	1

On a donc $x = \frac{111}{40}$ d'une part, et $x = \frac{617}{182}$ de l'autre.

Lorsque la fraction continue va à l'infini, on l'arrête à l'un de ses termes, en négligeant tous les suivants; on n'a ainsi qu'une valeur approchée de x. Si l'on néglige x^{iv} dans les équ. (A), en posant $x''' = y'''$, x''' est rendu *trop petit;* cette valeur donne $x'' = y'' + \frac{1}{y'''}$, qui est *trop grand :* x' est à son tour *trop petit,* etc. En général, *suivant qu'on limite une fraction continue à un terme de rang pair ou impair, la valeur est* $>$ *ou* $<$ x. En arrêtant la fraction successivement au 1er terme y, au 2e y', au 3e y'', ... les résultats sont alternativement $< x$ et $> x$, qui est *compris entre deux consécutifs*. Ces résultats, qu'on nomme *fractions convergentes ou réduites*, seront représentés ici par

$$\frac{a}{a'},\ \frac{b}{b'},\ \frac{c}{c'},\ \frac{d}{d'}\ \ldots\ \frac{m}{m'},\ \frac{n}{n'},\ \frac{p}{p'}\ \ldots \quad (C$$

En prenant $\quad y,\ y',\ y'',\ y'''\ \ldots\ y^{i-2},\ y^{i-1},\ y^{i}\ldots$

pour dernier terme. On a

$$\frac{a}{a'} = \frac{y}{1},\ \frac{b}{b'} = \frac{yy'+1}{y'},\ \frac{c}{c'} = \frac{yy'y''+y''+y}{y'y''+1}\ \ldots$$

on voit que $\frac{c}{c'} = \frac{by''+a}{b'y''+a'}$. Pour avoir $\frac{d}{d'}$, remplaçons ici y'' par $y'' + \frac{1}{y'''}$, et $x = y,\ y',\ y''$ deviendra $x = y,\ y',\ y'',\ y'''$. Or le numérateur c devient

$$by'' + a + \frac{b}{y'''} = c + \frac{b}{y'''} = \frac{cy'''+b}{y'''},$$

le dénominateur d devient $\frac{c'y'''+b'}{y'''}$; d'où $\frac{d}{d'} = \frac{cy'''+b}{c'y'''+b'}$.

Et comparant ces valeurs de $\frac{c}{c'}$, $\frac{d}{d'}$, on voit que *le numérateur d'une convergente se déduit des deux précédents multipliés respectivement par* 1 *et par l'entier terminal, puis prenant la somme des produits : le dénominateur suit la même loi*. Cette loi appartient d'ailleurs à toutes les convergentes (C), puisqu'elle résulte d'un calcul sembla-

ble, aux accents près, pour chacune en particulier. Donc,

$$p = ny^i + m,\quad p^i = n'y^i + m'. \quad . \quad . \quad . \quad (D)$$

$$\frac{p}{p'} = \frac{ny^i + m}{n'y^i + m'}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (E)$$

Il suffit donc de former les deux 1res convergentes, pour en déduire consécutivement toutes les autres, par ex.,

$$x = 2, 1, 3, 2, 4, \text{ donne } \tfrac{2}{1}, \tfrac{3}{1}, \tfrac{11}{4}, \tfrac{25}{9}, \tfrac{111}{40},$$

fractions tour à tour $<$ et $>$ x dont $\frac{111}{40}$ est la valeur exacte. Ce procédé offre un second moyen d'obtenir cette valeur.

593. En éliminant y^i entre les équ. (D), il vient

$$pn' - p'n = -(nm' - n'm),$$

c'est-à-dire que *la différence des produits en croix des termes de deux convergentes consécutives, est constamment la même en signes contraires :* et comme pour les deux premières $\frac{a}{a'} = \frac{y}{1}$, $\frac{b}{b'} = \frac{yy'+1}{y'}$, *cette différence est* 1, on en conclut que

$$pn' - p'n = \pm 1,\ \frac{p}{p'} - \frac{n}{n'} = \pm \frac{1}{p'n'}; \quad . \quad . \quad . \quad (F)$$

on prend $+$ quand y^i et $\frac{p}{p'}$ sont de rangs pairs, $\frac{p}{p'} > \frac{n}{n'}$, et $-$ quand les rangs sont impairs *. Donc,

* Les différences entre les convergentes successives sont

$$\frac{b}{b'} - \frac{a}{a'} = \frac{1}{a'b'},\quad \frac{c}{c'} - \frac{b}{b'} = -\frac{1}{b'c'}, \ldots \quad \frac{p}{p'} - \frac{n}{n'} = \pm \frac{1}{p'n'} \ldots;$$

la somme de toutes ces équ. se réduit à

$$\frac{p}{p'} = \frac{a}{a'} + \frac{1}{a'b'} - \frac{1}{b'c'} + \frac{1}{c'd'} \ldots \pm \frac{1}{p'n'};$$

on obtient ainsi le développement de la valeur exacte de x, quand $\frac{p}{p'}$ est la dernière convergente, et une expression approchée de x lorsque la fraction continue va à l'infini. Dans notre ex.,

$$\frac{111}{40} = x = \frac{2}{1} + \frac{1}{1} - \frac{1}{4} + \frac{1}{36} - \frac{1}{360}.$$

1° Comme tout diviseur de p et p' devrait aussi diviser 1, p et p' sont premiers entre eux ; il en est de même de p et n, de p' et n'. *Les convergentes sont irréductibles ;*

2° Si dans l'équ. (E), on remplace y^i par la valeur totale z de la fraction continue, prise depuis le terme y^i jusqu'à la fin, $z = y^i$, y^{i+1}, y^{i+2}, ... il est clair qu'au lieu d'avoir une convergente, on aura la valeur exacte de x, savoir :

$$x = \frac{nz + m}{n'z + m'}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (G)$$

nous appellerons (G) une *fraction complète ;*

3° Retranchons $\frac{m}{m'}$ et $\frac{n}{n'}$ de x, pour obtenir les erreurs δ' et δ de chacune de ces convergentes :

$$\delta' = \frac{\pm z}{m'(n'z + m')}, \quad \delta = \frac{\mp 1}{n'(n'z + m')}. \quad \ldots \quad (H)$$

Les signes sont contraires, parce que x est compris entre les deux convergentes. Cette 2[e] différ. est moindre que la 1[re], puisque $m' < n'$ et $z > 1$, z contenant la partie entière et positive y^i : ainsi x est plus près de $\frac{n}{n'}$ que de $\frac{m}{m'}$: *les convergentes* (C) *sont de plus en plus approchées de* x, *alternativement par défaut et par excès,* d'où résulte leur dénomination ;

4° Lorsqu'on limite la fraction continue pour en tirer deux convergentes consécutives $\frac{m}{m'}, \frac{n}{n'}$, les erreurs δ', δ ont les valeurs (H) ; et comme $z > 1$, si l'on pose $z = 1$ dans la 2[e], on augmente la fraction, d'où

$$\delta = x - \frac{n}{n'} < \frac{\mp 1}{n'(n' + m')}. \quad \ldots \quad (K)$$

L'erreur de toute convergente $\frac{\mathrm{n}}{\mathrm{n}'}$ *est moindre que l'unité divisée par le produit de son dénominateur* n' *multiplié par la somme* n' + m' *de ce dénominateur et de celui de la fraction précédente.* Dans l'ex. cité, on a les fractions $\frac{11}{4}$ et $\frac{25}{9}$; celle-ci n'est pas fautive de $\frac{1}{117}$, 117 étant $= 9(9 + 4)$.

Souvent aussi on néglige le terme m', ce qui accroît encore la

fraction (K), et on a $\delta < \frac{1}{n'^2}$; *toute convergente est approchée de* x *à moins de* 1 *divisé par le carré de son dénominateur :* $\frac{25}{9}$ n'est pas en erreur de $\frac{1}{81}$.

594. Soient $\frac{h}{h'}, \frac{k}{k'}, \frac{l}{l'}$ des fractions croissantes quelconques : la différ. entre les extrêmes surpasse celle de chacune avec l'intermédiaire. Supposons en outre que h, h', l, l' soient tels qu'on ait $lh' - l'h = 1$; on trouve que

$$\frac{l}{l'} - \frac{h}{h'} = \frac{1}{l'h'} > \frac{kh' - k'h}{k'h'} \text{ et} > \frac{lk' - kl'}{k'l'}.$$

Ces numérateurs étant entiers et positifs, sont au moins 1 ; remplaçons-les par 1 ; il vient $l'h' < h'k'$ et $< k'l'$; donc $k' > l'$ et h', en supprimant les facteurs communs. k' est le plus grand des trois dénominateurs. De même, en renversant les trois fractions, on voit que $k > h$ et l. Ainsi la fraction intermédiaire est plus compliquée que les deux extrêmes.

Or x est entre $\frac{m}{m'}$ et $\frac{n}{n'}$; pour que la fraction $\frac{k}{k'}$ fût plus voisine de x que ces convergentes, il faudrait qu'elle tombât entre elles, et par conséquent fût plus composée. Donc *chaque convergente approche de* x *plus que toute autre fraction conçue en termes plus simples.*

A l'aide de $\frac{m}{m'}, \frac{n}{n'}$, composons les deux fractions

$$\frac{h}{h'} = \frac{m + (t-1)\,n}{m' + (t-1)\,n'},\quad \frac{l}{l'} = \frac{m + tn}{m' + tn'}.$$

t désigne ici 1, 2, 3.... jusqu'à y^i qui est l'entier contenu dans la convergente suivante ; d'où

$$\frac{m}{m'},\ \frac{m+n}{m'+n'},\ \frac{m+2n}{m'+2n'} \cdots \frac{m+y^in}{m'+y^in'} = \frac{p}{p'} \quad \ldots (L)$$

Or $\frac{l}{l'} - \frac{h}{h'} = \frac{\pm 1}{h'l'}$, quel que soit l'entier t : donc les fractions (L) sont irréductibles (1°); elles approchent de x plus que toute autre moins composée ; leurs différ. consécutives ayant même signe, ces

fractions croissent de la 1[re] à la dernière, et toutes sont $< x$, si les extrêmes sont de rangs impairs; dans le cas contraire, elles descendent vers x; enfin l'erreur δ de l'une d'elles $\frac{l}{l'}$ est $< \frac{1}{h'l'}$, puisque x est entre les deux fractions $\frac{l}{l'}$ et $\frac{h}{h'}$.

On peut donc insérer entre nos *convergentes principales* (C), $y^i - 1$ fractions qui jouissent des mêmes propriétés qu'elles. Ces *convergentes intermédiaires* se partagent en deux séries; les unes, insérées entre les rangs impairs, montent vers x, et les autres sont ascendantes vers x: on les forme en ajoutant terme à terme y^i fois successives, les convergentes $\frac{m}{m'}$, et $\frac{n}{n'}$.

Dans notre ex. on a. . . . . . $x = 2,\ 1,\ 3,\ 2,\ 4$
convergentes principales . . . . $\frac{2}{1},\ \frac{3}{1},\ \frac{11}{4},\ \frac{25}{9},\ \frac{111}{40}$.
Prenant $\frac{2}{1}$ et $\frac{3}{1}$, on en déduit $\frac{5}{2}$, $\frac{8}{3}$ et $\frac{11}{4}$, celle-ci est la 3[e] convergente principale, et on a fait 3 additions, à cause du terme 3. Partant de $\frac{11}{4}$ et $\frac{25}{9}$, je trouve $\frac{36}{13}$, $\frac{61}{22}$, $\frac{86}{31}$, $\frac{111}{40}$: les fractions de rangs pairs se traitent de même (cette série ne se limite pas), et on a

$$\left(\tfrac{2}{1}\right),\ \tfrac{5}{2},\ \tfrac{8}{3},\ \left(\tfrac{11}{4}\right),\ \tfrac{36}{13},\ \tfrac{61}{22},\ \tfrac{86}{31},\ < x = \left(\tfrac{111}{40}\right)$$
$$\left(\tfrac{3}{1}\right),\ \tfrac{14}{5},\ \left(\tfrac{25}{9}\right),\ \tfrac{136}{49},\ \tfrac{247}{89},\ \tfrac{358}{129},\ \tfrac{469}{169}\ldots > x.$$

Observons qu'on peut commencer la série des convergentes principales (C) par $\frac{0}{1}$ et $\frac{1}{0}$, qui remplissent toutes les mêmes conditions qu'elles.

Equations déterminées du premier degré.

595. Pour réduire en fraction continue la valeur de x dans l'équ. $Ax = B$, il faut, selon ce qu'on a dit n° 592, extraire l'entier y contenu dans $x = \frac{B}{A} = y + \frac{R}{A} = y + \frac{1}{x'}$, R étant le reste de la division de B par A :

$$\text{puis}\quad x' = \frac{A}{R} = y' + \frac{R'}{R},\quad x'' = \frac{R}{R'} = y'' + \frac{R''}{R'},\quad x''' = \text{etc.}$$

$$\text{donc}\quad x = y + \cfrac{1}{y' + \cfrac{1}{y'' + \cfrac{1}{y''', \text{ etc.}}}} = y,\ y',\ y'',\ y''',\ \text{etc.}$$

Cette opération donne pour termes de la fraction continue, les quotients successifs du calcul du commun diviseur entre A et B; cette fraction est toujours finie.

Par ex., pour l'équ. $2645\,x = 9752$; on a

$$9752 \left|\frac{2645}{3}\right|\frac{1817}{1}\left|\frac{828}{2}\right|\frac{161}{5}\left|\frac{23}{7}\right., \quad x = \frac{424}{115} = 3, 1, 2, 5, 7.$$

On en tire les convergentes principales et intermédiaires par les calculs (E) et (L), savoir :

$$\left(\tfrac{0}{1}\right), \tfrac{1}{1}, \tfrac{2}{1}, \left(\tfrac{3}{1}\right), \tfrac{7}{2}, \left(\tfrac{11}{3}\right), \tfrac{70}{19}, \tfrac{129}{35}, \tfrac{188}{51} \ldots\ldots < x = \tfrac{424}{115}$$
$$\left(\tfrac{1}{0}\right), \left(\tfrac{4}{1}\right), \tfrac{15}{4}, \tfrac{26}{7}, \tfrac{37}{10}, \tfrac{48}{13}, \left(\tfrac{59}{16}\right), \tfrac{483}{131}, \tfrac{907}{246} \ldots\ldots > x$$

la fraction $\frac{26}{7}$ est plus approchée de x que toute autre plus simple ; elle l'est à moins de $\frac{1}{49}$.

On trouve de même pour $x = \frac{409}{119} = 3, 2, 3, 2, 7$,

$$\left(\tfrac{3}{1}\right), \tfrac{10}{3}, \tfrac{17}{5}, \left(\tfrac{24}{7}\right), \tfrac{79}{23}, \tfrac{134}{39} \ldots\ldots < x, \left(\tfrac{7}{2}\right), \tfrac{31}{9}, \left(\tfrac{55}{16}\right), \tfrac{464}{135} \ldots\ldots > x;$$

on sait donc résoudre cette question : *Étant donnée une fraction, en trouver d'autres plus simples, et qui en approchent plus que toute fraction moins composée qu'elles.*

596. Voici quelques applications de cette doctrine :

I. On a trouvé $\pi = 3{,}1415926\ldots$ pour le *rapport de la circonférence au diamètre*; la fraction continue équivalente à la partie décimale donne

$\pi = 3,7,15,1,292,1,1,1,2,1,3,1,14\ldots$ (*voy. Compl. d'algèbre* de M. *Lacroix*, p. 288, 6e édit.) : on en tire les convergentes principales et intermédiaires, dont les rapports d'Archimède et d'Adrien Métius font partie :

$$\left(\tfrac{3}{1}\right), \tfrac{25}{8}, \tfrac{47}{15}, \tfrac{69}{22}, \tfrac{91}{29}, \tfrac{113}{36}, \tfrac{135}{43}, \tfrac{157}{50} \ldots \left(\tfrac{333}{106}\right) \ldots\ldots < \pi$$
$$\tfrac{4}{1}, \tfrac{7}{2}, \tfrac{10}{3}, \tfrac{13}{4}, \tfrac{16}{5}, \tfrac{19}{6}, \left(\tfrac{22}{7}\right), \left(\tfrac{355}{113}\right) \ldots\ldots \left(\tfrac{104348}{33215}\right) \ldots\ldots > \pi$$

II. *L'année solaire tropique,* ou le temps que le soleil emploie à revenir au même équinoxe, est de 365,2422181 jours (*voy.* mon *Astr. pratique,* p. 88). En ne donnant que 365 jours à l'année civile, l'équinoxe reviendrait à peu près un jour plus tard tous les quatre ans, en sorte que pour le ramener à la même date, il faudrait donner 366 jours à chaque 4e année, appelée *bissextile ;* c'est du moins ainsi que cela était ordonné dans le *Calendrier Julien,*

réglé par Jules César, en supposant l'année de $365^j\,\frac{1}{4}$. L'erreur de cette supposition, qui fait anticiper à son tour l'année civile sur la solaire, a été en partie corrigée dans le calendrier grégorien, qui supprime trois bissextiles séculaires sur quatre, c'est-à-dire, n'intercale que 97 jours en 400 ans. Pour apprécier ce système, traitons par notre théorie la fraction $\frac{2422181}{10000000}$, qui se développe en

$$x = 0, 4, 7, 1, 3, 1, 1, 2, \ldots \frac{1}{4}, \frac{7}{29}, \frac{8}{33}, \frac{31}{128}, \frac{39}{161}, \frac{70}{289} \ldots$$

Prenons, par ex., la fraction $\frac{8}{33}$, c'est-à-dire supposons l'année solaire de $365\,\frac{8}{33}$ jours : il faudrait pour que l'année civile s'accordât avec cette durée, intercaler 8 jours en 33 ans ; on ferait chaque 4e année de 366 jours, en ne faisant revenir la 8e bissextile qu'au bout de cinq ans ; puis on recommencerait une période semblable de 33 ans. Telle était le système des anciens Perses.

On remarquera que les fractions $\frac{1}{4}$ et $\frac{97}{400}$ ne se trouvent pas parmi les convergentes soit principales, soit intermédiaires, et que l'on aurait pu adopter un mode d'intercalation plus approché que celles qu'on suit dans les calendriers Julien et Grégorien. Mais cet inconvénient est sans importance réelle (*voy.* mon *Uranographie*).

III. Le mois lunaire synodique est de $29^j,5305887$; le mois solaire de $30^j,4368515$; le rapport x de ces nombres étant converti en fraction continue, on en tire les convergentes

$$\left(\frac{1}{1}\right), \left(\frac{34}{33}\right), \frac{101}{98}, \left(\frac{168}{163}\right) \ldots < x, \left(\frac{33}{32}\right), \left(\frac{67}{65}\right), \frac{235}{228} \ldots > x;$$

si l'on regarde, par ex., $\frac{235}{228}$ comme valeur de x, ce sera supposer que 235 mois lunaires s'écoulent en 228, ou 19 fois 12 mois solaires ; la différence est 7 ; ainsi en 19 ans, il faudrait intercaler 7 mois lunaires de plus, pour que le soleil et la lune se retrouvent dans les mêmes positions relatives. Cela posé, qu'on forme 19 tables indiquant les phases de la lune à leurs dates, et ces tables en annonceront les retours pendant toutes les périodes de 19 années, en prenant ces tables dans leur ordre de succession. C'est ce que Méthon avait appris aux Grecs, dont le calendrier était luni-solaire, et qui avaient nommé *cycle solaire* cette période, et *nombre d'or* le numéro qui désignait celui des 19 calendriers qui s'appliquait à chaque année.

Equations indéterminées du premier degré.

597. Nous savons (n° 118) qu'il suffit de connaître une solution $x=\alpha$, $y=\beta$, en nombres entiers de l'équ. $ax+by=c$, pour en conclure toute outre ; les valeurs de x et de y forment des équi-différences dont la raison est b pour x, et $-a$ pour y, $x=\alpha+bt$, $y=\beta-at$. La théorie des fractions continues donne un moyen très-simple de trouver les nombres α et β.

Résolvons en convergentes $\frac{a}{b}$, et soit $\frac{p}{p'}$ l'avant-dernière, celle qui précède la proposée : on a vu (D, n° 592) que

$$ap'-bp=\pm 1, \text{ d'où } ap'c-bpc=\pm c,$$

le signe est $+$ ou $-$ selon que la fraction continue, prise en totalité, est *formée d'un nombre pair ou impair de termes.* Comparant avec $ax+by=c$, on voit que celle-ci est satisfaite en posant $\alpha=p'c$, $\beta=-pc$, dans le cas où les deux membres ont même signe, et $\alpha=-p'c$, $\beta=pc$ dans le cas contraire.

Rien n'est donc plus facile que d'obtenir une solution en nombres entiers de l'équ. $ax+by=c$: *On résout en continue la fraction* $\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{b}}$; *on forme la convergente* $\frac{\mathrm{p}}{\mathrm{p'}}$ *qui en résulte quand on néglige le dernier terme ; on retranche ces deux fractions, et on a* $\mathrm{ap'-pb=\pm 1}$; *on multiplie par* c, *et on compare terme à terme avec* $\mathrm{ax+by=c}$.

Soit, par ex., l'équ. $105x-43y=17$; la méthode du commun diviseur donne $\frac{105}{43}=2,2,3,1,4$; $\frac{22}{9}=2,2,3,1$.

105	43	19	5	4	1
	2	2	3	1	4
22	9	4	1	1	

Cette dernière fraction s'obtient en supprimant le terme 4, et à l'aide du procédé exposé (n° 30) p. 31, t. I. De $\frac{105}{43}$, ôtant $\frac{22}{9}$, on trouve $105.9-43.22=-1$ (la fraction continue ayant 5 termes, on doit prendre le signe $-$; d'ailleurs les produits des chiffres des unités, prouvent que la différence est négative). On multiplie cette équation par -17, et comparant à la proposée, on trouve $x=-9.17$, $y=22.17$, d'où

$$x=-153+43t, \quad y=-374+105t.$$

De même, pour l'équ. $424x + 115y = 539$, on a $\frac{424}{115} = 3, 1, 2, 5, 7$; supprimant 7, il vient $\frac{59}{16}$; retranchant ces fractions, on trouve $424 . 16 - 115 . 59 = -1$; multipliant par -539 et comparant à la proposée, il vient $x = -16 . 539$; $y = 59 . 539$; donc $x = -8624 + 115t$, $y = 31801 - 424t$. On simplifie ces équ. en observant que 424 est contenu 75 fois dans 31801; on change t et $t + 75$, et on trouve

$$x = 1 + 115t, \quad y = 1 - 424t.$$

L'équ. $19x + 7y = 117$ donne $\frac{19}{7} = 2, 1, 2, 2$; $\frac{8}{3} = 2, 1, 2$; retranchant, $19 . 3 - 8 . 7 = 1$; multipliant par 117, on a

$$x = 351 - 7t, \; y = -936 + 19t, \text{ ou } x = 1 - 7t, \; y = 14 + 19t.$$

On peut s'exercer sur les ex. cités p. 158-9 du t. Ier.

Le problème de chronologie qui consiste à trouver l'année x dont le *cycle solaire* est c, et le *nombre d'or* n, revient à chercher l'entier x qui divisé par 28 et 19, donne pour restes $c - 9$ et $n - 1$. Le procédé du n° 121 donne, pour cette année,

$$x = 56(c - n) + c + 75 + 532 . t.$$

C'est tous les 532 ans que les mêmes nombres c et n reviennent périodiquement ensemble : cette durée est ce qu'on appelle la *période dyonisienne* (*voy.* l'*Uranographie*).

Et si l'on veut que l'année x ait en outre i pour *indiction*, c'est-à-dire que x divisé par 15 donne le reste $i - 3$, on a la période *julienne* de 7980 ans, imaginée par Scaliger. On trouve

$$x = 4845\,c + 4200\,n - 1064\,i + 3267 + 7980t.$$

Equations déterminées du second degré.

598. Résolvons en fractions continues les racines de l'équ.

$$Ax^2 - 2\alpha x = k,$$

A, α et k sont entiers, A est positif; on suppose la racine irrationnelle et positive : car si x est négatif, il suffit de changer α en $-\alpha$ pour donner à cette racine le signe $+$. Quand le coefficient du 2e

terme n'est pas un nombre pair, on doit multiplier toute l'équ. par 2. On a

$$x = \frac{\pm\sqrt{t}+\alpha}{A}\ldots\ (1)\quad \text{en faisant}\quad t=\alpha^2+Ak,\ \ldots\ (2)$$

t est supposé positif et non carré. Prenons d'abord $\sqrt{t}$ avec le signe $+$, et désignons par y le plus grand entier contenu dans x, d'où

$$x = y + \frac{1}{x'} = \frac{\sqrt{t}+\alpha}{A},\quad x' = \frac{A}{\sqrt{t}+\alpha-Ay}.$$

Soit fait $$\beta = Ay-\alpha;\ \ldots\ (3)$$

Multiplions haut et bas la valeur de x' par $\sqrt{t}+\beta$, nous aurons $x' = \frac{A(\sqrt{t}+\beta)}{t-\beta^2}$. Mais il suit des équations (2) et (3) que $t-\beta^2 = A\,(k-Ay^2+2\alpha y)$, en sorte que A est facteur commun ; posant

$$k - Ay^2 + 2\alpha y = B,\ \ldots\ (4)$$

il vient $$t-\beta^2 = AB,\quad x' = \frac{\sqrt{t}+\beta}{B}.\ \ldots\ (5)$$

Cette valeur de x' étant de même forme que celle de x, on en extrait l'entier y', et on procède selon la même marche de calcul qui donne $x'' = \frac{\sqrt{t}+\gamma}{C}$; on a ensuite $x''' = \frac{\sqrt{t}+\delta}{D}$, etc. Enfin

$$t = \alpha^2+Ak \quad = \beta^2+AB \quad = \gamma^2+BC \quad = \delta^2+CD = \ldots (a)$$

$$x = \frac{\sqrt{t}+\alpha}{A},\ x' = \frac{\sqrt{t}+\beta}{B},\quad x'' = \frac{\sqrt{t}+\gamma}{C},\quad x''' = \frac{\sqrt{t}+\delta}{D}\quad \ldots (b)$$

$$\beta = Ay-\alpha,\quad \gamma = By'-\beta,\quad \delta = Cy''-\gamma\quad \ldots (c)$$

599. Omettons tous les raisonnements, pour ne conserver que le matériel du calcul; il faut dans chaque fraction complète (b) remplacer $\sqrt{t}$ par l'entier m qui y est contenu, puis effectuer les divisions $\frac{m+\alpha}{A}$, $\frac{m+\beta}{B}$, $\frac{m+\gamma}{C}$,.... qui donneront les quotients

entiers $y, y', y'', \ldots$ et les restes $r, r', r'', \ldots$ donc

$$m + \alpha = Ay + r,$$
$$m + \beta = By' + r',$$
$$m + \gamma = Cy'' + r'', \text{ etc.}$$

Or, les équ. (c) donnent $Ay = \alpha + \beta$, $By' = \beta + \gamma$, etc. Donc, en substituant,

$$\left.\begin{array}{l} \beta = m - r \\ \gamma = m - r' \\ \delta = m - r'', \text{ etc.} \end{array}\right\} \ldots\ldots \quad (d)$$

Il faut en outre connaître les diviseurs $B, C, \ldots$ Les équations (a) donnent

$$AB = \alpha^2 - \beta^2 + Ak = (\alpha + \beta)(\alpha - \beta) + Ak = Ay(\alpha - \beta) + Ak,$$

donc, à cause de $(d) \ldots\, B = k + y\,(r + \alpha - m)$;

de même, $BC = \beta^2 - \gamma^2 + AB = By'(\beta - \gamma) + AB$,

$$C = A + y'\,(r' - r)$$
$$D = B + y''\,(r'' - r'), \text{ etc.}$$

Le tableau suivant offre un *algorithme* pour les opérations :

DIVIDENDES.	DIVISEURS.	QUOTIENTS.	RESTES.	DIFFÉR.
	k		$R = m - \alpha$	
$m + \alpha$	A	y	r	$r - R$
$2m - r$	$B = k + y\,(r - R)$	y'	r'	$r' - r$
$2m - r'$	$C = A + y'\,(r' - r)$	y''	r''	$r'' - r'$
$2m - r''$	$D = B + y''\,(r'' - r')$	y'''	r'''	$r''' - r''$
$2m - r'''$	$E = C + y'''\,(r''' - r'')$	y^{IV}	r^{IV}	$r^{\text{IV}} - r'''$
etc.	etc.	etc.	etc.	etc.

Ainsi, après avoir formé $R = m - \alpha$, le quotient y et le reste r de la division $\dfrac{m + \alpha}{A}$, on prendra les différences $r - R$, $2m - r$, et

l'on calculera B; la fraction $\frac{2m-r}{B}$ donnera y' et r'; puis on formera $r'-r$, et $2m-r'$ et C, et la fraction $\frac{2m-r'}{C}$ donnera y'' et r'', etc.

Lorsqu'on sera conduit à retrouver l'une des fractions complètes précédentes, comme on en tire le quotient et le reste déjà trouvés, puis la même fraction subséquente, etc.; il est clair que la fraction continue est *périodique*.

Soit, par ex., l'équ. $9x^2-39x+41=0$; on doublera pour que le 2e terme ait un coefficient pair : il vient $A=18$, $\alpha=39$, $k=-82$, et $x=\frac{39\pm\sqrt{45}}{18}$. L'entier de $\sqrt{45}$ est $m=6$, d'où $m-\alpha=R=-33$. On ne doit pas supprimer le facteur 3 qui est commun aux deux termes de la fraction. Prenons le radical en $+$, et nous aurons

$$k=-82,\quad R=m-\alpha=-33$$

$m+\alpha=45$,	$A=18$,	$\frac{45}{18}$,	$y=2$,	$r=9$	diff.	42
$2m-r=3$,	$B=2$,	$\frac{3}{2}$,	$y'=1$,	$r'=1$		-8
$2m-r'=11$,	$C=10$,	$\frac{11}{10}$*,	$y''=1$,	$r''=1$		0
$2m-r''=11$,	$D=2$,	$\frac{11}{2}$,	$y'''=5$,	$r'''=1$		0
$2m-r'''=11$,	$E=10$,	$\frac{11}{10}$*,	fraction déjà obtenue.			

Donc $x=2,1\,[1,5]$, *en renfermant entre deux crochets la partie qui revient périodiquement à l'infini.*

Prenons encore l'équ. $2x^2-14x+17=0$, d'où $x=\frac{7\pm\sqrt{15}}{2}$, $A=2$, $\alpha=7$, $k=-17$, $m=3$, et

$$k=-17\qquad m-\alpha=R=-4$$

$m+\alpha=10$,	$A=2$,	$\frac{10}{2}$,	$y=5$,	$r=0$,	diff.	4
$2m-r=6$,	$B=3$,	$\frac{6}{3}$*,	$y'=2$,	$r'=0$,		0
$2m-r'=6$,	$C=2$,	$\frac{6}{2}$,	$y''=3$,	$r''=0$,		0
$2m-r''=6$,	$D=3$,	$\frac{6}{3}$*	fraction déjà obtenue;			

par conséquent $x=5\,[2,3]$.

Les équ. (d) font en outre connaître les nombres $\alpha, \beta, \gamma\ldots$ qui sont nos dividendes diminués chacun de m; on trouve donc aussi les fractions complètes successives, ce qui est quelquefois utile.

Dans le 1[er] de nos exemples ces fractions sont $\frac{39+\sqrt{45}}{18}=2+$, $\frac{\sqrt{45}-3}{2}=1+$, $\frac{{}^*\sqrt{45}+5}{10}=1+$, $\frac{\sqrt{45}+5}{2}=5+$, etc.

600. Quant à la racine qui répond au signe — du radical, lorsqu'elle est négative, on l'écrit $x=-\frac{\sqrt{t}-\alpha}{A}$, et on traite cette fraction comme il a été dit, et si cette racine est positive, on a $x=\frac{\alpha-\sqrt{t}}{A}=v+\frac{1}{x'}$, v étant l'entier contenu, ou le 1[er] terme de la fraction continue; on en tire

$$x=\frac{A}{\alpha-Av-\sqrt{t}}=\frac{A(\alpha-Av+\sqrt{t})}{(\alpha-Av)^2-t}=\frac{\sqrt{t}+\beta'}{B'},$$

attendu que A est encore facteur commun haut et bas, ce qu'il est aisé de voir, comme précédemment. $\sqrt{t}$ a ici le signe $+$, et on retombe sur le cas déjà traité.

Ainsi dans notre 1[er] ex. $x=\frac{39-\sqrt{45}}{18}=1+\frac{1}{x'}$,

$x'=\frac{21+\sqrt{45}}{22}$; or cette fraction est la plus grande racine de l'équ. $22x'^2-42x'+18=0$, qui donne $\alpha=21$, $m=6$,

	$k=-18$		$m-\alpha=R=-15$,		diff.	20
$m+\alpha=27$,	$A=22$,	$\frac{27}{22}$,	$y=1$,	$r=5$,		-4
$2m-r=7$,	$B=2$,	$\frac{7}{2}$,	$y'=3$,	$r'=1$,		0
$2m-r'=11$,	$C=10$,	$\frac{11}{10}$*,	$y''=1$,	$r''=1$,		0
$2m-r''=11$,	$D=2$,	$\frac{11}{2}$,	$y'''=5$,	$r'''=1$,		0
$2m-r''=11$,	$E=10$,	$\frac{11}{10}$*,	fraction déjà trouvée.			

donc la 2[e] racine est $x=1, 1, 3\,[1, 5]$.

Une fois que les deux racines sont réduites en fractions, on peut former les convergentes qui en sont des valeurs approchées à des degrés connus. Tout ce qu'on a dit p. 161 s'applique ici.

601. Soit pris une fraction complète quelconque $z=\frac{\sqrt{t}+\pi}{P}$, dont y^i est l'entier approché; la convergente correspondante

$\frac{p}{p'} = y, y', \ldots y^i, \frac{m}{m'}, \frac{n}{n'}$ les deux convergentes précédentes : on sait (p. 163) que $x = \frac{nz + m}{n'z + m'}$.

Substituant pour z et x les fractions complètes qui les expriment, il vient $\frac{\sqrt{t} + \alpha}{A} = \frac{n(\sqrt{t} + \pi) + Pm}{n'(\sqrt{t} + \pi) + Pm'}$: Réduisons au même dénominateur, et égalons séparément entre eux les termes irrationnels,

$\pi n' = An - \alpha n' - Pm', \pi(An - \alpha n') = P\alpha m' - APm + n't$; éliminant π, il vient, à cause de $m'n - mn' = \pm 1$,

$$(An - \alpha n')^2 = \pm PA + n'^2 t,$$

ou $$A\left(\frac{n}{n'}\right)^2 - 2\alpha\left(\frac{n}{n'}\right) - k = \pm \frac{P}{n'^2}. \quad . \quad . \quad . \quad (f)$$

Ce calcul revient à éliminer m et m' entre les trois équ. ci-dessus, en sorte que *l'équ.* (f) *exprime que la fraction* $\frac{\mathrm{n}}{\mathrm{n}'}$ *est une des convergentes vers* x : le signe est + ou — selon que cette fraction est de rang pair ou impair.

Il se présente ici deux cas :

1° Si z est de rang impair, il faut préférer le signe + ; mais alors $\frac{n}{n'}$ est de rang pair et $> x$; substituée pour x dans $Ax^2 - 2\alpha x - k$, le résultat doit être positif. Il faut donc que P soit un nombre positif, ce qui prouve que *tous les dénominateurs des fractions complètes de rangs impairs sont positifs.*

2° Quand le rang de z est pair, on doit préférer le signe — : or si $\frac{n}{n'}$ est compris entre les deux racines de x, $Ax^2 - 2\alpha x - k$ devient négatif pour cette valeur de x, ce qui exige encore que P ait le signe +. Mais quand cette convergente est moindre que les deux racines, P a le signe —. *Les dénominateurs des fractions complètes de rang pair sont donc positifs ou négatifs, selon que les convergentes de rangs impairs correspondantes sont entre les deux racines plus petites qu'elles.*

Ces dénominateurs ne sont donc négatifs que dans les rangs pairs, et encore faut-il que les deux racines de x soient assez rap-

prochées l'une de l'autre pour tomber ensemble entre les deux convergentes successives correspondantes : alors les termes initiaux des deux fractions continues sont les mêmes. Mais l'approximation devenant de plus en plus serrée, on arrive bientôt à une convergente de rang pair qui tombe entre les racines; dès lors, on ne peut plus trouver de dénominateurs négatifs jusqu'à l'infini. Comme *chaque fraction complète est* > 1, si le dénominateur P est négatif, le numérateur doit aussi l'être : donc π est négatif et $> \sqrt{t}$, en sorte que cette complète a la forme $\dfrac{\sqrt{t}-\pi}{-P}$.

602. Soient $\dfrac{\sqrt{t}+\delta}{D}$, $\dfrac{\sqrt{t}+\varepsilon}{E}$, $\dfrac{\sqrt{t}+\varphi}{F}$,.... des fractions prises parmi celles qui n'ont pas de dénominateurs négatifs, ce qui a lieu dès la 1re de toutes, quand les deux racines de x n'ont pas leur partie entière commune. Les équ. (a) donnent $DE+\varepsilon^2=t$; donc D, E, ε^2 sont $< t$;

$$D,\ E,\ F,\ldots < t;\qquad \varepsilon,\ \varphi\ldots < \sqrt{t}.$$

Supposons, s'il se peut, que l'on ait $\dfrac{\sqrt{t}-\varphi}{F}$, d'où $EF=t-\varphi^2$, $Ey^{\text{IV}}=\varepsilon-\varphi$, d'après les équ. ($a$), etc.; la 1re donne

$$EF=(\sqrt{t}+\varphi)(\sqrt{t}-\varphi),\quad \frac{\sqrt{t}-\varphi}{F}=\frac{E}{\sqrt{t}+\varphi};$$

par la 2e, $Ey^{\text{IV}} < \varepsilon$, d'où $E < \sqrt{t}$, et notre complète < 1, ce qui est impossible. Donc, tant qu'on aura des dénominateurs négatifs, les parties α, β,.... peuvent bien être négatives aussi ; mais au delà, elles auront toutes le signe $+$, et dès lors $Ey^{\text{IV}}=\varepsilon+\varphi$ donne $E<\varepsilon+\varphi$, ou $E<2\sqrt{t}$: *les dénominateurs ne peuvent donc atteindre le double de* $\sqrt{t}$.

Et puisque ces constantes ε, φ,.... D, E,.... sont toutes positives, entières et en nombre infini, qu'elles ne peuvent dépasser les limites assignées, on devra tôt ou tard retrouver quelque fraction complète déjà obtenue, et par suite les complètes subséquentes, avec les mêmes entiers contenus : les termes de la fraction continue reviendront dans le même ordre. Donc, *après un certain nombre de termes initiaux, la fraction continue sera périodique*, ce qu'on a déjà remarqué dans les ex. cités.

Observez que si la période est $[a, b, c \ldots. g, h]$, on peut lui donner la forme $a [b, c \ldots. g, h, a]$, $a, b [c \ldots. g, h, a, b]$, etc., en commençant par tel terme qu'on veut, pourvu qu'on rejette à la fin de la période les termes initiaux retranchés. La période se trouve, il est vrai, composée des mêmes termes; mais ces termes observent une disposition différente.

Suivons les détails de ces calculs sur l'équ. $59x^2 - 319x + 431 = 0$, qu'on doublera pour que le 2e coefficient soit un nombre pair. On obtient les résultats successifs

$$= \frac{\sqrt{45} + 319}{118} = 2 +, \quad \frac{\sqrt{45} - 83}{-58} = 1 +, \quad \frac{\sqrt{45} + 25}{10} = 3 +,$$

$$^*\frac{\sqrt{45} + 5}{2} = 5 +, \quad \frac{\sqrt{45} + 5}{10} = 1 +, \quad ^*\frac{\sqrt{45} + 5}{2} = 5 +, \text{ etc.}$$

Donc $x = 2, 1, 3 [5, 1]$. Pour l'autre racine,

$$x = \frac{319 - \sqrt{45}}{118} = 2 +, \frac{\sqrt{45} + 83}{58} = 1 +, \quad \frac{\sqrt{45} - 25}{-10} = 1 +,$$

$$\frac{\sqrt{45} + 15}{18} = 1 +, \quad \frac{\sqrt{45} + 3}{2} = 4 +, \quad \frac{\sqrt{45} + 5}{10} \text{ ci-dessus ;}$$

on retrouve l'une des fractions complètes de la 1re racine, et on a $x = 2, 1, 1, 1, 4 [1, 5]$.

L'équ. $1801\, x^2 - 3991\, x + 2211 = 0$ donne

$$x = \frac{\sqrt{37} + 3991}{3602} = 1 +, \frac{\sqrt{37} - 389}{-42} = 9 +, \quad \frac{\sqrt{} + 11}{2} = 8 +,$$

$$^*\frac{\sqrt{} + 5}{6} = 1 +, \quad \frac{\sqrt{} + 1}{6} = 1 +, \quad \frac{\sqrt{} + 5}{2} = 5 +, \quad ^*\frac{\sqrt{} + 5}{6};$$

donc $x = 1, 9, 8 [1, 1, 5]$. L'autre racine s'obtient de même ; elle est $x = 1, 9, 2, 2 [5, 1, 1]$.

603. Supposons que la période commence au premier terme $x = [a, b, c, d]$, ce qui revient à $x = a, b, c, d, x$, d'où l'on tire, en transposant,

$$a - x = -\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} + \frac{1}{x}\right), \quad \frac{1}{a - x} = -\left(b + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} + \frac{1}{x}\right)$$

$$b + \frac{1}{a-x} = -\left(\frac{1}{c} + \frac{1}{d} + \frac{1}{x}\right), \frac{1}{b+\frac{1}{a-x}} = -\left(c + \frac{1}{d} + \frac{1}{x}\right),$$

$$d + \frac{1}{c + \frac{1}{b + \frac{1}{a-x}}} = -\frac{1}{x}, \quad -x = \frac{1}{d + \frac{1}{c + \frac{1}{b + \frac{1}{a-x}}}}$$

En substituant continuellement pour $-x$ cette même valeur dans $a-x$, on trouve enfin $-x = 0, d, c, b, a, d, c \ldots = 0[d, c, b, a]$. Ainsi, *lorsque la période de l'une des racines commence dès le* 1er *terme, l'autre racine est comprise entre* 0 *et* -1, *et sa période est formée des mêmes termes écrits en ordre rétrograde.*

Réciproquement, si l'une des racines de x *est* > 1, *et que l'autre soit entre* 0 *et* -1, *ces racines ont les formes*

$$x = [a, b, c \ldots g, h], \quad -x = 0\,[h, g \ldots c, b, a].$$

En effet, $x = y + \frac{1}{x'}$, avec $x' > 1$; d'où $x' = \frac{1}{x-y}$; l'une des racines de x est supposée entre 0 et -1 ; donc les deux valeurs de x' sont dans les mêmes conditions que celles de x, savoir, l'une > 1, l'autre entre 0 et -1. Il en faut dire autant de x'', x''', ... dans $x' = y' + \frac{1}{x''}$, etc.

Or, s'il se pouvait qu'on eût $x = y\,[a, b \ldots g, h]$, le 1er terme y étant seul étranger à la période, on aurait $x' = [a, b \ldots g, h]$, et par conséquent aussi $-x' = 0\,[h, g \ldots b, a]$, en vertu de ce qu'on a démontré : d'où $\frac{1}{x'} = -\left(h + \frac{1}{g + \text{etc.}}\right)$; ainsi la 2e valeur de x serait

$$x = y + \frac{1}{x'} = y - h - \left(\frac{1}{g + \text{etc.}}\right).$$

Pour que cette quantité fût entre 0 et -1, ainsi qu'on le suppose, il faudrait qu'on eût $y = h$, et la 1re racine de x serait $h, a, b \ldots g$, en sorte que h ferait partie de la période, contre l'hypothèse, $x = [h, a, b \ldots g]$. On voit que la période de x ne peut commencer au 2e terme de la fraction continue. Par la même raison, on ne peut supposer $x' = y'\,[a, b \ldots h]$, d'où $x = y \,.\, y'\,[a, b \ldots]$, en faisant commencer la période au 3e terme ; et ainsi de suite.

Par ex., l'équ. $10x^2 - 14x = 5$ donne $x = \frac{7 \pm \sqrt{99}}{10}$, les racines sont $x = [1, 1, 2, 3]$, $-x = 0\,[3, 2, 1, 1]$.

Pour $5x^2 - 7x = 3$, on trouve $x = \frac{7 \pm \sqrt{109}}{10}$,

$$x = [1, 1, 2, 1, 9, 1, 2], \text{ et } -x = 0\,[2, 1, 9, 1, 2, 1, 1].$$

604. Lorsqu'il arrive que la période commence dès le 1[er] terme, et de plus est *symétrique*, c'est-à-dire qu'elle reste la même quand on la lit en sens inverse, *les termes à égale distance des extrêmes sont égaux*, les deux racines ont la même période. Alors x et $-\frac{1}{x}$ sont égaux, c'est-à-dire que la proposée ne change pas quand on remplace x par $-\frac{1}{x}$; la forme de cette équ. est donc $Ax^2 - Bx = A$.

C'est ainsi que $7x^2 - 8x = 7$ a pour racines $x = [1, 1, 2, 1, 1]$ et $-x = 0\,[1, 1, 2, 1, 1]$, valeurs de $x = \frac{4 \pm \sqrt{65}}{7}$.

605. Supposons que la proposée soit $x^2 - 2ax = k$; faisant $A = 1$ dans les formules p. 170, il vient $x = \alpha \pm \sqrt{t}$. Si l'entier m contenu dans $\sqrt{t}$ se trouve être précisément $= \alpha$, l'une des racines est > 1, et la 2[e] entre 0 et -1; ainsi ces racines ont la forme $x = [2m, a, b \ldots g, h]$, $-x = 0\,[h, g \ldots a, 2m]$. Retranchons m de x, et nous aurons pour les deux valeurs de $\pm\sqrt{t}$,

$$\sqrt{t} = m\,[a, b \ldots g, h, 2m], \quad -\sqrt{t} = -m\,[h, g \ldots b, a, 2m].$$

Mais on sait que ces deux expressions doivent être égales en signes contraires, d'où $a = h$, $b = g \ldots$, en sorte que la forme de la fraction continue est $\sqrt{t} = m\,[a, b \ldots b, a, 2m]$. Donc

1° La période de $\sqrt{t}$ commence au 2[e] terme;

2° Le dernier terme de cette période est double de l'initial m qui n'en fait pas partie;

3° Au dernier terme près $2m$, la période est symétrique, c'est-à-dire qu'elle est la même quand on la lit en ordre rétrograde.

On trouve $\sqrt{61} = 7\,[1, 4, 3, 1, 2, 2, 1, 3, 4, 1, 14]$.

$$\sqrt{19} = 4\,[2, 1, 3, 1, 2, 8].$$

Le terme du milieu 2 de $\sqrt{61}$ se répète, circonstance qui n'arrive

pas à $\sqrt{19}$; cela vient de ce que le nombre des termes de la période est impair dans un cas, et pair dans l'autre.

La table I, page 184, donne les périodes des racines carrées des nombres entiers < 79 : on n'y a souvent indiqué que la moitié de la période, en marquant le terme moyen de $''$ quand il se répète, et de $'$ quand on ne doit l'écrire qu'une seule fois. On a quelquefois supprimé l'entier initial m contenu dans $\sqrt{t}$.

Pour trouver par approximation la valeur de $\frac{\alpha \pm \sqrt{t}}{A}$, on mettra pour $\sqrt{t}$, l'une des convergentes qu'on tire de son développement en fraction continue, telle que la donne notre table I, ou qu'on l'obtient directement, en observant que la forme symétrique de cette période permet de n'en calculer que la moitié des termes (*voy.* l'Algorithme, p. 171).

Ainsi, pour l'exemple de la page 172, $x = \frac{39 \pm \sqrt{45}}{18}$, comme $\sqrt{45} = 6\,[1, 2, 2, 2, 1, 12]$, on trouve $\sqrt{45} = \frac{658806}{98209}$, valeur exacte jusqu'à la 10e décimale : d'où $x = \frac{39}{18} \pm \frac{1}{18}\sqrt{45} = 2{,}16666\ldots \pm 0{,}37267799625\ldots$ Enfin

$$x = 2{,}53934466291, \text{ et } x = 1{,}79398867041.$$

606. Nous aurons besoin plus tard de connaître dans le développement de $\sqrt{t}$, les fractions complètes dont le dénominateur est *un*, savoir, $z = \frac{\sqrt{t} + \pi}{P}$, et $P = 1$. L'entier contenu dans le numérateur est $m + \pi$, savoir, $\frac{\sqrt{t} + \pi}{1} = (m + \pi) + \frac{1}{z'}$, d'où $z' = \frac{1}{\sqrt{t} - m} = \frac{\sqrt{t} + m}{t - m^2}$. Or cette fraction est précisément celle qui donne l'entier a initial de la période, et par suite ses autres termes : d'où l'on voit qu'il ne peut y avoir, dans le développement de $\sqrt{t}$, d'autre fraction complète dont le dénominateur soit un, que la 1re $x = \frac{\sqrt{t} + 0}{1} = m +$, et celle $\frac{\sqrt{t} + m}{1} = 2m +$, qui produit le dernier terme $2m$ de la période à chacun de ses retours. Comme π doit être $< \sqrt{t}$, $\pi = m$ est la plus grande valeur que cette constante puisse prendre ; $2m$ est aussi le plus grand terme de la fraction, et ne peut résulter que d'un dénominateur $P = 1$.

Il est maintenant facile de déduire l'une des racines de la proposée de l'autre, qu'on suppose connue. Car soit donné $x = p, q, \ldots u\,[a, b, \ldots f, g, h]$; faisons $z = [a, b, \ldots f, g, h]$: on a en outre $-z = 0\,[h, g, f, \ldots b, a]$; en substituant pour z l'une ou l'autre de ces valeurs dans $x = p, q \ldots u, z$, on obtient les deux racines de x. Mais comme la 2° fraction continue est composée d'un terme 0, et de parties négatives, on l'en délivre en se servant des relations suivantes, qu'il est aisé de vérifier :

$$(e)\ldots \quad \frac{1}{0+\frac{1}{s}} = s, \qquad -\frac{1}{\varphi} = -1 + \frac{1}{1+\frac{1}{\varphi - 1}} \quad \ldots (f)$$

Ainsi la 2e racine $x = p, q, \ldots u, o, -[h, g \ldots b, a]$ devient

$$x = p, q, \ldots (u-h) - \left(\frac{1}{g} + \frac{1}{f}\,\text{etc.}\right);$$

on chasse ensuite les signes $-$, en faisant $\varphi = g + \frac{1}{f}$ etc., dans l'équation (f).

Soit, par ex., $x = 1, 6\,[3, 2, 2] = 1, 6, z$, et $z = [3, 2, 2]$ avec $-\frac{1}{z} = [2, 2, 3]$; on a, pour la 2e racine,

$$x = 1 + \frac{1}{6} - \left(2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\,\text{etc.}\right) \qquad = 1 + \frac{1}{4} - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\,\text{etc.}\right)$$

faisant dans (f), $\varphi = 2 + \frac{1}{3}$ etc., il vient

$$x = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2}\,\text{etc.} \qquad = 1, 3, 1, 1\,[3, 2, 2]$$

La période est ici la même que pour la 1re racine; si l'on veut la mettre sous forme rétrograde (*voy.* p. 176), on écrira

$$x = 1, 3, 1, 1, 3\,[2, 2, 3].$$

Prenons encore $x = 1, 7\,[1, 1, 1, 3, 3, 2] = 1, 7, z$, en faisant $z = [1, 1, 1, 3, 3, 2]$, et par suite $-z = 0\,[2, 3, 3, 1, 1, 1]$: on a

$$x = 1 + \frac{1}{7} - 2 - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3 \text{ etc.}}\right) = 1 + \frac{1}{5} - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3 \text{ etc.}}\right).$$

$$\text{Posant } \varphi = 3 + \frac{1}{3} + \text{etc.}, \quad -\frac{1}{\varphi} = -1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3 \text{ etc.}},$$

$$x = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3 \text{ etc.}}, \qquad = 1, 4, 1, 2\,[3, 1, 1, 1, 2, 3].$$

Il suit de là que *les fractions continues qui sont racines d'une même équ. du* 2e *degré ont toujours leurs périodes formées des mêmes termes en ordre rétrograde.* Dans le dernier exemple, il faut écrire 1, 4, 1, 2, 3, 1, 1, 1 en avant de la période, savoir,

$$x = 1, 4, 1, 2, 3, 1, 1, 1\,[2, 3, 3, 1, 1, 1].$$

607. Étant donnée une fraction continue périodique, proposons-nous de remonter à l'équation dont elle est racine.

I[er] CAS. *La période commençant dès le* 1[er] *terme,* $z = [a, b \ldots g, h]$. Cherchons les deux convergentes terminales de la partie périodique,

$$\frac{h}{h'} = a, b, \ldots\ldots g, \quad \frac{i}{i'} = a, b \ldots\ldots g, h,$$

on a (*G* p. 162)

$$z = \frac{iz + h}{i'z + h'}, \quad i'z^2 - (i - h')\,z = h. \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Par ex., $z = [1, 1, 2, 1]$, donne $\frac{5}{3} = 1, 1, 2$, et $\frac{7}{4} = 1, 1, 2, 1$; d'où $z = \dfrac{7z + 5}{4z + 3}$, $4z^2 - 4z = 5$, qui a en effet pour racines $z = [1, 1, 2, 1]$ et $-z = 0\,[1, 2, 1, 1]$.

Quand la période n'a qu'un seul terme $z = [p]$, d'où $z = p + \frac{1}{z}$, on a $z^2 - pz = 1$. Si elle n'a que deux termes $z = [p, q]$, ou $z = p + \cfrac{1}{q + \cfrac{1}{z}}$, on a $qz^2 - pqz = p$; le coefficient du 2e terme est (en —) le produit des deux coefficients extrêmes; et en effet, on tire de cette équ. $qz(z - p) = p$,

$$z - p = \frac{p}{qz}, \quad z = p + \frac{p}{qz} = p + \cfrac{1}{q + \cfrac{1}{z}},$$

en substituant pour qz sa valeur $pq + \frac{p}{z}$.

IIe cas. *La période étant précédée d'une partie irrégulière*, $x = y, y', y'' \ldots . [a, b, \ldots . g, h]$, on représentera la période par z, ce qui donnera l'équ. (1) : puis on aura $x = y, y', y'' \ldots . z$. Calculant les deux convergentes $\frac{m}{m'}$, $\frac{n}{n'}$, valeurs terminales de la partie irrégulière $y, y', y'' \ldots$, il viendra

$$x = \frac{nz + m}{n'z + m'}, \quad \text{d'où } z = -\frac{m'x - m}{n'x - n}.$$

Il reste à substituer cette valeur de z dans l'équ. (1), et on aura l'équ. du 2e degré en x, dont l'une des racines est la fraction continue donnée. Ainsi *toute fraction continue périodique est racine d'une équ. du 2e degré.*

Soit $x = 1, 1, 3\ [1, 1, 2, 1] = 1, 1, 3, z$; on a d'abord les convergentes $\frac{2}{1}$ et $\frac{7}{4}$, d'où $x = \frac{7z + 2}{4z + 1}$, $z = -\frac{x - 2}{4x - 7}$. Substituant dans $4z^2 - 4z = 5$, équation qu'on a trouvée pour $z = [1, 1, 2, 1]$, il vient $60x^2 - 204x + 173 = 0$. Et en effet, la plus grande racine $x = \frac{102 + \sqrt{24}}{60}$ a pour développement la fraction continue proposée. La 2e racine est

$$x = \frac{102 - \sqrt{24}}{60} = 1, 1, 1, 1, 1\ [1, 1, 1, 2].$$

Prenons encore l'expression $x = 1, 6\ [3, 2, 2]$; et posons $z = [3, 2, 2]$, d'où l'on tire les convergentes $\frac{7}{2}$ et $\frac{17}{5}$, puis $5z^2 - 15z = 7$. On a d'ailleurs $x = 1, 6, z$, et les convergentes $\frac{1}{1}$ et $\frac{7}{6}$, d'où $z = -\frac{x-1}{6x-7}$: en substituant cette valeur dans l'équ. précédente, il vient

$$5(x-1)^2 + 15(x-1)(6x-7) = 7(6x-7)^2$$

ou $157x^2 - 383x + 233 = 0$. En effet on trouve que cette équ. donne $x = \frac{383 \pm \sqrt{365}}{314}$, et les calculs précédemment exposés montrent que si l'on prend le signe —, on a pour valeur de x la fraction continue proposée : en prenant + on trouve pour l'autre racine, $x = 1, 3, 1, 1\ [3, 2, 2]$.

I[re] TABLE des Périodes de $\sqrt{t}$ (*voyez* page 179).

(*voyez* page 179)

t.	Période.	t.	Période.	t.	Période.	t.	Période.	t.	Période.
2	1 (2)	19	2.1.3′	34	(1.4.1.10)	50	7 (14)	65	8 (16)
3	1 (1.2)	20	4 (2.8)	35	5 (1.10)	51	7 (7.14)	66	8 (8.16)
5	2 (4)	21	1.1.2′	37	6 (12)	52	4.1.2′	67	5.2.1.1.7′
6	2 (2.4)	22	1.2.4′	38	6 (6.12)	53	(3.1.1.3.14)	68	8 (4.16)
7	2 (1.1.1.4)	23	1.3′	39	6 (4.12)	54	2.1.6′	69	3.3.1.4′
8	2 (1.4)	24	4 (1.8)	40	6 (3.12)	55	(2.2.2.14)	70	2.1.2′
10	3 (6)	26	5 (10)	41	6 (2.2.12)	56	7 (2.14)	71	2.2.1.7′
11	3 (3.6)	27	5 (5.10)	42	6 (2.12)	57	1.1.4′	72	8 (2.16)
12	3 (2.6)	28	3.2′	43	1.1.3.1.5′	58	1.1.1″	73	1.1.5″
13	(1.1.1.1.6)	29	2.1″	44	1.1.1.2′	59	1.2.7′	74	(1.1.1.1.16)
14	(1.2.1.6)	30	5 (2.10)	45	1.2.2′	60	1.2′	75	(1.1.1.16)
15	3 (1.6)	31	1.1.3.5′	46	1.3.1.1.2.6′	61	1.4.3.1.2″	76	1.2.1.1.5.4′
17	4 (8)	32	1.1′	47	6 (1.5.1.12)	62	7 (1.6.1.14)	77	1.3.2′
18	4 (4.8)	33	1.2′	48	6 (1.12)	63	7 (1.14)	78	(1.4.1.16)

II[e] TABLE des Périodes des restes de x^2 : m (*voyez* page 185).

m	Périodes.	m	Pér. 1.4.9.16.	m	Périodes 1.4.9.16.25.36.
5	(1.4.4.1.0)	17	8.2.15.13″	37	12.27.7.26.10.33.21.11.3.
6	(1.4.3.4.1.0)	19	6.17.11.7.5″		34.30.28″...
7	1.4.2″...	21	4.15.7.1.18.16″	41	8.23.40.18.39.21.5.32.20.
8	1 4.1.0′...	23	2.13.3.18.12.8.6″		10.2.37.33.31″...
9	1.4.0.7″...	25	0.11.24.14.6.0.	43	6.21.38.14.35.15.40.24.10.
10	1.4.9.6.5′...		21.19″...		41.31.23.17.13.11″...
11	1.4.9.5.3″...	27	25.9.22.10 0.19.	47	2.17.34.6.27.3.28.8.37.21.
12	1.4.9.4.1.0′		13.9.7″...		7.42.32.24.18.14.12″...
13	1.4.9.3.12.10″	29	25.7.20.6.23.13.	49	0.15.32.2.23.46.22.0.29.11.
14	1.4.9.2.11.8.7′		5.28.24.22″...		44.30.18.8.0.43.39.37″...
15	1.4.9.1.10.6.4″	31	25.5.18.2.19.7.	53	49.11.28.47.15.38.10.37.13.44.
16	1.4.9.0.9.4.1.0′		28.20.14.10.8″		24.6.43.29.17.7.52.46.42.40″

Equations indéterminées du second degré.

608. Résolvons d'abord, en nombres entiers, l'équ. $my = x^2 \pm a$, c'est-à-dire rendons entière la quantité $\frac{x^2 - r}{m}$, r étant le reste négatif $< m$ de la division de a par m. Si l'on fait $x = 1, 2, 3, 4 \ldots$, x^2 étant divisé par m, les restes présenteront une propriété bien remarquable.

Si m *est pair,* soit pris $x = \frac{1}{2} m \pm \alpha$, d'où

$$\frac{x^2}{m} = \frac{\frac{1}{4}m^2 \pm m\alpha + \alpha^2}{m} = \pm \alpha + \frac{\frac{1}{4}m^2 + \alpha^2}{m};$$

les restes de $\frac{x^2}{m}$, lorsqu'on prend pour x les deux nombres $\frac{1}{2} m \pm \alpha$, sont donc les mêmes : ainsi, lorsqu'on passe $x = \frac{1}{2} m$, jusqu'à $x = m$, on retrouve les mêmes restes en sens inverse.

C'est ainsi que, pour le diviseur 14, on trouve les restes suivants :

1 . 4 . 9 . 2 . 11 . 8 . 7 . 8 . 11 . 2 . 9 . 4 . 1.

Si m *est impair,* les nombres $\frac{1}{2}(m \pm 1)$ sont entiers; faisant $x = \frac{1}{2}(m \pm 1) \pm \alpha$, on a $x^2 = \frac{1}{4}(m \pm 1)^2 \pm \alpha(m \pm 1) + \alpha^2$; les $\pm$ se correspondent ; divisant par m, on trouve, qu'on prenne le signe supérieur ou l'inférieur, que le reste de la division est le même que pour $\frac{1}{4}(m^2 + 1) + \alpha + \alpha^2$: ainsi, pour les deux valeurs de x, les restes de x^2 divisés par m sont encore égaux ; passé $x = \frac{1}{2}(m - 1)$ on retrouve les mêmes restes en ordre rétrograde. Ici le terme moyen se répète.

On trouve, par exemple, que, pour le diviseur 17, les restes successifs sont

1 . 4 . 9 . 16 . 8 . 2 . 15 . 13 . 13 . 15 . 2 . 8 . 16 . 9 . 4 . 1.

Quand $x > m$, savoir $x = tm + \alpha$, comme

$$\frac{x^2}{m} = t^2m + 2\alpha t + \frac{\alpha^2}{m},$$

le reste est le même que si l'on eût pris $x = \alpha < m$.

Concluons de là que, 1° *si l'on prend* x = 1, 2, 3 . . . ., *jusqu'à l'infini, les restes de la division de* x^2 *par* m *se reproduisent et forment une période symétrique de* m *termes.*

La table II donne ces périodes pour les diviseurs les plus simples.

On ne peut rendre $\frac{x^2 - r}{m}$ un entier, qu'autant que r est un des termes de cette période ; et si α est le rang de ce terme, $x = \alpha$ donne r pour reste de la division de x^2 par m : on a cette infinité de solutions, $x = tm \pm \alpha$, t étant un entier quelconque. Chaque fois que r entre dans la période, on a une valeur de α, et une équ. semblable donnant un système de solutions. Mais il ne sera nécessaire d'avoir égard qu'à la demi-période, puisque le retour du reste r se fait aux rangs α et $m - \alpha$, également distants des extrêmes, et qu'il ne résulte pas de cette dernière valeur de solution nouvelle.

Par ex., $13y = x^2 + 40$ donne $\frac{x^2 + 40}{13}$, ou $\frac{x^2 - 12}{13}$ = entier. Dans la demi-période du diviseur 13, le reste 12 ne se trouve qu'au 5e rang ; ainsi $x = 13t \pm 5$.

L'équ. $x^2 = 17y + 7$ est impossible en nombres entiers, parce que 7 ne se trouve pas dans la période du diviseur 17.

Enfin, pour $x^2 - 4 = 12y$, comme 4 entre aux rangs 2 et 4, dans la demi-période du diviseur 12, on a

$$x = 12t \pm 2 \text{ et } \pm 4.$$

Observez que quand le diviseur m est un produit pp', $x^2 - r$ n'est divisible par m qu'autant qu'il l'est par p et par p' ; on rendra donc entiers $\frac{x^2 - r}{p}$ et $\frac{x^2 - r}{p'}$ par des valeurs telles que $x = tp \pm \alpha$, $x = t'p' \pm \alpha'$. Il restera ensuite à accorder ces solutions entre elles, car les valeurs de t et t' doivent être choisies de manière à donner le même nombre x. Ainsi, on posera (n° 123)

$$\frac{x^2 - r}{p},\ \frac{x^2 - r}{p'},\ \text{et}\ \frac{x \pm \alpha}{p},\ \frac{x \pm \alpha'}{p'} = \text{entiers.}$$

Quand p est lui-même décomposable en deux facteurs, la 1re fraction peut être remplacée par deux autres, et ainsi de suite.

Par exemple, pour résoudre en nombres entiers l'équation

$315y = x^2 - 46$, comme $315 = 9 . 7 . 5$, je rendrai $x^2 - 46$ divisible par 9, 7 et 5 ; savoir, en extrayant les entiers,

$$\frac{x^2-1}{9}, \ \frac{x^2-4}{7}, \ \frac{x^2-1}{5} = \text{entiers}.$$

Les périodes de ces diviseurs donnent $\alpha = 1$, $\alpha' = 2$, $\alpha'' = 1$; ainsi, il faut rendre (sans dépendance mutuelle entre les $\pm$)

$$\frac{x \pm 1}{9}, \ \frac{x \pm 2}{7}, \ \frac{x \pm 1}{5} = \text{entiers}.$$

On trouve enfin que si k désigne l'un quelconque des quatre nombres 19, 89, 26 et 44, on a $x = 315\,t \pm k$, d'où

$\pm x = 19, 26, 44, 89, 226, 271\ldots, y = 1, 2, 6, 25, 162, 233\ldots.$

Pour résoudre en nombres entiers l'équ. $my = ax^2 + 2bx + c$, multiplions par a,

$$ay = \frac{(ax+b)^2 - (b^2 - ac)}{m} = \frac{z^2 - D}{m};$$

en faisant $\qquad ax + b = z, \quad b^2 - ac = D.$

On cherchera les solutions $z = mt \pm \alpha$ qui rendent cette fraction un nombre entier : puis on devra résoudre l'équ. du 1er degré $ax + b = mt \pm \alpha$, c.-à-d. qu'on ne prendra que les valeurs entières de t, qui rendront x entier. Si a et m sont premiers entre eux, $z^2 - D$ sera multiple de a et de m (puisqu'on a multiplié par a) ; ainsi on divisera le résultat par a, et l'on aura y. Quand a et m ont un facteur commun θ, il doit aussi l'être de $2bx + c$: on cherche d'abord la forme générale des valeurs de x, qui remplissent cette condition, $x = \theta x' + \gamma$, et substituant dans la proposée, θ disparaît.

Soit $7y = 3x^2 - 5x + 2$; on multipliera par 2, pour que le coefficient de x soit pair ; d'où $a = 6$, $b = -5$, $c = 4$, $D = 1$. On rend $z^2 - 1$ multiple de 7, en faisant $z = 7u \pm 1$, qui est ici $z = 6x - 5$; on en tire

$$x = 7t + 1, \quad \text{et} + 3.$$

L'équ. $11y = 3x^2 - 5x + 6$ est absurde en nombres entiers.

Pour $15y = 6x^2 - 2x + 1$, on rend d'abord $2x - 1$ multiple du facteur 3, commun à 15 et 6, savoir, $x = 3x' + 2$, d'où $5y = 18x'^2 + 22x' + 7$; extrayant les entiers, il reste à rendre $3x'^2 + 2x' + 2$ multiple de 5 ; on trouve $z = 5t = 3x' + 1$; donc $x' = 3$, $x = 11$, puis $x = 15t' + 11$.

609. Soit l'équation

$$az^2 + 2byz + cy^2 = M,$$

qu'il s'agit de résoudre en nombres entiers.

1er cas. Si $b^2 - ac = 0$; multipliant le 1er membre par a, il devient un carré exact, $(az + by)^2 = aM$; ainsi aM doit aussi être un carré h^2, sans quoi le problème serait absurde. Il reste donc à résoudre en nombres entiers l'équ. $az + by = h$. On prend z et y avec le signe $\pm$, attendu que h doit en être affecté.

Pour $4z^2 - 20zy + 25y^2 = 49$, on pose $2z - 5y = \pm 7$, d'où $y = 2t \mp 1$, $z = 5t \pm 1$.

2e cas. Si $b^2 - ac < 0$, la proposée revient à

$$(az + by)^2 + Dy^2 = aM, \quad u^2 + Dy^2 = aM,$$

en faisant $b^2 - ac = -D$, $az + by = u$. Ainsi, M doit être positif. On fera $y = 0, 1, 2 \ldots$, et l'on ne conservera que les valeurs qui rendent $aM - Dy^2$ un carré. Ces essais sont en nombre limité, puisque $Dy^2 < aM$. Une fois y et u déterminés, on ne prendra que ceux de ces nombres qui rendront z entier.

Pour $3z^2 - 2zy + 7y^2 = 27$, on trouve

$$(3z - y)^2 + 20y^2 = 81, \quad u^2 = 81 - 20y^2;$$

avec $3z - y = u$; donc $\pm y = 0$ et 2, $\pm u = 9$ et 1,

$\pm z = 3$ et 1.

3e cas. Si $b^2 - ac$ est un carré positif k^2, multipliant encore par a, et égalant le 1er membre à zéro, pour en obtenir les facteurs, on trouve que la proposée revient à

$$[az + y(b + k)] \cdot [az + y(b - k)] = aM.$$

Soient f et g deux facteurs produisant aM ; posons-les égaux à ceux du 1er membre, il viendra

$$y = \frac{f - g}{2k}, \quad z = \frac{f - y(b + k)}{a}.$$

Ainsi, après avoir décomposé aM en deux facteurs de toutes les manières possibles, on les prendra tour à tour, l'un pour f, l'autre pour g, et l'on ne conservera que les systèmes qui rendent entiers, d'abord y, puis z. On prend y et z en $\pm$, parce qu'on peut donner à f et g le signe $+$ ou $-$. Ainsi, $2z^2+9yz+7y^2=38$, étant doublée pour rendre pair le coefficient de yz, donne $a=4$, $b=9$, $c=14$, $k=5$, $aM=304$; les produisants de 304 sont

$$2\times 152=8\times 38=4\times 76=1\times 304=16\times 19\,;$$

les deux 1ers systèmes conviennent seuls et donnent

$$\pm y=15 \text{ et } 3,\ \mp z=53 \text{ et } 1.$$

4e cas. Si b^2-ac est positif non carré, pour comparer ce qui nous reste à dire avec ce qu'on a vu, nous écrirons la proposée sous la forme $Az^2-2\alpha zy-ky^2=P$. Les racines de l'équ. $Ax^2-2\alpha x=k$ sont irrationnelles (ou $t=\alpha^2+Ak$ est positif non carré) ; développons-les en fractions continues. Il suit de l'équ. (f) (nº 601), que la convergente qui précède la fraction complète $\dfrac{\sqrt{t}+\pi}{P}$ est $\dfrac{n}{n'}$, quand on a cette condition

$$An^2-2\alpha nn'-kn'^2=\pm P.$$

Le signe de P dépendant du rang pair ou impair de cette convergente. En comparant cette équ. à la proposée, on reconnaît que si le signe des 2es membres est le même, on a cette solution

$$z=n,\quad y=n'.$$

Donc, pour trouver y et z, développez les racines x en fractions continues ; si parmi les convergentes $\dfrac{\sqrt{t}+\alpha}{A}$, $\dfrac{\sqrt{t}+\beta}{B}$ .... il s'en trouve dont le dénominateur soit le second membre P de la proposée, on limitera la continue à l'entier donné par la complète précédente, puis on cherchera la convergente correspondante $\dfrac{n}{n'}$; et l'on aura $z=n$, $y=n'$; mais il faut que cette convergente soit de rang pair quand le 2e membre P est positif, impair quand P est négatif, si le développement est celui de la plus grande racine ; et que le contraire ait lieu pour la plus petite racine. Chaque complète

qui vient en rang utile donne une solution, en sorte que si elle fait partie de la période, on a une infinité de valeurs pour z et y.

Soit, par ex., $2z^2 - 14yz + 17y^2 = 5$; on a trouvé (p. 172) que $2x^2 - 14x + 17 = 0$ a pour moindre racine $x = 1, 1, 1\ (3, 2)$, et que la 2e complète a 5 pour dénominateur ; donc la convergente $\frac{1}{1}$ vient en rang impair, et donne cette solution unique $z = 1$, $y = 1$, parce que la période n'entre pour rien.

Si le 2e membre, au lieu de 5, était $+3$, il n'y aurait pas de solution entière, parce que les complètes, dont 3 est le dénominateur, étant toutes de rangs pairs dans la grande racine x, et impairs dans la petite, ne sont pas en rangs utiles.

Mais si le 2e membre est -3, développant la grande racine $x = 5\ (2, 3)$, on l'arrêtera aux rangs 1, 3, 5, 7...., parce que les complètes suivantes ont 3 pour dénominateur; de là les convergentes $\frac{5}{1}, \frac{38}{7}, \frac{299}{55}$...., qui donnent autant de solutions. La moindre racine $x = 1, 1, 1, (3, 2)$, arrêtée aux termes 2e, 4e, 6e...., donne de même $\frac{2}{1}, \frac{11}{7}, \frac{86}{55}$...., donc, avec $\pm y = 1, 7, 55$...., on prendra $\pm z = 5, 38, 299$.... ou 2, 11, 86....

Enfin, quand le deuxième membre est 2, on trouve de même $\pm y = 0, 2, 16, 126, 992$, avec $\pm z = 1, 11, 87, 685, 5393$.... ou 1, 3, 25, 197, 1551....

Comme les convergentes sont toujours irréductibles, on n'obtient ainsi que les solutions qui sont premières entre elles : supposons que la proposée en admette qui aient un facteur commun θ, $z = \theta z'$, $y = \theta y'$: on aurait alors

$$\theta^2\ (az'^2 + 2bz'y' + cy'^2 = P.$$

P est donc multiple de θ^2 ; soit P' le quotient, il reste à tirer z' et y' d'une équ. semblable à la proposée, le 2e membre étant P' ; donc, autant P aura de facteurs carrés θ^2, autres que 1, autant on aura de valeurs de θ et d'équ. à traiter, dont le 2e membre est seul différent, $P' = P : \theta^2$.

Soit, par ex., l'équ. $z^2 + 2zy - 5y^2 = 9$, qui n'admet pas de solutions premières entre elles ; comme 9 est $= 3^2$, résolvons $z'^2 + 2z'y' - 5y'^2 = 1$; l'équ. $x^2 + 2x = 5$ donne

$$x = \frac{\sqrt{6}-1}{1} = 1, \frac{{}^*\sqrt{6}+2}{2} = 2, \frac{\sqrt{6}+2}{1} = 4, \frac{{}^*\sqrt{6}+2}{2}, \text{ etc.};$$

$x = 1\ (2, 4)$, et les convergentes $\frac{1}{0}, \frac{3}{2}, \frac{26}{20}, \frac{287}{198}$.... Les termes de

ces fractions sont les valeurs de z' et y'; multipliant haut et bas par 3, on trouve enfin

$$\pm z = 3,\ 9,\ 87,\ 861\ldots\ \pm y = 0,\ 6,\ 60,\ 594\ldots$$

La deuxième racine de x ne donne aucune solution nouvelle.

Les dénominateurs des complètes sont $< 2\sqrt{t}$ (page 175). Quand le 2[e] membre P dépasse cette limite, on ne peut espérer que P se trouve parmi ces dénominateurs, et notre procédé ne fait plus connaître les solutions ; mais f désignant un facteur de P, $P = fP'$, n un entier quelconque, posons $y = nz + fy'$;

$$\text{d'où}\ \left(\frac{a + 2bn + cn^2}{f}\right) z^2 + 2y'z(b + cn) + cfy'^2 = P'.$$

Qu'on rende entier ce 1[er] coefficient, par une valeur convenable de n (p. 185); chaque fois que $b^2 - ac$ entrera dans la demi-période du diviseur f, on aura des valeurs de $\pm n$, et autant d'équ. à résoudre, telles que $Az^2 + 2By'z + Cy'^2 = P'$, où C et P' sont les mêmes (ainsi que $B^2 - AC$). Ainsi on peut réduire P à être $P' < 2\sqrt{t}$, et même jusqu'à $P' = \pm 1$.

Ainsi l'équ. $66z^2 - 18yz + y^2 = 34$, en prenant $f = 17$, conduit à rendre $\dfrac{66 - 18n + n^2}{17}$ = entier; d'où $n = 2$ et 16, puis

$$y = 17y' + 2z \text{ ou } + 16z,\quad 2z^2 \pm 14y'z + 17y'^2 = 2.$$

L'une de ces transformées a été résolue (p. 190); l'autre n'en diffère que par le signe de y'; on en tire donc

$\pm z = 1, 11, 87, \ldots 3, 25\ldots$ avec $\pm y = 2,\ 56,\ 446, \ldots 40,\ 322\ldots,$

ou avec $\pm y = 16, 142, 1120, \ldots 14,\ 128\ldots,$

Nous supprimerons la démonstration qui établit que ce procédé fait obtenir toutes les solutions entières.

610. Ces calculs s'appliquent à l'équ. $z^2 - ty^2 = \pm 1$; mais ils deviennent alors très-faciles. On développe $\sqrt{t}$ en fraction continue $z = \sqrt{t} = u\,(u', u'' \ldots\ u'', u', 2u)$, et l'on ne s'arrête qu'aux complètes dont le dénominateur est 1, en rang impair pour $+1$, et pair pour -1. Or, il est prouvé (n° 606) que les seules complètes dont 1 est dénominateur (excepté la 1[re] $\sqrt{t}$), sont celles qui

donnent le dernier entier $2u$ de la période, lesquelles ont la forme $\frac{\sqrt{t}+u}{1}$. Les convergentes $\frac{n}{n'}$, qui répondent à tous les retours du terme u' qui précède $2u$, si elles sont en rangs utiles, donnent donc $\pm z = n$, $\pm y = n'$, ces signes étant indépendants l'un de l'autre. Quand la période a un nombre pair de termes, chaque période donne une solution, dans le cas de $+1$, et il n'y en a aucune dans celui de -1. Lorsque la période a ses termes en quotité impaire, les retours aux périodes 1re, 3e, 5e.... conviennent lorsque le 2e membre est -1 ; s'il est $+$, on prend les 2es, 4es, 6es....

Pour l'équ. $z^2 - 14y^2 = \pm 1$, on a (p. 184) $\sqrt{14} = 3\,(1, 2, 1, 6)$; le terme 1, qui précède 6, ne vient jamais qu'aux rangs pairs ; ainsi, la proposée est absurde en nombres entiers, dans le cas de -1. Dans celui de $+1$, on prend les convergentes $\frac{1}{0}$, $\frac{15}{4}$, $\frac{449}{120}$, $\frac{13455}{3596}$...., et l'on a, les signes étant d'ailleurs quelconques,

$$\pm z = 1,\ 15,\ 449\ldots.,\qquad \pm y = 0,\ 4,\ 120\ldots.$$

Soit $z^2 - 13u^2 = \pm 1$: comme $\sqrt{13} = 3\,(1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 6)$, les convergentes correspondantes au retour du terme 1 qui précède 6, sont $\frac{1}{0}$, $\frac{18}{5}$, $\frac{649}{180}$, $\frac{23882}{6485}$.... : d'où $z = 1{,}649\ldots.$, $y = 0,\ 180\ldots.$ pour $+1$; et $z = 18{,}23882\ldots.$ $y = 5{,}6485\ldots.$ pour -1.

Soit $z^2 - 3y^2 = 1$; comme $\sqrt{3} = 1\,(1,\ 2)$, toutes les convergentes $\frac{1}{0}$, $\frac{2}{1}$, $\frac{7}{4}$, $\frac{26}{15}$, $\frac{97}{56}$, $\frac{362}{209}$...., donnent des solutions; il n'y en a aucune, quand le 2e membre est -1.

L'équ. $z^2 - 5y^2 = \pm 1$ a ses solutions dans les fractions alternes $\frac{1}{0}$, $\frac{9}{4}$, $\frac{38}{17}$, $\frac{161}{72}$, $\frac{682}{305}$, $\frac{2889}{1292}$....

Étant donné un nombre impair $N = 2m + 1$; qu'il soit partagé en m et $m + 1$, ses deux moitiés inégales et entières, et qu'on décompose chaque partie en deux autres ; on pourra toujours choisir ces parties telles que leurs produits respectifs soient égaux, savoir :

$$x + x' = m,\qquad y + y' = m + 1,\qquad xx' = yy'.$$

En effet, éliminant x' et y', il vient $y^2 - x^2 = (m + 1)\,y - mx$. On résout cette équ., comme on l'a dit, en posant

$$x = \tfrac{1}{2}(z + m),\qquad y = \tfrac{1}{2}(t + m + 1),$$

d'où $$t^2 - z^2 = (m + 1)^2 - m^2 = 2m + 1 = N.$$

Ainsi, pour trouver t et z, on décomposera N en deux parties telles que ce nombre soit la différence de leurs carrés. Soient α et β, deux facteurs impairs produisant N, $N=\alpha\beta$, il viendra $(t+z)(t-z)=\alpha\beta$, $t+z=\alpha$, $t-z=\beta$; d'où

$$t=\frac{\alpha+\beta}{2},\ z=\frac{\alpha-\beta}{2},\ x=\frac{\frac{1}{2}(\alpha-\beta)+m}{2},\ y=\frac{\frac{1}{2}(\alpha+\beta)+m+1}{2}.$$

Comme α et β sont impairs, $\frac{1}{2}(\alpha\pm\beta)$ sont entiers, et il est aisé de voir que l'un de ces deux nombres est pair et l'autre impair : mais pour que x soit entier, il faut que m soit pair ou impair avec $\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$, condition qui rend y entier.

Ainsi pour $N=105=2.52+1$, en décomposant 105 en 35×3, on a $t=19$, $z=16$, $m=52$, $x=34$, $y=36$, $x'=18$, $y'=17$: et en effet, $34\times 18=36\times 17=612$.

Observez qu'en prenant $\beta=1$ pour l'un des facteurs de N, et $\alpha=2m+1$ pour l'autre, on trouve $t=m+1$, $z=m$, $x'=y'=0$: les quatre parties de N se réduisent donc à deux; alors il suit de ce qu'on vient de dire que *tout nombre impair* $2m+1$, *est la différence des deux carrés* $(m+1)^2-m^2$, ainsi qu'on le fait (n° 134, 2°). *Cette décomposition en deux carrés peut se faire de plusieurs manières* en prenant pour facteurs α et β produisant $2m+1$, des nombres tels que $\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$ soit pair ou impair avec m : *mais si le nombre* $2m+1$ *est premier, il n'y a qu'une seule manière de faire la décomposition.*

611. L'équation

$$az^2+2byz+cy^2+dz+ey+f=0,$$

la plus générale du 2e degré, se ramène à la précédente, en la dégageant des termes de 1re dimension. Soit fait

$$z=kz'+\alpha,\quad y=ly'+\beta;$$

d'où $\qquad 2a\alpha+2b\beta+d=0,\quad 2\beta c+2\alpha b+e=0, \ldots \quad (1)$

$$\alpha=\frac{cd-be}{2D},\quad \beta=\frac{ae-bd}{2D},$$

en posant $b^2-ac=D$. Tous nos coefficients sont supposés entiers. Or, il est clair que cette transformation n'est utile qu'autant que z' et y' sont entiers, en même temps que z et y. Faisons donc

les indéterminées $k = l = \frac{1}{2D}$, savoir,

$$z = \frac{z' + cd - be}{2D}, \quad y = \frac{y' + ae - bd}{2D} \quad \ldots \quad (2)$$

Les valeurs cherchées de y' et z' répondront à des entiers pour z et y : mais la réciproque n'a pas lieu, et l'on devra rejeter les solutions entières de z' et y', qui ne rendent pas z et y entiers. On aura ainsi toutes les valeurs demandées, en ne conservant pour x' et y' que les solutions trouvées, qui ont la forme convenable (nº 597). Maintenant, multiplions les équ. (1) respectivement par α et β, puis ajoutons ; nous avons

$$-(a\alpha^2 + 2b\alpha\beta + c\beta^2) = \frac{d\alpha + e\beta}{2} = \frac{ae^2 - 2bed + cd^2}{4D}.$$

Nous désignerons le numérateur par N : la transformée est

$$az'^2 + 2bz'y' + cy'^2 + 4D^2 f + ND = 0 \; ; \quad \ldots \quad (3)$$

équ. qu'on sait résoudre.

Lorsque $b^2 - ac = 0$, ce calcul ne peut plus se faire ; mais multipliant par a, les trois premiers termes forment le carré de $az + by$; posant ce binôme $= z'$, le reste du calcul est facile.

Soit $$7z^2 - 2zy + 3y^2 - 30z + 10y + 8 = 0;$$

les équ. (2) deviennent $z = \frac{z' - 80}{-40}$, $y = \frac{y' + 40}{-40}$; mais y et z ne sont entiers qu'autant que 40, facteur commun des constantes, l'est aussi de z' et y', qu'on peut changer en $40z'$ et $40y'$; ainsi ce facteur 40 s'en va, et l'on pose

$$z = z' + 2, \quad y = y' - 1, \quad 7z'^2 - 2z'y' + 3y'^2 = 27.$$

Cette équ. a été traitée (p. 188) et a donné $\pm z' = 0$ et 2, $\pm y' = 3$ et 1 ; donc on a

$$z = 4, 0, 2 \text{ et } 2, \quad \text{avec} \quad y = 0, -2, 2 \text{ et } -4.$$

Des Équ. indéterminées de degré supérieur.

612. Pour résoudre en nombres entiers l'équ.

$$my = a + bx + cx^2 + \ldots + kx^n,$$

observons que si $x = \alpha$, on a aussi $x = \alpha + mt$, t étant un nombre entier quelconque, puisqu'en substituant, le 2[e] membre prend la forme $a + b\alpha + c\alpha^2 \ldots + mT$, qui est visiblement divisible par m. Lorsque $\alpha > m$, si l'on prend pour t, l'entier contenu dans $\frac{\alpha}{m}$, la valeur $x = \alpha \pm mt$ se trouve comprise entre $+ \frac{1}{2} m$ et $- \frac{1}{2} m$. Donc *s'il existe des solutions entières de la proposée, il y en a toujours une infinité, et l'une au moins des valeurs de* x *est* $< \frac{1}{2}$ m, *dans chaque système* $x = \alpha \pm mt$.

Lorsqu'on divise par m ceux des coefficients $a, b, c \ldots$ qui sont $> m$, on extrait les parties entières, et on simplifie le problème. Du reste il suffit, pour résoudre l'équ., d'essayer pour x tour à tour, tous les entiers $< \frac{1}{2} m$, ce qui donnera les nombres simples α, et par suite toutes les valeurs de $x = \alpha + mt$.

Ainsi, pour l'équ. $7y = 17 + 9x - 3x^2 + 5x^3$, on posera $y = 2 + x + \dfrac{3 + 2x - 3x^2 + 5x^3}{7}$; puis, prenant $x = 0, 1, 2, 3$ et 4, tant en $+$ qu'en $-$, on reconnaîtra que $x = 2$ et ± 1 conviennent seuls; ce seront les valeurs de α dans $x = \alpha + 7t$, qui comprend toutes les solutions, et permet d'en conclure les valeurs correspondantes de y.

L'équ. la plus générale à deux inconnues x et y, dont l'une n'est qu'au 1[er] degré, est

$$y\,(a' + b'x + c'x^2 \ldots) = a + bx + cx^2 \ldots;$$

pour obtenir toutes les solutions entières, posons

$$a' + b'x + c'x^2 \ldots = m', \quad a + bx + cx^2 \ldots = m,$$

d'où $m'y = m$. Éliminons x, puis m, entre ces trois équ.; il viendra d'abord une équ. de la forme

$$A + Bm + Cm' + Dm'^2 + Emm' + Fm'^2 \ldots = 0,$$

puis $$A + Bm'y + Cm' + Dm'^2y^2 + \ldots = 0:$$

et comme tout est ici divisible par m', le 1[er] terme A doit aussi l'être, sans quoi la proposée n'admettrait aucune solution entière. On cherchera donc tous les diviseurs de A, tels que $\alpha, \beta, \gamma \ldots$ Ce seront les seules valeurs que m' puisse avoir : en faisant successivement

$$\alpha = a' + b'x + c'x^2 \ldots, \quad \beta = a' + b'x + \ldots, \quad \gamma = a' + \ldots \text{ etc.}$$

on prendra les racines entières de x; celles de ces racines qui rendront m multiple de m' pourront seules résoudre la question; mais il faudra en outre que le quotient $\frac{m}{m'} = y$ soit entier, afin d'avoir la valeur correspondante de y.

Observez que le long calcul de l'élimination dont on a parlé ne servant qu'à faire connaître le nombre A, on l'abrége beaucoup, en prenant m' et m nuls, c'est-à-dire, en cherchant le commun diviseur entre les polynômes $a' + b'x + \ldots$, et $a + bx +$ etc.; seulement il faut avoir l'attention de ne pas supprimer les facteurs numériques qui pourraient affecter tous les termes de l'un des restes, ainsi qu'on est en droit de le faire dans le calcul ordinaire. Cette opération donne A pour *reste final*, car s'il existait un commun diviseur numérique, on le supprimerait dans l'équ. proposée.

Par ex., soit $y(x^3 - 3) = x^2 + 1$, la recherche du commun diviseur entre $x^3 - 3$ et $x^2 + 1$, conduit au reste final 10, dont les diviseurs sont 1, 2, 5 et 10, en + et en — : prenons ces huit valeurs successivement pour m' dans les équ. $x^3 - 3 = m'$, $x^2 + 1 = m$, et nous verrons qu'on ne peut admettre que

$$\begin{array}{llllll} m' = -2, & \text{d'où} & x = 1, & m = 2, & y = -1, \\ m' = +5, & & x = 2, & m = 5, & y = +1: \end{array}$$

telles sont les deux seules solutions du problème.

Nous ne traiterons pas les équ. où les deux inconnues entrent à des degrés supérieurs, parce qu'on n'a aucune méthode générale pour les résoudre; on n'y parvient dans chaque cas particulier, que par des procédés spéciaux. *Voy.* les *Recherches arithm. de Gauss,* les *Mémoires de Berlin*, etc.

Résolution des Équations numériques.

613. Soit $fx = 0$ une équ. qui ait été préparée de manière à n'avoir aucunes racines commensurables, ou égales, ou comprises plusieurs ensemble entre deux nombres entiers successifs (n° 542); admettons qu'on connaisse pour chaque racine irrationnelle l'entier α qui est immédiatement moindre (n° 541), et procédons à l'approximation ultérieure.

D'après la règle donnée (n° 592), soit fait $x = \alpha + \frac{1}{x'}$, $fx = 0$ deviendra $f_1 x' = 0$. Or, par supposition, il y a une des valeurs de x' qui est > 1, et il n'y en a qu'une ; cette racine répond à la valeur de x dont α est la partie entière, et dont nous voulons approcher. Raisonnons de même pour $f_1 x' = 0$, et soit β l'entier approché de x' ; on est assuré qu'il n'y a qu'une valeur de x' qui soit positive et > 1 ; on posera donc $x' = \beta + \frac{1}{x''}$, x'' ayant une racine > 1, et une seule ; de là une transformée $f_2 x'' = 0$ dont x'' est l'inconnue. On voit donc que la racine x sera développée en fraction continue $x = \alpha, \beta, \gamma \ldots$; qu'on en tirera des convergentes de plus en plus approchées par excès et par défaut, alternativement ; que l'erreur résultante de chacune aura une limite connue, etc....

Quant au calcul de f_1, f_2, il est très-facile ; car soit $fx = kx^i + px^{i-1} + qx^{i-2} \ldots + u = 0$; si l'on pose $x = \alpha + t$, la transformée est (n° 504)

$$f\alpha + t\,f'\alpha + \tfrac{1}{2}\,t^2\,f''\alpha \ldots + kt^i = 0 :$$

mais ici $t = \frac{1}{x'}$; donc, en multipliant tout par x'^i,

$$f\alpha \,.\, x'^i + f'\alpha \,.\, x'^{i-1} + \tfrac{1}{2}\,f''\alpha \,.\, x'^{i-2} \ldots + k = 0.$$

$f\alpha$, $f'\alpha$, $f''\alpha \ldots$ sont les valeurs de fx et de ses dérivées, lorsqu'on y fait $x = \alpha$. Ainsi, après avoir calculé ces coefficients (*voy.* p. 42 *), il suffira de les substituer dans cette équ.

Soit proposée l'équ. $x^3 - 2x - 5 = 0$, dont une seule racine est réelle et comprise entre 2 et 3 (n° 560) ; appliquons notre méthode. En faisant $x = 2$, dans $x^3 - 2x - 5$, $3x^2 - 2$, $3x$ et 1, on trouve -1, 10, 6 et 1, pour coefficients de l'équ. en x'. Mais x' est entre 10 et 11, et l'on trouve de même pour les coefficients de l'équ.

* Voici le calcul prescrit p. 42 pour déduire f_2 de f_1 dans l'ex. suivant :

$f_1 x =$	-1	$+10$	$+6$	$+1 = 0$	entier 10
Facteur 10	-1	0	$+6$	$+61$	
	-1	-10	-94		
	-1	-20			
d'où	-1	-20	-94	$+61$	
$f_2 x$. . .	$+61$	-94	-20	-1	

en x'', 61, — 94, — 20, — 1; donc on obtient ces résultats, où l'on s'est dispensé d'écrire les puissances de x, x', x'', qui sont assez indiquées par les rangs des termes :

$fx =$	x^3	$+ 0x^2$	$- 2x$	$- 5$	$= 0$ entier	2,
$f_1 = -$	1	+ 10	+ 6	+ 1	= 0	10,
$f_2 =$	61	— 94	— 20	— 1	= 0	1,
$f_3 = -$	54	— 25	+ 89	+ 61	= 0	1,
$f_4 =$	71	— 123	— 187	— 54	= 0	2,
$f_5 = -$	352	+ 173	+ 303	+ 71	= 0	1,
$f_6 =$	195	— 407	— 883	— 352	= 0	3,
etc.						

Donc $x = 2,\ 10,\ 1,\ 1,\ 2,\ 1,\ 3 \ldots = \frac{576}{275} = 2{,}09455\ldots;$

valeur qui a 5 décimales exactes, puisqu'elle n'est pas en erreur de $\left(\frac{1}{275}\right)^2$.

L'équ. $x^3 - x^2 - 2x + 1 = 0$ a ses trois racines réelles, et comprises entre 1 et 2, 0 et 1, — 1 et — 2. Approchons d'abord de la 1re.

f	x^3	$- x^2$	$- 2x$	$+ 1$	$= 0$ entier	1,
f_1 . . . . —	1	— 1	+ 2	+ 1	= 0	1,
f_2	1	— 3	— 4	— 1	= 0	4,
f_3 . . . . —	1	+ 20	+ 9	+ 1	= 0	20,
f_4	181	— 391	— 40	— 1	= 0	2,
f_5 . . . . —	197	+ 568	+ 695	+ 181	= 0	3,
f_6	2059	— 1216	— 1205	— 197	= 0	1,
etc.						

$$x = 1,\ 1,\ 4,\ 20,\ 2,\ 3,\ 1,\ 6,\ 10,\ 5,\ 2 = \frac{1289054}{715371} = 1{,}8019377358.$$

La racine comprise entre 0 et 1 se trouve de même; et comme dès la 2e opération on retombe sur la transformée (2), on doit retrouver les équ. 3, 4, 5 . . . . ; d'où

$$x = 0,\ 2,\ 4,\ 20,\ 2,\ 3,\ 1,\ 6,\ 10,\ 5,\ 2 = \frac{573683}{1289054} = 0{,}4450418679.$$

Enfin, pour la racine négative, il faut changer x en $-x$; et comme on a alors l'équ. (1), on pose de suite

$$-x = 1,\ 4,\ 20,\ 2,\ 3,\ 1,\ 6,\ 10,\ 5,\ 2 = \frac{715371}{573683} = 1{,}2469796037.$$

Nous rencontrons ici une particularité propre à l'exemple proposé, en sorte que les trois racines se trouvant formées des mêmes termes, on est dispensé du calcul des deux dernières.

Pour $fx =$		$2x^2$	$-$	$14x$	$+$	17	$= 0$	entier		5
on a $f_1 =$	....	$-$	5	$+$	6	$+$	2	$= 0$	....	2
$f_2 =$		$+$	2	$-$	6	$-$	3	$= 0$	....	3
$f_3 =$		$-$	3	$+$	6	$+$	2	$= 0$	....	2

On retrouve f_1; donc $x = 5\ [2, 3]$ comme p. 172.

614. Exposons maintenant les moyens d'abréger ces divers calculs.

La fraction continue ayant été poussée jusqu'à l'entier y^i, $x = \alpha, \beta, \gamma, \ldots \nu$, soient $\frac{m}{m'}$ et $\frac{n}{n'}$ les deux dernières convergentes; il suit de l'équ. (G, n° 593), ainsi qu'on a vu p. 182, que si z représente la valeur du reste de la fraction continue, on a

$$z = -\frac{m'x - m}{n'x - n} = -\frac{m'}{n'} \mp \frac{1}{n'(n'x - n)},$$

en commençant la division, et à cause de $m'n - mn' = \pm 1$. Soit δ la différence entre x et la convergente $\frac{n}{n'}$, ou $\delta = \frac{n}{n'} - x$, on a $n'x - n = -n'\delta$; d'où

$$z = -\frac{m'}{n'} \pm \frac{1}{\delta \cdot n'^2}.$$

Ici x désigne, il est vrai, la racine dont on veut approcher, et z est une valeur qui en dépend; mais chacune des autres racines x', x''.... donne une équ. semblable; ainsi, z', z''.... étant les valeurs de z correspondantes, on a

$$z' = -\frac{m'}{n'} \pm \frac{1}{\delta' \cdot n'^2},\ z'' = -\frac{m'}{n'} \pm \frac{1}{\delta'' \cdot n'^2}, \text{ etc.}$$

Ajoutons ces $(i - 1)$ équ. et faisons pour abréger $\Delta = \frac{1}{\delta'} + \frac{1}{\delta''} + \ldots$; nous avons

$$z' + z'' + z''' \ldots = -\frac{m'}{n'}(i - 1) \pm \frac{\Delta}{n'^2}.$$

La transformée en z étant représentée par $Az^i + Bz^{i-1} + \ldots = 0$, la somme des racines est $z + z' + z'' \ldots = -\frac{B}{A}$; retranchant l'équ. précédente,

$$z = \frac{m'}{n'}(i-1) - \frac{B}{A} \mp \frac{\Delta}{n'^2}; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (a)$$

mais $\frac{n}{n'}$ ne tarde pas à approcher assez de x pour que δ soit fort petit; δ', $\delta''\ldots$, qui sont les différences des autres racines x', $x''\ldots$ à notre convergente, sont à peu près égales aux différences de ces racines à x; et plus ces différences sont grandes, plus Δ est petit; n' croît d'ailleurs de plus en plus : ainsi, le dernier terme de notre équ. est alors négligeable ; d'où

$$z = \frac{m'}{n'}(i-1) - \frac{B}{A}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (b)$$

Non-seulement cette équ. donne l'entier π, contenu dans z, mais même en résolvant en continue, par la méthode du commun diviseur, on peut prendre plusieurs termes successifs, comme composant la valeur de z et continuant celle de x; $z = \pi, \rho, \sigma \ldots$; d'où $x = \alpha, \beta, \ldots \nu, \pi, \rho, \sigma \ldots$ En arrêtant la fraction z à l'un de ses termes σ, soient $\frac{p}{p'}$, $\frac{q}{q'}$ les deux dernières convergentes, on a (équ. G, p. 163)

$$z = \frac{q\sigma + p}{q'\sigma + p'};$$

et substituant dans la transformée en z, on passe de suite à celle qui répond au terme σ, en supposant qu'en effet ce terme convienne à la valeur de x. Puisque $z = -\frac{m'x - m}{n'x - n}$, il suffira d'avoir deux limites rapprochées, entre lesquelles x soit compris, et de substituer ces limites dans cette fraction, pour avoir celles de z : ces dernières résolues en continues, leurs termes communs le seront aussi à z, et continueront x.

Pour la 1re racine du dernier ex., partons de la transformée f_4; les convergentes sont $\frac{9}{5} = 1, 1, 4$; $\frac{182}{101} = 1, 1, 4, 20$; d'où l'on tire $z = \frac{10}{101} + \frac{391}{181} = \frac{41301}{18281} = 2, 3, 1, 6 \ldots$; on remarque que les quatre 1ers termes continuent la valeur de x, laquelle acquiert

de suite 8 termes. On en tire les convergentes $\frac{3}{4}$ et $\frac{61}{27}$; d'où $z = \dfrac{61u + 9}{27u + 4}$, et par suite la transformée f_8, en substituant dans f_4; et ainsi de suite.

Quand la racine x est commensurable, la fraction continue se termine ; sans cela elle va à l'infini. Si la proposée admet quelque facteur rationnel du 2e degré, on obtient une période, et le retour des mêmes termes annonce cette circonstance. Ainsi l'équation $x^4 - 2x^3 - 9x^2 + 22x - 22 = 0$, lorsqu'on veut poursuivre la racine qui est entre 3 et 4, donne

$$\begin{array}{llllllll} f_1 = - & 10 + & 22 + & 27 + & 10 + & 1 = 0 & \text{entier} & 3, \\ f_2 = & 58 - & 314 - & 515 - & 98 - & 10 = 0 & \ldots\ldots & 6, \\ f_3 = - & 4594 + & 12322 + & 6561 + & 1078 + & 58 = 0 & \ldots\ldots & 3, \text{ etc.} \end{array}$$

Cette dernière équ. conduit à $z = \frac{9}{19} + \frac{12322}{14594} = \frac{275464}{87286} = 3, 6\ldots$ Le retour des chiffres (3, 6) fait présumer une période : en supposant qu'elle existe, on trouve que $x^2 - 11$ doit être diviseur de la proposée (n° 607); on essaye cette division, qui donne le quotient exact $x^2 - 2x + 2$.

La résolution de l'équ. $x^i = A$, ou l'extraction des racines, rentre dans cette méthode. Ainsi $x^3 = 17$ donne

$$x = 2, 1, 1, 3, 138 = \tfrac{2489}{968};$$

et formant la valeur de z, on arrive à $z = 1, 3, 2\ldots$; d'où

$$x = \tfrac{22527}{8761} = 2,5712818.$$

615. L'équation $10^x = 29$ se traite de la même manière. On trouve d'abord que x est entre 1 et 2 ; savoir,

$$x = 1 + \frac{1}{x'},\ 10^{1+\frac{1}{x'}} = 29;\ 10 \times 10^{\frac{1}{x'}} = 29;\ 10 = (2,9)^{x'}.$$

On voit ensuite que x' est entre 2 et 3 ;

$$x' = 2 + \frac{1}{x''},\quad 10 = (2,9)^2 \cdot (2,9)^{\frac{1}{x''}},\quad \left(\tfrac{1000}{841}\right)^{x''} = 2,9; \text{ et}$$

ainsi de suite. Donc

$$x = 1, 2, 6, 6, 1, 2, 1, 2\ldots = \tfrac{1439}{984} = 1,4623980.$$

Cette valeur $>x$ est approchée à moins de $(\frac{1}{984})^2$, avec six chiffres décimaux exacts.

$10^x = 23$ donne $x = 1, 2, 1, 3, 4, 17, 2 = \frac{2270}{1667} = 1,3617278$.

insi, on sait résoudre, par approximation, l'équ. $10^x = b$, et comme on peut prendre au lieu de 10, toute autre base, *on sait calculer le logarithme d'un nombre dans tout système.*

CHAPITRE VI.

MÉTHODE DES COEFFICIENTS INDÉTERMINÉS.

Décomposition des Fractions rationnelles.

616. F et φ étant des fonctions de x *identiques,* c'est-à-dire qui n'ont qu'une simple dissemblance provenue de la manière dont elles sont exprimées algébriquement, l'équ. $F = \varphi$ n'a pas besoin pour se vérifier qu'on attribue à x des valeurs convenables, et doit subsister, quel que soit le nombre qu'on juge à propos de mettre pour x. Supposons que, par des artifices d'analyse, on parvienne à ordonner F et φ par rapport à x, sous la même forme

$$a + bx + cx^2 + dx^3 \ldots = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 \ldots;$$

puisqu'il n'y avait entre F et φ qu'une différence apparente due aux formes sous lesquelles ces fonctions étaient exprimées, cette difference de formes n'existant plus, on doit précisément trouver dans un membre tout ce qui entre dans l'autre ; donc

$$a = A, \quad b = B, \quad c = C \ldots$$

Et en effet, puisque l'équ. doit subsister pour toute valeur de x, si l'on prend $x = 0$, on a $a = A$. Ces deux constantes n'ont pas été rendues égales par cette supposition ; elles l'étaient sans cela, et l'hypothèse n'a été ici qu'un moyen de mettre cette vérité en évidence. Dès lors, quel que soit x, on a encore

$$bx + cx^2 + \ldots = Bx + Cx^2 \ldots;$$

divisant par x,

$$b + cx + \text{etc.} = B + Cx \ldots;$$

le même raisonnement prouve que $b = B$, puis $c = C \ldots$

Ainsi, étant donnée une fonction F, après s'être assuré directement qu'elle est susceptible d'être exprimée sous une forme désignée φ, contenant des coefficients constants $A, B, C \ldots$, il est aisé de trouver ces nombres. 1° On écrira l'identité $F = \varphi$, F étant la fonction proposée, et φ sa valeur mise sous une autre forme reconnue convenable, et contenant les *coefficients indéterminés* A, B, C....; 2° par des calculs appropriés, on *ordonnera* les deux membres F et φ selon les puissances de x; 3° on *égalera entre eux les termes affectés des mêmes puissances de* x; 4° enfin, on *éliminera* entre ces équ. pour en tirer les valeurs des constantes inconnues $A, B, C \ldots$

Appliquons ce principe à divers exemples.

617. N étant le numérateur d'une fraction rationnelle, D le dénominateur, proposons-nous de la décomposer en d'autres dont elle soit la somme. Par la division, on peut toujours abaisser le degré du polynôme N, par rapport à x, au-dessous de D; c'est dans cet état que nous prenons la fraction. Soit $D = P \times Q$, P et Q étant des polynômes premiers entre eux, des degrés p et q, posons

$$\frac{N}{D} = \frac{Ax^{q-1} + Bx^{q-2} \ldots + L}{Q} + \frac{A'x^{p-1} + B'x^{p-2} \ldots + L'}{P}.$$

Pour réduire au même dénominateur $D = P \times Q$, multiplions $Ax^{q-1} + \ldots$ par P, et $A'x^{p-1} + \ldots$ par Q; ces produits seront de degré $p + q - 1$, c'est-à-dire formeront un *polynôme complet* d'un degré moindre de 1 que D; et comme N est au plus de ce même degré, en comparant chaque terme de N à ceux des produits ci-dessus, on en tirera $p + q$ équations entre les coefficients inconnus $A, A', B, B' \ldots$, dont le nombre est visiblement $p + q$, puisque nos numérateurs ont q et p termes; ces inconnues ne seront qu'au 1er degré, et le calcul conduira bientôt à les trouver. Il est donc prouvé que la décomposition indiquée est légitime, et le calcul donne actuellement les valeurs de toutes les parties composantes.

Et si P et Q sont eux-mêmes décomposables en d'autres facteurs premiers entre eux, sans chercher à déterminer $A, A', B \ldots$, on remplacera chaque fraction par d'autres formées selon le même principe; c'est-à-dire que, *pour décomposer la fraction rationnelle*

proposée, il faut trouver les facteurs premiers entre eux de son dénominateur, et égaler cette fraction à une suite d'autres qui aient ces facteurs pour dénominateurs, et dont les numérateurs soient des polynômes respectivement d'un degré moindre d'une unité.

On égalera donc D à zéro pour le résoudre en ses facteurs simples ; et il se présentera deux cas, selon que D n'aura que des facteurs inégaux, ou en aura d'égaux. Examinons ces deux cas séparément.

1[er] CAS. Si $D = (x-a)(x-b)(x-c)\ldots$, on posera

$$\frac{N}{D} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} + \frac{C}{x-c} + \ldots,$$

et il s'agira de déterminer $A, B, C\ldots$ par le procédé qu'on vient d'exposer.

Par exemple, soit $D = (x-a)(x-b)$; on a

$$\frac{kx+l}{(x-a)(x-b)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b},$$

d'où
$$kx + l = A\,(x-b) + B\,(x-a)$$
$$= (A+B)\,x - Ab - Ba.$$

Ainsi
$$k = A + B, \quad -l = Ab + Ba\,;$$

et enfin
$$A = -\frac{ka+l}{b-a}, \quad B = \frac{kb+l}{b-a}.$$

Pour $\dfrac{2-4x}{x^2-x-2}$, j'égale le dénominateur à zéro pour en obtenir les facteurs binômes ; $x^2 - x = 2$ donne $x = 2$ et -1 ; ce sont les valeurs de b et a. On a $k = -4$, $l = 2$; ainsi

$$\frac{2-4x}{x^2-x-2} = \frac{-2}{x+1} - \frac{2}{x-2}.$$

De même, $\dfrac{1}{a^2 - x^2} = \dfrac{1}{2a(a+x)} + \dfrac{1}{2a(a-x)}$.

Soit encore $\dfrac{1}{x(a^2-x^2)} = \dfrac{A}{x} + \dfrac{B}{a+x} + \dfrac{C}{a-x}$;

on trouve $1 = Aa^2 + ax\,(B+C) + x^2\,(C-A-B)$;

donc
$$1 = Aa^2, \quad B + C = 0, \quad C - A - B = 0.$$

Éliminant, on a A, B, C, puis

$$\frac{1}{x(a^2-x^2)} = \frac{1}{a^2x} - \frac{1}{2a^2(a+x)} + \frac{1}{2a^2(a-x)}.$$

Lorsque D a des facteurs binômes imaginaires, la même méthode peut s'appliquer, mais on préfère souvent ne décomposer D qu'en facteurs trinômes réels, tels que x^2+px+q, et la proposée, qu'en fractions de la forme $\frac{Ax+B}{x^2+px+q}$. C'est ainsi que pour

$$\frac{x^2-x+1}{(x+1)(x^2+1)} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{C}{x+1},$$

on trouve $\qquad C=\frac{3}{2}, \quad B=A=-\frac{1}{2}.$

De même, $\qquad \frac{x}{x^3-1} = \frac{Ax+B}{x^2+x+1} + \frac{C}{x-1},$

donne $\qquad -A=B=C=\frac{1}{3}.$

2e cas. Chaque facteur de D, de la forme $(x-a)^i$, donne lieu à une composante telle que $\frac{Ax^{i-1}+Bx^{i-2}\ldots}{(x-a)^i}$; mais comme celle-ci est elle-même décomposable, on pose de suite, au lieu de cette fraction, la somme équivalente

$$\frac{A}{(x-a)^i} + \frac{B}{(x-a)^{i-1}} + \frac{C}{(x-a)^{i-2}} \ldots + \frac{L}{x-a}.$$

Et en effet, il est visible qu'en réduisant au même dénominateur, le numérateur a la même forme que ci-devant, et un égal nombre de constantes inconnues.

$$\frac{x^3+x^2+2}{x(x-1)^2(x+1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{x+1} + \frac{D}{(x-1)^2} + \frac{E}{x-1}$$

donne $\qquad = \frac{2}{x} - \frac{\frac{1}{2}}{(x+1)^2} - \frac{\frac{5}{4}}{x+1} + \frac{1}{(x-1)^2} - \frac{\frac{3}{4}}{x-1}.$

On trouvera de même

$$\frac{1}{x(x+1)^2(x^2+x+1)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{(x+1)^2} - \frac{2}{x+1} + \frac{x}{x^2+x+1}.$$

Si les facteurs égaux du dénominateur étaient imaginaires, quoique le même procédé puisse être appliqué, il sera préférable de les réunir en facteurs réels du 2e degré, sous la forme $(x^2+px+q)^i$; le numérateur est alors $Ax^{2i-1}+Bx^{2i-2}+\ldots$ ou plutôt on prend les fractions composantes

$$\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^i}+\frac{Cx+D}{(x^2+px+q)^{i-1}}+\ldots+\frac{Kx+L}{x^2+px+q}.$$

Par exemple, on fera

$$\frac{1}{(x+1)\,x^2(x^2+2)\,(x^2+1)^2}$$

$$=\frac{A}{1+x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x}+\frac{Dx+E}{x^2+2}+\frac{Fx+G}{(x^2+1)^2}+\frac{Hx+I}{x^2+1}.$$

Le calcul donnera

$$A=\tfrac{1}{12},\ B=-C=\tfrac{1}{2},\ D=-E=\tfrac{1}{6},\ F=-G=\tfrac{1}{2},$$
$$H=-I=\tfrac{1}{4}.$$

618. L'usage fréquent qu'on fait de la décomposition des fractions rationnelles, rend très-utile la méthode suivante, qui abrége les calculs.

1er CAS. *Facteurs inégaux.* Soit $D=(x-a)\,S$, S étant un produit de facteurs tout différents de $x-a$. La dérivée est

$$D'=S+(x-a)\,S';\ \text{on pose *}$$

$$\frac{N}{D}=\frac{A}{x-a}+\frac{P}{S};\ \text{d'où}\quad N=AS+P\,(x-a).$$

* Si le facteur a la forme $px+q$, au lieu de $x-a$, la fraction composante est

$$\frac{A}{px+q}=\frac{1}{p}\ \frac{A}{x+\frac{q}{p}}=\frac{A'}{x+\frac{q}{p}},\quad A=A'p;$$

on fera donc $x=-\dfrac{q}{p}$ dans $\dfrac{N}{D'}$; mais pour avoir le numérateur A de la fraction, on devra multiplier le résultat par le coefficient p de x. Ainsi pour

$$\frac{6+23x}{2-x-6x^2}=\frac{A}{1-2x}+\frac{B}{3x+2},$$

il faut substituer $x=+\frac{1}{2}$ et $-\frac{2}{3}$ dans $\dfrac{N}{D'}=\dfrac{6+23x}{-1-12x}$; mais on multipliera les résultats par -2 et $+3$; d'où $A=5$, $B=-4$.

Il s'agit de déterminer la constante A, sans connaître le polynôme P. Si l'on fait $x = a$, et qu'on désigne par n, s et d ce que deviennent N, S et D, par cette hypothèse (nous ferons usage, dans ce qui suit, de cette notation), nous avons $d' = s$ et $n = As$; partant, $A = \frac{n}{s} = \frac{n}{d'}$. Donc *remplacez le dénominateur* D *de la fraction proposée par sa dérivée* D'; *puis changez* x *en* a, *vous aurez le numérateur* A *de la fraction composante dont* x — a *est le dénominateur.* On devra de même faire $x = b, c \ldots$ dans $\frac{N}{D'}$, pour avoir les numérateurs de $\frac{B}{x-b}, \frac{C}{x-c} \ldots$, en supposant

$$D = (x-a)(x-b)(x-c)\ldots$$

Pour $\frac{-5x^2-5x+6}{x^4-2x^3-x^2+2x}$, posez $\frac{N}{D'} = \frac{-5x^2-5x+6}{4x^3-6x^2-2x+2}$;

or, vous avez $D = (x-1)(x+1)(x-2)x$; faites donc $x = 1$, -1, 2 et 0, et vous aurez 2, -1, -4 et 3 pour résultats; la proposée revient à $\frac{2}{x-1} - \frac{1}{x+1} - \frac{4}{x-2} + \frac{3}{x}$.

Soit la fraction $\frac{1}{z^6-1}$; on a $\frac{N}{D'} = \frac{1}{6z^5}$; or (p. 131),

$$z^6 - 1 = (z+1)(z-1)(z^2-z+1)(z^2+z+1).$$

Pour les deux 1ers facteurs, on fait $z = \pm 1$, et l'on a $\pm \frac{1}{6}$; le facteur suivant donne $z = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{-3})$; d'où l'on tire

$$\frac{2^5}{6(1\pm\sqrt{-3})^5} = \frac{32}{6(16 \mp 16\sqrt{-3})} = \frac{1\pm\sqrt{-3}}{12};$$

les deux fractions composantes sont faciles à trouver; réduites en une seule, on a $\frac{1}{6} \cdot \frac{z-2}{z^2-z+1}$. Enfin, le 4e facteur de D indique qu'il suffit de changer z en $-z$ dans ce dernier résultat. Donc,

$$\frac{1}{z^6-1} = \frac{1}{6}\left(\frac{1}{z-1} - \frac{1}{z+1} + \frac{z-2}{z^2-z+1} - \frac{z+2}{z^2+z+1}\right).$$

2e CAS. *Facteurs égaux*. Soit $D=(x-a)^i$, si l'on change x en $a+h$ dans N et D, ces polynômes deviennent (nº 504)

$$N=n+n'h+\tfrac{1}{2}n''h^2+\tfrac{1}{6}n'''h^3+\ldots,\ \text{et}\ D=h^i.$$

En divisant, et mettant $x-a$ pour h, on trouve

$$\frac{N}{D}=\frac{n}{(x-a)^i}+\frac{n'}{(x-a)^{i-1}}+\frac{\frac{1}{2}n''}{(x-a)^{i-2}}+\ldots.$$

Ainsi *la proposée se décompose en* i *fractions, dont les numérateurs sont ce que deviennent* N, N′, ½ N″. . . . *en faisant* x = a.

Par exemple, $\dfrac{3x^2-7x+6}{(x-1)^3}$; comme le numérateur a pour dérivées $6x-7$ et 6, en faisant $x=1$, on obtient 2, — 1 et 3 pour numérateurs des fractions composantes, savoir,

$$\frac{3x^2-7x+6}{(x-1)^3}=\frac{2}{(x-1)^3}-\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{3}{x-1}.$$

Mais si le dénominateur contient d'autres facteurs avec $(x-a)^i$, et qu'on ait $D=(x-a)^i.S$, S étant connu et non divisible par $x-a$, on pose

$$\frac{N}{D}=\frac{F}{(x-a)^i}+\frac{P}{S};\quad\ldots\ldots\quad(1)$$

d'où $$N=P(x-a)^i+FS.$$

Changeons x en $a+y$ dans cette équ. identique, et développons (nº 504);

$$n+n'y+\tfrac{1}{2}n''y^2\ldots=y^i(p+p'y+\tfrac{1}{2}p''y^2\ldots$$
$$+(f+f'y+\tfrac{1}{2}f''y^2\ldots).(s+s'y+\tfrac{1}{2}s''y^2\ldots),$$

en conservant la notation employée ci-dessus pour n, d, s et f. Comparant des deux parts les coefficients des mêmes puissances de y (nº 616), nous avons

$$n=fs,\quad n'=f's+fs',\quad n''=f''s+2f's'+fs'',\ \ldots\quad(2)$$
$$n^{(l)}=sf^{(l)}+ls'f^{(l-1)}+\tfrac{1}{2}l(l-1)s''f^{(l-2)}\ldots+fs^{(l)}.$$

l désigne ici un entier quelconque $< i$. Ainsi, ces équ. donnent $f, f', f''\ldots$, et par conséquent le développement de la première partie,

$$\frac{F}{(x-a)^i}=\frac{f}{(x-a)^i}+\frac{f'}{(x-a)^{i-1}}+\frac{\frac{1}{2}f''}{(x-a)^{i-2}}\ldots,$$

précisément comme si la fraction proposée n'eût eu que $(x-a)^i$ au dénominateur. On tire de cette équ.

$$F=f+f'.(x-a)+\tfrac{1}{2}f''.(x-a)^2+. \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

F est donc connu; et l'on a dans l'équ. (1)

$$\frac{P}{S}=\frac{N-FS}{D}=\frac{N-FS}{(x-a)^iS}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Cette identité exige que $(x-a)^i$ soit facteur de $N-FS$; il faut effectuer la division pour obtenir le quotient P; la 2e partie de notre fraction proposée est connue, et il faut la décomposer à son tour.

Soit, par ex., $\dfrac{N}{D}=\dfrac{5x^4-13x^3+14x^2-5x+3}{(x-1)^3(x+1)x}$;

faites $x=1$ dans $S=x^2+x=2$, $S'=2x+1=3$, $S''=2$,

$N=5x^4-13x^3+\ldots=4$, $N'=20x^3\ldots=4$, $N''=10$.

Donc, $4=2f$, $4=2f'+3f$, $10=2f''+6f'+2f$;

puis, $\quad f=2, \quad f'=-1, \quad \tfrac{1}{2}f''=3,$

$$F=2-(x-1)+3(x-1)^2=3x^2-7x+6.$$

Le produit FS, retranché de N, donne

$$2x^4-9x^3+15x^2-11x+3,$$

qui, divisé par $(x-1)^3$, donne $P=2x-3$.

Il reste à décomposer, par le premier procédé,

$$\frac{P}{S}=\frac{2x-3}{x^2+x}; \quad \text{d'où } \frac{P}{S'}=\frac{2x-3}{2x+1};$$

faisant $x=-1$ et 0, il vient 5 et -3; puis

$$\frac{N}{D}=\frac{2}{(x-1)^2}-\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{3}{x-1}+\frac{5}{x+1}-\frac{3}{x}.$$

Observez que, dans cet ex., il eût été plus court de déterminer d'abord les deux dernières fractions, en faisant $x=-1$ et 0 dans N et D'; d'où

$$\frac{N}{D}=\frac{F}{(x-1)^3}+\frac{5}{x+1}-\frac{3}{x}.$$

Transposant ces deux dernières fractions et réduisant, on trouve aisément la première $\frac{F}{(x-1)^3} = \frac{3x^2 - 7x + 6}{(x-1)^3}$, qui rentre dans ce qu'on a vu ci-devant, et est très-facile à décomposer.

De même, pour $\frac{N}{D} = \frac{x^3 - 6x^2 + 4x - 1}{x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 7x + 6}$, comme $D = (x+1)^2 (x-2)(x-3)$, on fera $x = 2$ et 3 dans N et D'; on aura les fractions $\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-3}$; retranchant de la proposée, on a $\frac{x}{(x+1)^2}$ qu'il s'agit de décomposer. Mais on trouve $f = -1$, $f' = 1$; donc il vient enfin, en réunissant ces parties,

$$\frac{N}{D} = \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-3} - \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{x+1}.$$

Sur la convergence des Séries.

619. On ne peut prendre la somme des n premiers termes d'une série pour valeur approchée de sa totalité, qu'autant que cette série est *convergente,* c'est-à-dire, que *cette somme approche de plus en plus d'une limite,* à mesure qu'on prend n plus grand : cette limite est la somme de toute la série.

Il est aisé de reconnaître si les termes vont en décroissant, quand on a le *terme général,* expression analytique du terme du rang n : mais les termes peuvent décroître, sans pour cela que la série soit convergente. C'est ainsi que $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \ldots$ est une série divergente, quoique le terme général $\frac{1}{n}$ montre que les termes diminuent sans cesse. En effet prenons n termes à partir du n^e,

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \ldots + \frac{1}{2n}.$$

Chacun est visiblement $> \frac{1}{2n}$, et la somme $> n \times \frac{1}{2n}$, ou $\frac{1}{2}$: de même, la somme des $2n$ termes qui suivent ceux-ci est aussi $> \frac{1}{2}$, etc.; en sorte que la somme totale surpasse $\frac{1}{2} \times \infty$: il n'y a pas de limite.

1° Quand $x < 1$, la progression géométrique $a + ax + ax^2 \dots$ est convergente, car outre que ses termes décroissent, les sommes prises à partir du terme de rang n sont

$$x^n + x^{n+1} = x^n (1 + x) = x^n \left(\frac{1 - x^2}{1 - x}\right)$$

$$x^n + x^{n+1} + x^{n+2} = x^n \left(\frac{1 - x^3}{1 - x}\right), \text{ etc.}$$

On voit que, x étant < 1, à mesure que n augmente, ces sommes sont de plus en plus petites, et tendent vers zéro.

2° Si l'on connaît le terme général u_n d'une série $u_0 + u_1 + u_2 \dots$ On changera n en $n + 1$, et on aura le terme de rang $n + 1$, et le quotient $F = \frac{u_{n+1}}{u_n}$ sera le facteur qui multipliant un terme produira le suivant. *Or si tous les termes sont positifs et si, pour de grandes valeurs de* x, F *tend vers une limite* L, *la série est convergente ou divergente, selon que cette limite* F *est* $<$ *ou* $>$ 1.

En effet, supposons d'abord $L < 1$, et prenons un nombre quelconque l intermédiaire à L et 1, en sorte que $L < l < 1$. Puisque F converge vers L à mesure que n s'accroît, il s'ensuit qu'à partir d'un rang n suffisamment grand, le facteur F approchera autant qu'on voudra de L, et deviendra par conséquent $< l$; d'où

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} < l,\ u_{n+1} < lu_n,\ u_{n+2} < lu_{n+1},\ u_{n+3} < lu_{n+2} \dots$$

$$\text{à fortiori} \quad u_{n+1} < lu_n,\ u_{n+2} < l^2 u_n,\ u_{n+3} < l^3 u_n \dots$$

Ces termes consécutifs étant moindres que ceux de la progression géométrique $u_n(l + l^2 + l^3 \dots)$, qui est convergente, il s'ensuit que la série proposée l'est aussi.

On prouve de même que si $L > 1$, les termes $u_{n+1}, u_{n+2}, \dots$ sont plus grands que ceux d'une progression géométrique dont la raison l étant > 1, on arrive à des termes aussi grands qu'on veut, ce qui montre que la série est divergente.

Ainsi pour $(x + a)^m$, il suit de la valeur (7), p. 11, et de la relation (4), p. 5, que $F = \frac{m - n}{n + 1} \cdot \frac{x}{a}$; plus n croît, et plus F approche de la limite $\frac{x}{a}$, que ce facteur atteint pour $n = \infty$: donc la formule

du binôme est convergente ou divergente selon que $x <$ ou $> a$.

Au reste, les deux transformations suivantes sont propres à augmenter la convergence de cette série

$$x + a = \frac{x}{1 - \frac{a}{x+a}} = \frac{2a}{1 - \frac{x-a}{x+a}}$$

$$(x+a)^m = x^m \left(1 - \frac{a}{x+a}\right)^{-m} = 2^m a^m \left(1 - \frac{x-a}{x+a}\right)^{-m},$$

$$(x+a)^m = x^m \left\{1 + m\left(\frac{a}{x+a}\right) + m\frac{m+1}{2}\left(\frac{a}{x+a}\right)^2 + \ldots\right\}$$

$$= 2^m a^m \left\{1 + m\left(\frac{x-a}{x+a}\right) + m\frac{m+1}{2}\left(\frac{x-a}{x+a}\right)^2 + \ldots\right\}$$

Voy. p. 14 pour la loi des coefficients.

Prenons la série $1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1\,.\,2} + \frac{x^3}{1\,.\,2\,.\,3} + \frac{x^4}{1\,.\,.\,.\,.\,4} +$ etc.

le terme général $\frac{x^n}{1\,.\,2\,.\,.\,n}$ donne $F = \frac{x}{n+1}$, qui a zéro pour limite quand $n = \infty$; cette série est donc convergente.

3° Observez que quand une série renferme des termes négatifs, si en changeant les — en +, on trouve qu'il y a convergence, cette propriété a lieu aussi pour la proposée : car les termes négatifs devant être retranchés des positifs, ne font que diminuer la somme totale, et tendent par conséquent à augmenter la convergence.

Pour $x - \frac{x^3}{2\,.\,3} + \frac{x^5}{2\,.\,3\,.\,4\,.\,5} - \frac{x^7}{2\ldots.7}$ etc., en rendant tous les termes positifs, on a pour terme général

$$u_n = \frac{x^{2n-1}}{2.3\ldots(2n-1)},\ u_{n+1} = \frac{x^{2n+1}}{2.3\ldots.\,2n(2n+1)},\ F = \frac{x^2}{2n(2n+1)}$$

comme $n = \infty$ donne $F = 0$, la série est convergente : d'ailleurs posant $F < 1$, on trouve $x^2 < 4n^2 + 2n$; si l'on prend $4n^2 > x^2$, ou $n > \frac{1}{2}x$, on voit qu'à partir du rang $\frac{1}{2}x$ les termes vont en décroissant.

4° *Toute série dont les termes ont des signes alternatifs + et —, est convergente, quand ces termes décroissent sans bornes vers la limite zéro.* Car soit $a - b + c - d + \ldots.$; comme chaque terme négatif

peut être retranché du positif qui le précède, on n'a que des binômes positifs, et la somme prend le signe $+$: d'un autre côté on peut écrire $a - (b - c) - (d - e) \ldots$; et a doit surpasser toutes les parties soustractives. Or on peut prendre pour a un terme assez éloigné dans la série pour qu'il soit aussi petit qu'on voudra ; donc *à fortiori* la somme totale depuis a jusqu'à l'infini est dans le même cas.

C'est ainsi que la série $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \ldots$ est convergente, quoique elle ne le soit pas quand tous les signes sont $+$.

Voy. *le Cours d'analyse* de M. Cauchy, p. 123.

Séries récurrentes.

620. Toute fraction rationnelle, ordonnée selon les puissances croissantes de x, dont le numérateur N est d'un degré moins élevé que le dénominateur D, peut se développer en une série infinie $A + Bx + Cx^2 + Dx^3 \ldots$; cela résulte de la division actuelle de N par D, puisque le quotient ne peut jamais donner de puissance négative ni fractionnaire de x. Cette division pourrait faire connaître les coefficients $A, B, C \ldots$; mais on préfère le calcul suivant, qui met en évidence la loi de la série. On pose

$$\frac{N}{D} = \frac{a + bx + cx^2 \ldots + hx^{i-1}}{1 + \alpha x + \beta x^2 \ldots + \theta x^i} = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 \ldots$$

On réduit au même dénominateur ; puis comparant les termes où x porte des exposants égaux, l'équ. se partage en d'autres, qui servent à déterminer $A, B, C \ldots$ (nº 616) ; le dénominateur a 1 pour terme constant, ce qui n'ôte rien à la généralité, parce qu'on peut diviser N et D par ce premier terme, quel qu'il soit.

$$\text{Soit } \frac{N}{D} = \frac{a}{1 + \alpha x} = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 \ldots ;$$

$$\text{on a} \quad a = A + \left.\begin{matrix} B \\ +A\alpha \end{matrix}\right| x + \left.\begin{matrix} C \\ +B\alpha \end{matrix}\right| x^2 + \left.\begin{matrix} D \\ +C\alpha \end{matrix}\right| x^3 + \begin{matrix} \ldots \\ + \ldots \end{matrix}$$

$$\text{D'où} \quad a = A,\; B + A\alpha = 0, \quad C + B\alpha = 0 \ldots$$

La 1re de ces équ. donne A, la 2e B, la 3e C. . . . Enfin M et N étant deux coefficients successifs de notre série, on a $N + M\alpha = 0$;

d'où $N = -M\alpha$: donc *un terme quelconque est le produit du précédent par* $-\alpha x$, c'est-à-dire que la série est une progression par quotient, dont la raison est $-\alpha x$. On forme tous les termes de proche en proche, à partir du 1[er], $A = a$, qu'on obtient en faisant $x = 0$ dans la fraction proposée.

$$\frac{a}{1+\alpha x} = a[1 - \alpha x + \alpha^2 x^2 - \alpha^3 x^3 \ldots + (-\alpha x)^n \ldots].$$

Le *terme général* T, ou le terme qui en a n avant lui, et le *terme sommatoire* Σ, ou la somme des n 1[ers] termes (n° 144), sont

$$T = a(-\alpha x)^n, \quad \Sigma = a\,\frac{1-(-\alpha x)^n}{1+\alpha x}.$$

Réciproquement, si l'on donne la série et la loi qui la gouverne, on en tire bientôt la fraction génératrice; car le 1[er] terme a est le numérateur, et le dénominateur est $1 -$ la raison de la progression.

Par ex., $\dfrac{3}{6-4x} = \dfrac{\frac{1}{2}}{1-\frac{2}{3}x}$ (en divisant haut et bas par 6) donne cette série, dont le premier terme est $\frac{1}{2}$ et la raison $\frac{2}{3}x$, $\frac{1}{2}(1 + \frac{2}{3}x + \frac{4}{9}x^2 + \ldots)$: enfin, on trouve

$$T = \frac{2^{n-1}x^n}{3^n}, \quad \Sigma = \frac{1-(\frac{2}{3}x)^n}{2(1-\frac{2}{3}x)}.$$

Et si l'on donne cette série et sa loi, on retrouve la fraction génératrice en divisant le 1[er] terme $\frac{1}{2}$ par $1 -$ le facteur $\frac{2}{3}x$.

$$\text{Pour } \frac{a+bx}{1+\alpha x+\beta x^2} = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 \ldots,$$

$$\text{on a}\quad a + bx = \begin{array}{l|l|l|l} A + B & x + C & x^2 + D & x^3 \ldots \\ \quad + A\alpha & \quad + B\alpha & \quad + C\alpha & \quad\ldots \\ & \quad + A\beta & \quad + B\beta & \quad\ldots \end{array}$$

puis $A = a, \quad B + A\alpha = b, \quad C + B\alpha + A\beta = 0 \ldots\ldots$

Ces équ. donnent successivement $A, B, C\ldots$; la 1[re] $A = a$ peut encore se tirer de l'équ. supposée, en y faisant $x = 0$.

Soient M, N, P, trois coefficients indéterminés consécutifs du développement; il suit de notre calcul qu'on a $P + N\alpha + M\beta = 0$; d'où $P = -N\alpha - M\beta$: donc, *un terme quelconque de la série se*

tire des deux précédents multipliés, l'un par $-\alpha x$, *l'autre par* $-\beta x^2$. On observe que ces facteurs, retranchés de 1, donnent le dénominateur de la fraction proposée. Pour la développer, il faut d'abord trouver les deux 1ers termes $A + Bx$, soit par la division, soit à l'aide des équ. $A = a$, $B = b - a\alpha$; puis à l'aide des facteurs $-\alpha x$ et $-\beta x^2$, on compose les termes suivants, de proche en proche.

Réciproquement, si la série et sa loi sont données, on remonte à *la fraction génératrice, qui est la somme totale de cette série jusqu'à l'infini*, par un calcul simple; 1 moins les deux facteurs, forme le trinôme dénominateur $1 + \alpha x + \beta x^2$. Quant au numérateur $a + bx$, on a $a = A$, $b = B + A\alpha$.

Par ex., $\dfrac{2 - 4x}{x^2 - x - 2} = \dfrac{2x - 1}{1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}x^2}$, en divisant haut et bas par -2; les facteurs sont donc $-\frac{1}{2}x$, et $+\frac{1}{2}x^2$: d'ailleurs, on trouve $-1 + \frac{5}{2}x$ pour les deux 1ers termes; de là cette série $-1 + \frac{5}{2}x - \frac{7}{4}x^2 + \frac{17}{8}x^3 - \ldots$ Et réciproquement, si la série est connue, c'est-à-dire si l'on a les deux premiers termes et les facteurs $-\frac{1}{2}x$, $+\frac{1}{2}x^2$, ceux-ci, retranchés de 1, donnent de suite le dénominateur de la fraction génératrice; on a enfin $a = -1$, $b = 2$; d'où résulte le numérateur.

En raisonnant de même pour $\dfrac{a + bx + cx^2}{1 + \alpha x + \beta x^2 + \gamma x^3}$, on trouve que les trois premiers termes de la série donnent

$$A = a, \quad B + A\alpha = b, \quad C + B\alpha + A\beta = c,$$

équ. d'où l'on tire les valeurs de A, B et C. Les termes suivants s'en déduisent, comme ci-dessus, et quatre coefficients successifs sont liés par cette équ. $Q = -P\alpha - N\beta - M\gamma$, en sorte qu'un terme quelconque se tire des trois précédents, en les multipliant par $-\alpha x$, $-\beta x^2$, $-\gamma x^3$. Et réciproquement, on peut remonter de la série à la fraction génératrice qui en exprime la somme totale. Cette loi s'étend à toutes les fractions rationnelles.

621. On nomme *Récurrente* toute série dont chaque terme est déduit de ceux qui le précèdent, en les multipliant par des quantités invariables : ces facteurs s'appellent l'*Échelle de relation*. C'est ainsi que les sinus et cosinus d'arcs équidifférents (nos 361, 572), les sommes des puissances des racines des équ. (no 583), forment des séries récurrentes. Nous dirons donc que toute fraction rationnelle dont le dénominateur est $1 + \alpha x + \beta x^2 \ldots + \theta x^i$, se développe en

une série récurrente, dont l'échelle de relation est formée des n facteurs $-\alpha x$, $-\beta x^2, \ldots - \theta x^i$; on cherche d'abord les i premiers termes, soit par la division, soit par les coefficients indéterminés; les termes suivants s'en déduisent ensuite de proche en proche. Par ex.,

$$\frac{x^3+5x^2-10x+2}{x^4-3x^3+x^2+3x-2} = -1+\frac{7}{2}x+\frac{9}{4}x^2+\frac{49}{8}x^3+\frac{73}{16}x^4+\ldots$$

On trouve aisément les quatre premiers termes; et comme en divisant la proposée, haut et bas, par -2, on obtient pour les quatre facteurs $\frac{3}{2}x$, $\frac{1}{2}x^2$, $-\frac{3}{2}x^3$ et $\frac{1}{2}x^4$, cette échelle de relation sert à prolonger la série tant qu'on veut.

Il est inutile d'ailleurs de rappeler que si les termes de la série vont en décroissant, on approche d'autant plus de la valeur totale, qu'on prend un plus grand nombre de termes; mais qu'il n'en est pas ainsi quand la série est divergente, et qu'il faut la prendre dans sa totalité pour qu'elle représente la fraction dont elle est le développement (*voy.* nos 99 et 619).

622. Cherchons le *terme général* T des séries récurrentes. La fraction proposée F étant développée, on a

$$F = \frac{a+bx+cx^2\ldots\ldots+tx^{i-1}}{1+\alpha x+\beta x^2\ldots\ldots+\theta x^i} = A+Bx+Cx^2+Dx^3\ldots \quad (1)$$

on connaît les i premiers coefficients $A, B, C\ldots$ et la loi de la série. Pour décomposer F en fractions de 1er degré, on cherchera les facteurs du dénominateur; à cet effet changeons x en $\frac{1}{y}$, et égalons à zéro, nous aurons à résoudre une équ. dont nous supposons d'abord que les racines $k, k', k'', \ldots$ sont inégales, savoir,

$$y^i+\alpha y^{i-1}+\beta y^{i-2}\ldots+\theta = (y-k)(y-k')(y-k'')\ldots$$

Ces racines sont d'ailleurs réelles ou imaginaires, rationnelles ou irrationnelles, positives, négatives ou zéro. Remettons ici $\frac{1}{x}$ pour y, et nous aurons

$$1+\alpha x+\beta x^2\ldots+\theta x^i = (1-kx)(1-k'x)(1-k''x)\ldots$$

d'où $$F = \frac{K}{1-kx}+\frac{K'}{1-k''x}+\frac{K''}{1-k''x}+\ldots \quad (2)$$

Nous avons donné p. 206 le moyen de déterminer les constantes K, K', K'', ... qui par conséquent sont connues, ainsi que k, k', k''....

Or chacune de ces fractions se développe en une progression géométrique; la série (1) est la somme terme par terme de ces i progressions : le terme général T est donc la somme de leurs termes généraux. Ainsi on a

$$T = (Kk^n + K'k'^n + K''k''^n + \text{etc.})\, x^n. \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Donc *pour trouver le terme général* T *de la série récurrente proposée, et décomposer cette série en progressions géométriques dont elle soit la somme, il faut égaler à zéro le dénominateur de la fraction; y changer* x *en* $\frac{1}{y}$, *chercher les racines* k, k', k''.... *de cette équation* $y^i + \alpha y^{i-1} + \ldots = 0$; ces racines seront (en signes contraires) les facteurs de x dans les dénom. de fractions composantes (2), et les raisons des progressions seront kx, $k'x$, ... les coefficients K, K', K''...., numér. de ces fractions, étant déterminés, le terme général T sera connu (3).

Dans notre ex. du 2[e] degré p. 215, on égale à zéro le dénominateur, etc., et on a $y^2 + \frac{1}{2}y - \frac{1}{2} = 0$, d'où $y = \frac{1}{2}$, et $= -1$; donc

$$\frac{2x-1}{1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}x^2} = \frac{K}{1-\frac{1}{2}x} + \frac{K'}{1+x} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}x} - \frac{2}{1+x},$$

les deux progressions composantes sont donc

$$1 + \tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{4}x^2 \ldots . (\tfrac{1}{2}x)^n, \quad \text{et} \; -2\,\{\,1 - x + x^2 \ldots . (-x)^n\,\}.$$

En ajoutant les termes de même rang, on retrouve la série $-1 + \frac{5}{2}x - \frac{7}{4}x^2 \ldots$ dont le terme général est $T = ((\frac{1}{2})^n - 2(-1)^n)x^n$.

De même, la fraction $\dfrac{1}{1-4x+3x^2}$ donne l'équ.

$y^2 - 4y + 3 = 0$, $y = 3$, et $= 1$; et on retrouve les fractions composantes $\dfrac{\frac{3}{2}}{1-3x} - \dfrac{\frac{1}{2}}{1-x}$, et les progressions

$$\tfrac{3}{2}\,(1 + 3x + 3^2x^2 \ldots . 3^nx^n) \;\text{et}\; -\tfrac{1}{2}\,(1 + x + x^2 \ldots . x^n);$$

le terme général est $T = \frac{1}{2}x^n\,(3^{n+1} - 1)$.

Enfin $\frac{2+x+x^2}{2-x-2x^2+x^3}$ devient

$$\frac{1+\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}x^2}{1-\frac{1}{2}x-x^2+\frac{1}{2}x^3}=\frac{2}{1-x}+\frac{\frac{1}{3}}{1+x}-\frac{\frac{4}{3}}{1-\frac{1}{2}x}.$$

Les termes généraux des progressions sont $2x^n$, $\frac{1}{3}(-x)^n$ et $-\frac{4}{3}(\frac{1}{2}x)^n$: donc la série $1+x+2x^2+\frac{3}{2}x^3$. . . . dont l'échelle de relation est $\frac{1}{2}x$, x^2 et $-\frac{1}{2}x^3$, a pour terme général

$$T=\frac{1}{3}x^n\,(6\pm 1-(\tfrac{1}{2})^{n-2}).$$

Comme le terme sommatoire Σ de la série récurrente est la somme des termes sommatoires des progressions composantes, on trouvera aisément cette quantité Σ.

Quand l'équ. $y^i+ay^{i-1}+\ldots.=0$ a des racines égales, c'est-à-dire un facteur $(y-r)^l$, il faut introduire dans l'équ. (2), outre les fractions correspondantes aux facteurs inégaux, d'autres fractions de la forme (*voy.* p. 205)

$$\frac{L'}{1-rx}+\frac{L''}{(1-rx)^2}+\frac{L'''}{(1-rx)^3}+\ldots.+\frac{L}{(1-rx)^l}\ldots \quad (4)$$

la formule du binôme donne (p. 14)

$$L\,(1-rx)^{-l}=L\left\{1+lrx+l\frac{l+1}{2}r^2x^2+l\frac{l+1}{2}\cdot\frac{l+2}{3}\,r^3x^3\ldots\right\}$$

$$\text{terme général}=L\,\frac{(n+1)\,(n+2)\,(n+3)\ldots.(n+l-1)}{1\,.\,2\,.\,3\ldots.(l-1)}\,r^nx^n\ldots. \quad (5)$$

pour avoir le terme général T de la somme de toutes les fractions (4), il faut faire successivement $l=1, 2, 3,$ . . . . et ajouter; ce qui donne

$$T=\left\{L'+L''(n+1)+L'''(n+1)\frac{n+2}{2}+L^{\text{IV}}(n+1)\frac{n+2}{2}\cdot\frac{n+3}{3}\ldots.\right\}$$

Les fractions n'engendrent plus de progressions géométriques (la 1re exceptée).

Dans l'exemple du 4e degré p. 216, les fractions composantes sont

$$-\frac{\frac{5}{3}}{1-\frac{1}{2}x}-\frac{\frac{4}{3}}{1+x}+\frac{1}{(1-x)^2}+\frac{1}{1-x};$$

d'où $$T=(-\tfrac{5}{3}(\tfrac{1}{2})^n\mp\tfrac{4}{3}+n+2)x^n.$$

De même, $\frac{1+4x+x^2}{(1-x)^4}=\frac{6}{(1-x)^4}-\frac{6}{(1-x)^3}+\frac{1}{(1-x)^2}\ldots$

$T=(n+1)(n+2)(n+3)-3(n+1)(n+2)+(n+1)=(n+1)^3$;

la série est $\quad 1^3+2^3x+3^3x^2+4^3x^3\ldots+(n+1)^3x^n$

Enfin prenons la fraction

$$\frac{24+20x+8x^2+3x^3}{8+4x-18x^2+11x^3-2x^4}=3+x+\tfrac{29}{4}x^2-\tfrac{41}{8}x^3+\tfrac{73}{4}x^4\ldots$$

On divise haut et bas par 8, et on égale le dénom. à zéro, en y changeant x en $\frac{1}{y}$; l'équation $y^4+\frac{1}{2}y^3-\frac{9}{4}y^2\ldots=0$ revient à $(y+2)(y-\frac{1}{2})^3=0$; ainsi on décompose la fraction proposée

en $\qquad \frac{1}{1+2x}+\frac{3}{(1-\frac{1}{2}x)^3}-\frac{2}{(1-\frac{1}{2}x)^2}+\frac{1}{1-\frac{1}{2}x}$.

Pour la 1re, le terme général est $(-2x)^n$: pour les trois autres, on fera $l=3$, 2, et 1 dans l'équ. (5), avec $L=3$, -2 et 1 respectivement. Ainsi on a

$$\frac{3(n+1)(n+2)}{2}\cdot(\tfrac{1}{2}x)^n,\quad -2(n+1)\cdot(\tfrac{1}{2}x)^n,\ \text{et } 1\cdot(\tfrac{1}{2}x)^n;$$

réunissant ces quatre résultats, on trouve pour le terme général de la série proposée $T=x^n\left((-2)^n+\frac{3n^2+5n+4}{2^{n+1}}\right)$.

623. On peut obtenir les facteurs constants $K, K', K''\ldots$ sans recourir à la décomposition en fractions; et même les numérateurs de celles-ci peuvent être obtenus par le calcul direct de ces facteurs. Puisqu'on connait les termes initiaux $A+Bx+Cx^2\ldots$ de la série (1), ainsi que les racines k, k', k'',.... on fera successivement $n=0$, 1, 2, 3.... dans l'expression (3) de T, qui devra reproduire ces termes consécutifs, savoir,

$$A=K+K'+K''\ldots,\quad B=Kk+K'k'\ldots,\quad C=Kk^2+K'k'^2\ldots$$

En posant un nombre i de ces équ., on en tirera les valeurs des i constantes $K, K', K''\ldots$ qui ne sont qu'au 1er degré.

Reprenons l'équ. du 2e degré p. 215, où l'on a trouvé $k=\frac{1}{2}$,

$k' = -1$, et par suite $T = [(K(\frac{1}{2})^n + K'(-1)^n)]\, x^n$. Faisons $n = 0$ et $= 1$; comme les deux 1ers termes de la série sont $-1 + \frac{5}{2}x$, on aura les équ. $K + K' = -1$, $\frac{1}{2}K - K' = \frac{5}{2}$, d'où $K = 1$, $K' = -2$, comme ci-devant. On en tire même les fractions composantes $\dfrac{1}{1 - \frac{1}{2}x} - \dfrac{2}{1 + x}$.

L'ex. du 3e degré p. 218, où $k = 1$, $k' = -1$, $k'' = \frac{1}{2}$, donne $T = [K + K'(-1)^n + K''(\frac{1}{2})^n]x^n$. Faisant $n = 0$, 1 et 2, et comparant aux termes respectifs de la série $1 + x + 2x^2 \ldots$, on a les équ.

$$K + K' + K'' = 1, \quad K - K' + \tfrac{1}{2}K'' = 1, \quad K + K' + \tfrac{1}{4}K'' = 2,$$

d'où l'on tire $K = 2$, $K' = \frac{1}{3}$, $K'' = -\frac{4}{3}$, et la même valeur de T que précédemment.

Quand le dénominateur de F a des facteurs égaux $(1 - rx)^l$, outre les termes Kk^n, $K'k'^n \ldots$ correspondants aux facteurs inégaux, il en existe d'autres dont la forme est comprise dans l'équ. (5), où $l = 1, 2, 3 \ldots$ il est évident que ces derniers termes se trouvent réunis sous l'expression

$$(a' + b'n + c'n^2 + d'n^3 \ldots + f'n^{l-1})r^n x^n,$$

$a', b', \ldots f'$ étant des nombres inconnus, qu'on pourra obtenir en suivant le mode de calcul précédent, et formant autant d'équ. qu'on a d'indéterminées.

Par ex., $\dfrac{6(2 - 2x - x^2)}{4 - 12x + 9x^2 - 2x^3} = 3 + 6x + \frac{39}{4}x^2 + \ldots$

donne l'équ. $y^3 - 3y^2 + \frac{9}{4}y - \frac{1}{2} = 0 = (y - 2)(y - \frac{1}{2})^2$. La fraction provenue du facteur $y - 2$, est $\dfrac{K}{1 - 2x}$, donnant le terme $K \,.\, 2^n x^n$. Celles qui répondent à $(y - \frac{1}{2})^2$ donnent $(a' + b'n)(\frac{1}{2}x)^n$; ainsi

$$T = \{\, 2^n K + (\tfrac{1}{2})^n(a' + b'n) \,\}\, x^n. \text{ Or, } n = 0, 1, 2, \text{ donnent}$$

$$3 = K + a',\ 6 = 2K + \tfrac{1}{2}a' + \tfrac{1}{2}b',\ \tfrac{39}{4} = 4K + \tfrac{1}{4}a' + \tfrac{1}{2}b' ;$$

donc $K = 2$, $a' = 1$, $b' = 3$, et $T = x^n\left(2^{n+1} + \dfrac{1 + 3n}{2^n}\right)$.

De même, dans l'ex. du 4ᵉ degré p. 219, on a $k = -2$, $r = \frac{1}{2}$, $l = 3$, puis $T = x^n \left\{ (-2)^n K + (\frac{1}{2})^n (a' + b'n + c'n^2) \right\}$; faisant $n = 0, 1, 2, 3$, on a les équ.

$$3 = K + a', \quad 1 = -2K + \tfrac{1}{2} a' + \tfrac{1}{2} b' + \tfrac{1}{2} c', \quad \tfrac{29}{4} = \text{etc.},$$

d'où l'on tire $K = 1$, $a' = 2$, $b' = \frac{5}{2}$, $c' = \frac{3}{2}$ et la même valeur de T que précédemment.

Voyez, nº 619, ce qui a été dit sur la convergence des séries, théorie applicable à toutes les parties du sujet traité dans ce chapitre.

Séries exponentielles et logarithmiques.

624. La 1ʳᵉ fonction *transcendante* que nous allons développer en série, est l'*exponentielle* a^x. Faisons $a = 1 + y$, la formule du binôme donne

$$(1+y)^x = 1 + xy + x\frac{x-1}{2}y^2 \ldots + \frac{x(x-1)(x-2)\ldots(x-n+1)}{1.2.3\ldots n}y^n \ldots$$

Ordonnons par rapport à x. Le seul terme sans x est 1. Il n'y a pour x que des exposants entiers et positifs; ainsi,

$$a^x = 1 + kx + Ax^2 + Bx^3 \ldots + Px^{n-1} + Qx^n \ldots \quad (1)$$

Pour obtenir le terme kx, consultons notre terme général : il est visible que, pour y prendre le terme du produit où x n'est qu'au 1ᵉʳ degré, il ne faut conserver que les 2ᵉˢ termes des facteurs binômes, ou $\frac{x.-1.-2\ldots-(n-1)}{1.2.3\ldots n} y^n = \pm \frac{y^n x}{n}$, en prenant $+$ si n est impair. La réunion de tous ces produits est kx, savoir,

$$k = y - \tfrac{1}{2} y^2 + \tfrac{1}{3} y^3 - \tfrac{1}{4} y^4 \ldots \pm \frac{y^n}{n}; \quad \ldots \quad (2)$$

y est $a - 1$; ainsi k est connu. Il s'agit de trouver $A, B, C \ldots$ Ces constantes restent toujours les mêmes quand on change x en z; d'où

$$a^z = 1 + kz + Az^2 + Bz^3 + Cz^4 \ldots + Qz^n \ldots$$

Retranchons (1), et faisons $z = x + i$,

$$a^z - a^x = a^x \cdot a^i - a^x = a^x (a^i - 1)$$

$$a^x (a^i - 1) = (z - x) [k + A(z + x) + B(z^2 + zx + x^2) \ldots + Q (z^{n-1} + xz^{n-2} \ldots + x^{n-1}) \ldots]$$

Comme $a^i - 1 = ki + Ai^2 \ldots$, d'après l'équ. (1), les deux membres sont divisibles par $i = z - x$; donc

$$a^x (k + Ai \ldots) = k + A(z + x) + B(z^2 + zx + x^2) \ldots$$

Cela posé, faisons l'arbitraire $i = 0$, ou $z = x$, et remplaçons a^x par sa valeur (1) ; nous trouvons

$$(1 + kx + Ax^2 + Bx^3 \ldots + Px^{n-1} \ldots) k = [k + 2Ax + 3Bx^2 \ldots + nQx^{n-1}];$$

d'où $2A = k^2$, $3B = kA$, $4C = kB, \ldots$ $kP = nQ \ldots$

L'équ. $kP = nQ$ prouve qu'*un coefficient quelconque* Q *est le produit de celui qui le précède multiplié par* k *et divisé par son rang* n. Enfin

$$a^x = 1 + kx + \frac{k^2x^2}{2} + \frac{k^3x^3}{2.3} \ldots \frac{k^nx^n}{2.3 \ldots n} \ldots \quad (A)$$

625. L'équ. (2) donne k en fonction de y ou a; pour trouver au contraire a, lorsque k est connu, on fait $x = 1$ dans (A); d'où $a = 1 + k + \frac{1}{2}k^2 + \frac{1}{6}k^3 + \ldots$ Cette série et (2) sont les développements de l'équ. qui exprime, en termes finis, la liaison de a et k : cherchons cette relation. Faisons ici $k = 1$ et nommons e la valeur que prend alors la base a; $e = 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \ldots$ Le calcul de ce nombre est facile à faire, tel qu'on le voit ci-contre ; chaque terme se tirant du précédent, divisé par 3, 4, 5...., ainsi qu'il suit de la nature de cette série.

	2,5
3e terme	0,16666 66666 66
4e	0,04166 66666 66
5e	0,00833 33333 33
6e	0,00138 88888 88
7e	0,00019 84126 98
1e	0,00002 48015 87
8e	0,00000 27557 32
etc.	
	e = 2,71828 18284 59

Mais d'un autre côté, à cause de l'arbitraire x, on peut poser $kx = 1$ dans (A), le 2e membre devient $= e$.

D'où $a^{\frac{1}{k}} = e$, $e^k = a$. Telle est l'équation finie qui lie k et a ; k *est le logarithme de* a, *pris dans le système dont la base est* e. On préfère cette base e dans les calculs algébriques, parce qu'ils en sont plus simples, ainsi qu'on sera à portée d'en juger. On appelle *logarithmes*

népériens, ceux qui sont pris dans ce système ; nous les désignerons à l'avenir par le signe l, en continuant, comme n° 146, d'exprimer par *Log* que la base est un nombre arbitraire *b,* et par *log* que cette base est 10. Donc on a

$$k = \mathrm{l}\ a = \textit{logar. népérien de } \mathrm{a}, \textit{ la base étant } \mathrm{e} \ldots (3),$$

$$a^x = 1 + x\mathrm{l}a + \frac{x^2}{2}\,\mathrm{l}^2a + \frac{x^3}{2.3}\,\mathrm{l}^3a + \frac{x^4}{2.3.4}\,\mathrm{l}^4a \ldots (A')$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2.3} + \frac{x^4}{2.3.4} \ldots (B)$$

Prenant les log. des deux membres de l'équ. $e^k = a$, dans un système dont la base est un nombre arbitraire *b,*

(4). . . . $k = \dfrac{\mathrm{Log}\, a}{\mathrm{Log}\, e}$. . . . la base *b* étant quelconque. Puisque $\mathrm{Log}\, a = k\, \mathrm{Log}\, e$, et $a = 1 + y$, l'équ. (2) devient

$$\mathrm{Log}\,(1 + y) = \mathrm{Log}\, e\,(y - \tfrac{1}{2}y^2 + \tfrac{1}{3}y^3 - \tfrac{1}{4}y^4 \ldots) \ldots (C)$$

Ajoutons aux deux membres Log *h;* et posons $hy = z$, nous avons, *h* et *z* étant des nombres quelconques, aussi bien que la base *b* du système de log.,

$$\mathrm{Log}\,(h + z) = \mathrm{Log}\, h + \mathrm{Log}\, e\left(\frac{z}{h} - \frac{z^2}{2h^2} + \frac{z^3}{3h^3} - \ldots\right) \ldots (D)$$

Lorsqu'il s'agit de log. népériens, Log *e* se change en $\mathrm{l}\, e = 1$, puisque ce facteur est le log. de la base même du système qu'on considère (n° 146, 1°) ; l'équ. (*C*) devient

$$\mathrm{l}\,(1 + y) = y - \tfrac{1}{2}y^2 + \tfrac{1}{3}y^3 - \tfrac{1}{4}y^4 \ldots,$$

d'où
$$\mathrm{Log}\,(1 + y) = \mathrm{Log}\, e \times \mathrm{l}\,(1 + y).$$

Ainsi on change tous les log. népériens en log. pris dans un système quelconque *b,* en multipliant les premiers par Log *e* (n° 148) ; ce facteur constant $\mathrm{Log}\, e = M$ est ce qu'on nomme le MODULE ; *c'est le log. de la base népérienne* e *pris dans le système* b, ou, si l'on veut, *c'est* UN *divisé par le log. népérien de la base* b. Pour chaque système, le module *M* a une valeur particulière, parce que le nombre *e* restant le même = 2,71828.... le log. de ce nombre change avec la

base b. Si l'on prend a pour base,

$$\text{Log } a = 1, \text{ et l'équ. (4) devient } k \text{ Log } e = 1, \text{ d'où}$$

$$Mk = 1, \quad M = \text{Log } e, \quad M = \frac{1}{k} = \frac{1}{\mathrm{l}\, a}; \ldots \ldots (5)$$

les deux facteurs M et k sont variables avec la base du système, mais leur produit est constant et $= 1$. Nous saurons bientôt calculer le module M pour toute base donnée a.

626. Pour appliquer l'équ. (C) au calcul du log. d'un nombre donné, il faut rendre la série convergente. L'équ. (C) donne, en changeant y en $-y$,

$$\text{Log}(1 - y) = -M(y + \tfrac{1}{2}y^2 + \tfrac{1}{3}y^3 + \ldots);$$

retranchant de (C), il vient

$$\text{Log}\left(\frac{1+y}{1-y}\right) = 2M(y + \tfrac{1}{3}y^3 + \tfrac{1}{5}y^5 + \tfrac{1}{7}y^7 \ldots) \ldots \ldots (E)$$

Posons $\quad \dfrac{1+y}{1-y} = \dfrac{z}{z-1}, \quad$ d'où $\quad y = \dfrac{1}{2z-1}.$

Le premier membre devient $\Delta = \text{Log } z - \text{Log}(z-1)$, c'est-à-dire la différence des log. consécutifs de z et $z - 1$. Ainsi,

$$\Delta = 2M\left[\frac{1}{2z-1} + \frac{1}{3(2z-1)^3} + \frac{1}{5(2z-1)^5} \ldots\right] \ldots (F)$$

Lorsque le module M sera connu, on calculera aisément, et de proche en proche, les log. des nombres entiers 2, 3, 4, 5...., puisque cette valeur de la différence Δ entre ces log. est très-convergente, et le devient d'autant plus que le nombre z est plus élevé. Et même s'il s'agit de former des log. népériens, M ou Log e, devient $\mathrm{l}\, e = 1$, il est très-aisé de calculer Δ; ainsi on peut composer une table de log. népériens.

Quant à la valeur de M exprimée par l'équ. (5), elle résulte du calcul de l a, ou du *logar. népérien de la base* a.

Si, par exemple, $a = 10$: on fera dans l'équation (F), $M = 1$, puis $z = 2$; on aura $\Delta =$ l 2 (à cause de l 1 = 0); le double de l 2 est l 4 : ensuite $z = 5$ donnera l 5, et enfin on aura l 10. Ce calcul est exécuté ci-contre.

l 2	=	0,69314 718056
l 4	=	1,38629 436112
Δ pr z = 5	....	0,22314 355131
l 5	=	1,60943 791243
l 2	=	0,69314 718056
l 10	=	2,30258 509299

On divise ensuite 1 par 110 : c'est ainsi qu'on trouve

$$M = 0{,}43429\ 44819\ 03251\ 82765,$$

on a
$$\log M = \overline{1}{,}63778\ 43113\ 00536\ 77817.$$

$$\text{Compl.} = 0{,}36221\ 56886\ 99463\ 22183$$

$$e = 2{,}71828\ 18284\ 59045\ 23536.$$

Si 3 eût été la base du système, après avoir obtenu 12, on eût fait $z = 3$, et l'on aurait eu $13 = 1{,}09861229$; enfin,

$$M = 1 : 13 = 0{,}9102392.$$

De même, pour la base 5,

$$M = 1 : 15 = 0{,}6213349.$$

Il est maintenant aisé de former la table des log. de Briggs et de Callet. La base $a = 10$; la valeur de M accroît la convergence de la série (F) ; quand z passe 100, le 2ᵉ terme est négligeable, et le 1ᵉʳ suffit pour donner Δ avec 8 décimales. Il faut d'ailleurs calculer 2 ou 3 chiffres au delà de ceux qu'on veut conserver, afin d'éviter l'accumulation des erreurs ; il convient en outre de ne partir que de $z = 10000$, parce que les log. inférieurs se déduisent aisément des autres ; dès que z passe 1200 on peut négliger 1 devant $2z$ et poser $\Delta = \dfrac{M}{z}$.

Par exemple, $z = 10001$, donne $\Delta = 0{,}000043425$; d'où $\log 10001 = 4{,}000043425$. Pour $z = 99857$, on a $\Delta = 0{,}000004349$, quantité qu'il faut ajouter à $\log 99856 = 4{,}9993742$, pour avoir

$$\log 99857 = 4{,}9993785.$$

On observe d'ailleurs que les log. consécutifs conservent une même différence dans une certaine étendue de la table (1ᵉʳ vol., p. 108) ; il n'est donc nécessaire de calculer les valeurs de Δ que de distance à autre. On remarque que $z = 99840$ donne le même nombre Δ (la valeur ci-dessus) que pour $z = 99860$; donc, dans l'intervalle de ces deux nombres z, Δ est constant, en se bornant à 9 décimales.

La série E est peu convergente pour les petits nombres 2, 3, 5.... Voici l'usage qu'en fait Borda (*Tableau de log. décimales*) :

il pose $\dfrac{1+y}{1-y} = \dfrac{m}{n}$, d'où $y = \dfrac{m-n}{m+n}$, et

$$\mathrm{Log}\,\frac{m}{n} = 2M\left\{\frac{m-n}{m+n} + \tfrac{1}{3}\left(\frac{m-n}{m+n}\right)^3 + \tfrac{1}{5}\left(\frac{m-n}{m+n}\right)^5 + \ldots\right\}$$

Telle est la différence entre les log. de deux nombres m et n, exprimée par une série très-convergente, surtout quand m et n sont grands et peu différents. Ainsi, pour $m = 101$ et $n = 100$, le 1er chiffre significatif du 2e terme n'est que du 8e ordre décimal, et dès le nombre 100, on peut se contenter du 1er terme, lorsqu'on ne calcule les log. qu'avec 7 chiffres décimaux, et on obtient la différ. entre deux log. successifs.

Pour les petits nombres, Borda pose

$$m = (p-1)^2\,(p+2),\quad n = (p+1)^2\,(p-2);$$

il trouve $m - n = 4$, $m + n = 2p^3 - 6p$, et les log. népériens

$$2\,l\,(p-1) + l\,(p+2) - 2\,l\,(p+1) - l\,(p+2) =$$

$$\frac{2}{p^3-3p} + \tfrac{1}{3}\left(\frac{2}{p^3-3p}\right)^3 + \tfrac{1}{5}\left(\frac{2}{p^3-3p}\right)^5 + \ldots$$

qu'on fasse successivement $p = 5$, 6, 7 et 8, on aura

$$\begin{aligned}
2\,l2 - 3\,l3 + l7 &= 2\left(\tfrac{1}{55} + \tfrac{1}{3}\left(\tfrac{1}{55}\right)^3 + \ldots\right)\\
2\,l5 + l2 - 2\,l7 &= 2\left(\tfrac{1}{99} + \tfrac{1}{3}\left(\tfrac{1}{99}\right)^3 + \ldots\right)\\
4\,l3 - 4\,l2 - l5 &= 2\left(\tfrac{1}{161} + \tfrac{1}{3}\left(\tfrac{1}{161}\right)^3 + \ldots\right)\\
2\,l7 + l5 - 5\,l3 &= 2\left(\tfrac{1}{244} + \tfrac{1}{3}\left(\tfrac{1}{244}\right)^3 + \ldots\right)
\end{aligned}$$

Ces séries rapidement convergentes, sont faciles à calculer, et on tire ensuite les log. de 2, 3, 5 et 7 par l'élimination entre ces quatre équ. du 1er degré. Haros a imaginé de poser

$$m = p^2\,(p+5)\,(p-5),\quad n = (p+3)\,(p-3)\,(p+4)\,(p-4).$$

Il obtient ainsi une série procédant selon les puissances impaires de $\dfrac{72}{p^4 - 25p^2 + 72}$, qui est tellement convergente, que dès $p = 12$, le 2e terme a son 1er chiffre significatif au 9e ordre de décimales. Il obtient ainsi le log. de $p+5$, lorsqu'il connaît les log. de $p+4$, $p+3$, p, $p-3$ et $p-5$.

Séries circulaires.

627. Proposons-nous de développer en séries sin x et cos x selon les puissances croissantes de l'arc x. D'abord ces séries ne peuvent avoir de termes où x ait un exposant négatif, ou fractionnaire : car 1° si l'on y admettait $Px^{\frac{h}{i}} = P \cdot \sqrt[i]{x^h}$, on aurait i valeurs pour chaque arc, et l'on sait que le sinus et le cosinus n'en ont chacun qu'une seule ; 2° si l'on suppose un terme tel que $Px^{-i} = \frac{P}{x^i}$, la série deviendrait infinie pour $x = 0$, tandis que le sin. devient 0 et le cos. un. Cela prouve en outre que sin x n'a que des termes dont x est facteur, et que le terme constant de cos x est $= 1$. Posons donc

$$\sin x = ax + bx^2 + cx^3 \ldots, \quad \cos x = 1 + a'x + b'x^2 + \ldots$$

On voit d'abord que $\frac{\sin x}{x} = a + bx \ldots$; or on sait (n° 362) que la limite du rapport du sinus à l'arc est $= 1$; ainsi en faisant $x = 0$, on trouve $a = 1$.

Lorsque x devient négatif, le sin. et le cos. conservent leurs grandeurs, mais le sinus prend le signe —. Or, quand on remplace x par $-x$ dans nos développements, les signes des puissances paires changent seuls ; il faut donc que *le développement de sin* x *n'ait que des termes à exposants impairs, et celui de cos* x *des exposants pairs.* Ainsi on a

$$\cos x = 1 + Ax^2 + Bx^4 + Cx^6 \ldots + Nx^{2i} \ldots$$
$$\sin x = x + A'x^3 + B'x^5 + \ldots + M'x^{2i-1} + N'x^{2i+1} \ldots$$

en désignant par i les rangs des termes. Il s'agit de déterminer les coefficients numériques $A, A', B, B', \ldots$

Changeons x en $x + h$ dans le binôme $P \cos x + Q \sin x$, et développons selon les puissances de h. On peut exécuter ce calcul de deux manières, qui doivent conduire au même résultat : soit en développant d'abord le binôme selon x, et changeant ensuite x en $x + h$; soit en remplaçant x par $x + h$, et mettant ensuite pour sin h et cos h leurs valeurs développées selon h. En représentant les

résultats par $\alpha + \beta h + \gamma h^2 \ldots = \alpha' + \beta' h + \gamma' h^2 \ldots$ on en tire $\alpha = \alpha'$, $\beta = \beta', \ldots$ nous n'aurons besoin ici que des coefficients de la première puissance de h, c'est-à-dire de l'équ. $\beta = \beta'$.

1° $P \cos x + Q \sin x =$

$$P(1 + Ax^2 + Bx^4 \ldots + Nx^{2i}) + Q(x + A'x^3 + B'x^5 \ldots + N'x^{2i+1});$$

il s'agit de remplacer x par $x + h$, et de conserver le coefficient de h^1; c'est-à-dire qu'il faut prendre *la dérivée;* donc

$$\beta = P(2Ax + 4Bx^3 \ldots 2iNx^{2i-1}) + Q[1 + 3A'x^2 + 5B'x^4 \ldots (2i+1)Nx^{2i}];$$

2° $P \cos x + Q \sin x$ devient $P \cos(x+h) + Q \sin(x+h) =$

$$P(\cos x \cos h - \sin x \sin h) + Q(\sin x \cos h + \cos x \sin h),$$

remplaçons $\cos h$ par $1 + Ah^2 \ldots$, et $\sin h$ par $h + A'h^3 \ldots$; il est clair que les termes où entre $\cos h$, n'en produisent aucun qui soit affecté de h^1, et que $\sin h$ ne donne que h; en sorte que

$$\beta' = -P \sin x + Q \cos x.$$

L'équ. identique $\beta = \beta'$ est formée de termes qui ont pour facteurs respectifs P et Q; et comme ces fonctions sont arbitraires, il faut que l'équ. se partage en deux autres, en égalant leurs coefficients. Donc, en remplaçant $\cos x$ et $\sin x$ par leurs développements, on a les équ. identiques

$$2Ax + 4Bx^3 + 6Cx^5 \ldots 2iNx^{2i-1} = -x - A'x^3 - B'x^5 \ldots - M'x^{2i-1},$$
$$1 + 3A'x^2 + 5B'x^4 \ldots (2i+1)N'x^{2i} = 1 + Ax^2 + Bx^4 \ldots + Nx^{2i}.$$

D'où, en égalant terme à terme,

$$2A = -1,\quad 4B = -A',\quad 6C = -B' \text{ etc.}\quad 2iN = -M',$$
$$3A' = A,\quad 5B' = B,\quad 7C' = C \text{ etc.}\quad (2i+1)N' = N;$$

puis $A = -\frac{1}{2}$, $A' = -\frac{1}{2\cdot3}$, $B = \frac{1}{2\cdot3\cdot4}$, $B' = \frac{1}{2\cdot3\cdot4\cdot5}$, $C = \frac{-1}{2\ldots6}$, etc.

Substituant ces valeurs de $A, A', B, B', \ldots$ on a enfin

$$\sin x = x - \frac{x^3}{2.3} + \frac{x^5}{2.3.4.5} - \frac{x^7}{2\ldots7} \ldots \pm \frac{x^{2i+1}}{2.3\ldots(2i+1)} \quad (G);$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{2.3.4} - \frac{x^6}{2\ldots6} \ldots \pm \frac{x^{2i}}{2.3\ldots2i}. \quad (H)$$

Les termes généraux résultent de $N = \frac{-M'}{2i}$, $N' = \frac{N}{2i+1}$, équations qui indiquent comment chaque coefficient se déduit de celui qui a même rang dans l'autre série. On prend $+$ ou $-$ dans ces termes, selon que i est de la forme 2ϑ ou $2\vartheta + 1$.

628. On a ainsi les grandeurs du sin. et du cos. d'un arc dont la longueur est x, le rayon du cercle était un. Soit 2π la circonférence (n° 631), on a $\pi : x :: 180^\circ :$ nombre t de degrés de l'arc x; substituant pour x sa valeur $\frac{\pi t}{180^\circ} = \frac{t}{\mu}$ (*V.* p. 328, t. I, la valeur de μ), nos séries deviennent, z *désignant le nombre de degrés d'un arc* x,

$$\sin x = At - Bt^3 + Ct^5 \ldots \quad \cos x = 1 - A't^2 + B't^4 \ldots$$

le calcul des coefficients donne

$\log A = \overline{2},24187\ 736759$	$\log C = \overline{11},13020559$	$\log E = \overline{22},61715$
$\log B = \overline{7},94748\ 0852-$	$\log D = \overline{17},990711-$	$\log F = \overline{27},05950-$
$\log A' = \overline{4},18272\ 47595-$	$\log C' = \overline{14},595932-$	$\log E' = \overline{25},85901-$
$\log B' = \overline{9},58729\ 825$	$\log D' = \overline{19},529498$	$\log F' = \overline{30},02219$

629. Mais il importe moins de calculer les sinus et cosinus que leurs log. Soit δ la différence constante des arcs de la table qu'on veut former ; un arc quelconque t est $= n\delta$; d'où

$$\sin x = n\delta\,(1 - \tfrac{1}{6}n^2\delta^2 \ldots), \quad \cos x = 1 - \tfrac{1}{2}n^2\delta^2 + \ldots$$

$$\text{Faisons } y = \frac{n^2\delta^2}{2.3} - \frac{n^4\delta^4}{2\ldots 5} \ldots, \quad z = \frac{n^2\delta^2}{2} - \frac{n^4\delta^4}{2.3.4} \ldots;$$

nous avons $\sin x = n\delta\,(1-y)$, $\cos x = 1 - z$; prenant les log. dans un système quelconque, dont le module est M (n° 626), on trouve

$$\text{Log} \sin x = \text{Log}\, n\delta - M\,(y + \tfrac{1}{2}y^2 + \tfrac{1}{3}y^3 \ldots),$$
$$\text{Log} \cos x = -M\,(z + \tfrac{1}{2}z^2 + \tfrac{1}{3}z^3 \ldots);$$

enfin, remettant pour y et z leurs valeurs,

$$\text{Log} \sin x = \text{Log}\,(n\delta) - \frac{M\delta^2}{2.3}n^2 - \frac{M\delta^4}{4.5.9}n^4 - \frac{M\delta^6}{9^2.5.7}n^6 \ldots,$$

$$\text{Log} \cos x = \quad - \frac{M\delta^2}{2}n^2 - \frac{M\delta^4}{3.4}n^4 - \frac{M\delta^6}{9.5}n^6.$$

Si la base des log. est 10, et que les arcs de la table procèdent de 10″ en 10″, comme cela a lieu dans les tables de Callet, δ est la longueur de l'arc de 10″, ou le 64800e de la demi-circonférence π. D'après les valeurs de π et de M (n°s 631, 626), on trouve, tout calcul fait, que

$$\log\sin x = \log\delta + \log n - An^2 - Bn^4 \ldots,\quad \log\cos x = A'n^2 - B'n^4 \ldots$$

$\log\delta = \overline{5},68557\ 48668\ 23541$	
$\log A = \overline{10},23078\ 27994\ 564$	$\log B = \overline{20},12481\ 12735$
$\log A' = \overline{10},70790\ 40492\ 84$	$\log B' = \overline{19},30090\ 25326$
$\log C = \overline{30},29868\ 045$	$\log D = \overline{40},54489\ 2$
$\log C' = \overline{28},09802\ 100$	$\log D' = \overline{38},95143\ 2$

Par ex., pour l'arc de $4^\circ\frac{1}{2}$ ou 16200″, on a $n = 1620$.

$\log\delta = 5,68557487$	$\log A = \overline{10},2307828$	$\log B = \overline{20},1248113$
$\log n = 3,20951501$	$\log n^2 = 6,4190300$	$\log n^4 = 12,8380600$
$-\ 0,00044649$	$\overline{4},6498128$	$\overline{8},9628713$
$-\ 0,00000009$	On retranche les nombres correspondants.	
$\overline{2},89464330 = \log\sin 4^\circ 30'$		

$\log A' = \overline{10},7079041$	$\log B' = \overline{19},3009025$	$-\ 0,00133947$
$\log n^2 = 6,4190300$	$\log n^4 = 12,8380600$	$-\ 0,00000138$
$\overline{3},1269341$	$\overline{6},1389625$	$-\ 0,00134085$
	complément $= \log\cos 4^\circ 30'$	$= \overline{1},99865915$

Si l'on veut avoir $\log R = 10$, on ajoutera 10 aux caractéristiques (*voy.* n° 362). Les log. des tang. et cot. s'obtiennent par de simples soustractions.

Comme n croît de plus en plus, nos séries ne peuvent guère servir au delà de 12°, parce qu'elles deviennent trop peu convergentes. On ne les emploie même que jusqu'à 5 ; au delà, on recourt au procédé suivant.

On a $$\frac{\sin(x+\delta)}{\sin x} = \frac{\sin x\cos\delta + \sin\delta\cos x}{\sin x} =$$

$$\cos\delta + \sin\delta\cot x = \cos\delta\,(1 + \operatorname{tang}\delta\,.\,\cot x)\,;$$

prenant les log., le 1er membre est la différence Δ entre les log. des sinus des arcs $x+\delta$ et x, savoir,

$$\Delta = \log\cos\delta + M\left(\operatorname{tang}\delta\,.\,\cot x - \tfrac{1}{2}\operatorname{tang}^2\delta\cot^2 x + \tfrac{1}{3}\ldots\right).$$

En raisonnant de même pour $\cos(x+\delta)$, on trouve que la différence entre les log. consécutifs des cosinus est

$$\Delta' = \log\cos\delta - M\left(\operatorname{tang}\delta\operatorname{tang}x + \tfrac{1}{2}\operatorname{tang}^2\delta\,.\,\operatorname{tang}^2 x + \tfrac{1}{3}\ldots\right).$$

Lorsqu'on se borne à 9 décimales, et qu'on prend δ de $10''$, le 1[er] terme de ces séries donne seul des chiffres significatifs,

$$\Delta = M\operatorname{tang}\delta\cot x, \qquad \Delta' = -M\operatorname{tang}\delta\,.\,\operatorname{tang}x,$$

et l'on a $\log(M\operatorname{tang}\delta) = \bar{5},32335\ 91788.$

Quand δ est $1'$, on a $\log(M\operatorname{tang}\delta) = \bar{4},10151\ 043.$

Ainsi, en partant de l'arc $x = 5^\circ$, dont on connaît le sin., le cos., la tang. et la cot., on peut, de proche en proche, calculer tous les sinus et cosinus par leurs différences successives Δ, Δ', soit de $10''$ en $10''$, soit de $1'$ en $1'$; par suite on conclura la tang. et la cot. Soit, par exemple,

$x = 10^\circ\,10'\,30''$; log cot x =	0.7459888	log tang x =	1.2540112
constante =	$\bar{5}.3233592$		$\bar{5}.3233592$
	$\bar{4}.0693480$		$\bar{6}.5773704$
Diff. logarithm. Δ =	0,00011731	Δ' =	$-$ 0,000003779

On remarquera ici, comme p. 225, que les quantité Δ et Δ' sont constantes dans une certaine étendue de la table. Pour éviter l'accumulation des erreurs, on calculera d'avance des termes de distance en distance, lesquels serviront de point de départ.

L'équ. $\sin 2x = 2\sin x\cos x$, qui donne

$$\log\sin 2x = \log 2 + \log\sin x + \log\cos x,$$

servira à cet usage. Comme $\sin 45^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{2}$, $\operatorname{tang}45^\circ = \cot 45^\circ = 1$, on pourra partir de cet arc et calculer $\sin 45^\circ \pm 10''$; ces deux arcs complémentaires ont réciproquement le sin. de l'un pour cos. de l'autre; d'où l'on tire leurs tang. et cot., de là on passera à

$$45^\circ \pm 20'', \quad 45^\circ \pm 30'', \text{ etc.}$$

630. En comparant les séries (G) et (H) à l'équ. (B), on voit que leur somme est e^x, au signe près des termes de 2 en 2 rangs; or, si l'on change x en $\pm x\sqrt{-1}$, dans le développement (B) de e^x,

comme $\sqrt{-1}$ a pour puissances $\sqrt{-1}, -1, -\sqrt{-1}, +1$, lesquelles se reproduisent périodiquement à l'infini, les signes des termes se trouvent être les mêmes que dans les séries G et H; d'où

$$e^{\pm x\sqrt{-1}} = \cos x \pm \sqrt{-1} \,.\, \sin x. \quad . \quad . \quad . \quad (I)$$

En ajoutant et retranchant ces deux équations

$$\cos x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}}{2}, \quad \sin x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}; \ldots. (K)$$

d'où

$$\operatorname{tang} x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}}{(e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}})\sqrt{-1}} = \frac{e^{2x\sqrt{-1}} - 1}{(e^{2x\sqrt{-1}} + 1)\sqrt{-1}},$$

en multipliant haut et bas par $e^{x\sqrt{-1}}$. On ne doit regarder ces expressions que comme des résultats analytiques, où les imaginaires ne sont qu'apparentes, attendu qu'elles doivent disparaître par le calcul même.

Enfin, changeant x en nx dans (I), on a

$$e^{\pm nx\sqrt{-1}} = \cos nx \pm \sqrt{-1} \,.\, \sin nx; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . (L)$$

mais le 1[er] membre est la puissance n^e de l'équ. (I); donc on a, quel que soit n,

$$\cos nx \pm \sqrt{-1} \,.\, \sin nx = (\cos x \pm \sqrt{-1} \,.\, \sin x)^n \ldots. (M)$$

Ces formules sont très-usitées. Nous nous bornerons ici à les appliquer à la résolution des triangles. Faisons

$$z = e^{C\sqrt{-1}}, \quad z' = e^{-C\sqrt{-1}};$$

d'où $\quad \cos C = \frac{1}{2}(z + z'), \quad \sin C \,.\, \sqrt{-1} = \frac{1}{2}(z - z').$

Soient A, B, C, les trois angles d'un triangle, a, b, c, les côtés respectivement opposés; on a

$$a \sin B = b \sin A = b \sin (B + C);$$

d'où $$\frac{\sin B}{\cos B} = \operatorname{tang} B = \frac{b \sin C}{a - b \cos C};$$

$$\frac{e^{2B\sqrt{-1}} - 1}{e^{2B\sqrt{-1}} + 1} = \frac{b(z - z')}{2a - b(z + z')}, \quad e^{2B\sqrt{-1}} = \frac{a - bz'}{a - bz}:$$

enfin, $2B\sqrt{-1} = \mathrm{l}\,(a - bz') - \mathrm{l}\,(a - bz)$

(équ. D) $= \frac{b}{a}(z - z') + \frac{b^2}{2a^2}(z^2 - z'^2) + \frac{b^3}{3a^3}(z^3 - z'^3)\ldots$

Mais la formule (L) donne

$$z^m = \cos mC + \sqrt{-1}\,.\sin mC, \quad z'^m = \cos mC - \sqrt{-1}\,.\sin mC;$$

d'où $$z^m - z'^m = 2\sqrt{-1}\,.\sin mC.$$

En substituant et supprimant le facteur commun $2\sqrt{-1}$, il vient

$$B = \frac{b}{a}\sin C + \frac{b^2}{2a^2}\sin 2C + \frac{b^3}{3a^3}\sin 3C + \ldots$$

L'équ. $c^2 = a^2 - 2ab\cos C + b^2 = a^2 - ab(z + z') + b^2$, se réduit à $c^2 = (a - bz)(a - bz')$, à cause de $zz' = 1$. Prenant les log., on obtient

$$2\log c = 2\log a - M\left[\frac{b}{a}(z + z') + \frac{b^2}{2a^2}(z^2 + z'^2)\ldots\right];$$

et comme $z^m + z'^m = 2\cos mC$, on a

$$\log c = \log a - M\left(\frac{b}{a}\cos C + \frac{b^2}{2a^2}\cos 2C + \frac{b^3}{3a^3}\cos 3C\ldots\right).$$

Ces deux séries servent à résoudre un triangle, où b est très-petit par rapport à a, connaissant *les deux côtés* a *et* b *et l'angle compris* C.

631. L'équ. (I) donne, en prenant les log. népériens,

$$\pm x\sqrt{-1} = \mathrm{l}\,(\cos x \pm \sqrt{-1}\,.\sin x):$$

retranchant ces deux équ. l'une de l'autre,

$$2x\sqrt{-1} = \mathrm{l}\,\frac{\cos x + \sqrt{-1}\,.\sin x}{\cos x - \sqrt{-1}\,.\sin x} = \mathrm{l}\left(\frac{1 + \sqrt{-1}\,.\tan x}{1 - \sqrt{-1}\,.\tan x}\right),$$

à cause de $\sin x = \cos x \tan x$. Or, la formule (E) p. 224 donne le développement de ce log.; et supprimant le facteur commun $2\sqrt{-1}$, on a cette expression de l'arc x, lorsqu'on connaît sa tangente,

$$x = \tan x - \tfrac{1}{3}\tan^3 x + \tfrac{1}{5}\tan^5 x - \tfrac{1}{7}\tan^7 x\ldots \quad (N)$$

L'arc x dont la tang. est t, le rayon étant r, est (n° 322)

$$x = t - \frac{t^3}{3r^2} + \frac{t^5}{5r^4} - \frac{t^7}{7r^6} + \ldots$$

Cette formule sert à trouver *le rapport π de la circonférence au diamètre*. Deux arcs x et x', dont les tang. sont $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{3}$, ont pour tang. de leur somme, $\operatorname{tang}(x + x') = \dfrac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}} = 1$; cette somme est donc $x + x' = 45^\circ$. Faisons dans (N) $\operatorname{tang} x = \frac{1}{2}$, $\operatorname{tang} x' = \frac{1}{3}$, et ajoutons; nous aurons la longueur de l'arc de 45°, qui est le quart de la demi-circonférence π du cercle dont le rayon est 1 :

$$\tfrac{1}{4}\pi = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{3}(\tfrac{1}{2})^3 + \tfrac{1}{5}(\tfrac{1}{2})^5 \ldots + \tfrac{1}{3}(\tfrac{1}{3})^3 + \tfrac{1}{5}(\tfrac{1}{3})^5 \ldots$$

On obtient des séries plus convergentes par le procédé de Machin. Prenons l'arc x dont la tang. est $\frac{1}{5}$, d'où (L, n° 359)

$$\operatorname{tang} 2x = \frac{2 \operatorname{tang} x}{1 - \operatorname{tang}^2 x} = \tfrac{5}{12}, \quad \operatorname{tang} 4x = \frac{2 \cdot \frac{5}{12}}{1 - (\frac{5}{12})^2} = \tfrac{120}{119};$$

cet arc $4x$ diffère donc très-peu de 45° ; v étant l'excès de $4x$ sur 45°, ou $v = 4x - 45^\circ$, on a $\operatorname{tang} v = \dfrac{\operatorname{tang} 4x - 1}{1 + \operatorname{tang} 4x} = \frac{1}{239}$. Par conséquent, si l'on fait $\operatorname{tang} x = \frac{1}{5}$, et qu'on répète 4 fois la série N, on aura l'arc $4x$; de même, $\operatorname{tang} v = \frac{1}{239}$ donne l'arc v; et retranchant, on obtient l'arc de 45°, ou

$$\tfrac{1}{4}\pi = 4[\tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{3}(\tfrac{1}{5})^3 + \tfrac{1}{5}(\tfrac{1}{5})^5 \ldots] - \tfrac{1}{239} + \tfrac{1}{3}(\tfrac{1}{239})^3 - \ldots$$

Nous avons donné (n° 248) le résultat de ces calculs avec 20 décimales.

$$\pi = 3,14159\ 26535\ 89793,$$

$$\log \pi = 0,49714\ 98726\ 94, \quad 1\pi = 1,14472\ 98858\ 494.$$

632. Faisons $x = k\pi$ dans l'équ. (I), k désignant un entier quelconque; on a $\sin x = 0$, $\cos x = \pm 1$, selon que k est pair ou impair,

$$e^{\pm k\pi\sqrt{-1}} = \pm 1, \quad 1(\pm 1) = \pm k\pi\sqrt{-1};$$

multipliant par le module M, et ajoutant la valeur numérique A de Log. a,

$$\text{Log}(\pm a) = A \pm kM\pi\sqrt{-1},$$

k étant un nombre quelconque pair, s'il s'agit de log $(+a)$, et impair pour log $(-a)$. Donc *tout nombre a une infinité de log. dans le même système ; ces log. sont tous imaginaires si ce nombre est négatif ; s'il est positif, un seul est réel* *.

633. Développons maintenant sin z et cos z selon les sinus et cosinus des arcs z, $2z$, $3z$.... Posons

$$\cos z + \sqrt{-1}\,.\sin z = y, \quad \cos z - \sqrt{-1}\,.\sin z = v;$$

d'où $yv = 1$, $2\cos z = y + v$; $1, u, A', A''$.... étant les coefficients de la puissance u, on a, quel que soit u,

$$2^u \cos^u z = y^u + u\,y^{u-2} + A'y^{u-4} + A''y^{u-6}\ldots.$$

L'équ. (M) donne $y^k = \cos kz + \sqrt{-1}\,.\sin kz$.

Donc

$$2^u \cos^u z = \cos uz + u\cos(u-2)z + A'\cos(u-4)z, \ldots. \quad (P)$$
$$\pm\sqrt{-1}\,[\sin uz + u\sin(u-2)z + A'\sin(u-4)z \;\ldots.]$$

Le $\pm$ provient ici de $\sqrt{-1}$, qui admet toujours ce double signe. Quand u est entier, $\cos^u z$ ne peut avoir qu'une seule valeur; ces deux expressions doivent donc être égales, et la série se réduit à la 1re ligne (P) : en effet, on peut démontrer que les termes imaginaires se détruisent deux à deux. Mais si u est fractionnaire, il n'en est plus ainsi, parce que cet exposant indique une racine qui a plusieurs valeurs. Nous ne prendrons ici que le cas où u est entier, le seul qui offre de l'intérêt.

L'arc qui, dans l'équ. (P), en a x avant lui est $=(u-2x)z$; celui qui en a x après lui, en ayant $u-x$ avant, est $=-(u-2x)z$: les cosinus de ces deux arcs sont les mêmes ; leurs coefficients sont aussi égaux, par la propriété de la formule du binôme ; ces termes

* De $a^2 = (-a)^2$, on tire $2\log a = 2\log(-a)$; il ne faut pas en conclure avec d'Alembert, que $+a$ et $-a$ ont les mêmes log. ; car, k et l étant pairs, on a

$$\log a = A \pm kM\pi\sqrt{-1}, \quad \text{et} = A \pm lM\pi\sqrt{-1},$$

et ajoutant, $2\log a = 2A \pm (k+l)\,M\pi\sqrt{-1}$. De même, k' et l' étant impairs, on trouve $2\log(-a) = 2A \pm (k'+l')\,M\pi\sqrt{-1}$. Or, il est visible que cette dernière expression est comprise dans la première, parce que $k'+l'$ est un nombre pair, sans que $2\log(-a)$ soit en général $= 2\log a$: pour que $\log a$ soit réel, il faut que $k = l = 0$, et k', l', étant impairs ne peuvent être $= 0$; ainsi l'on ne peut avoir en nombres réels $\log a = \log -a$. D'Alembert devait donc conclure seulement que, parmi les log. imaginaires de $+a$ et $-a$, il en est qui, ajoutés deux à deux, donnent des sommes égales.

sont donc remplacés par le double de l'un, de sorte qu'en divisant l'équ. par 2, et en désignant par u, A', A''...., les coefficients p. 7 du développement de la puissance u du binôme ; on a

$$2^{u-1}\cos^u z = \cos uz + u\cos(u-2)z + A'\cos(u-4)z\dots\quad (Q)$$

en n'étendant la série qu'aux arcs positifs ; seulement *il faut, quand* n *est pair, prendre la moitié du dernier terme constant,* qui ne s'est réuni avec aucun autre. *V.* p. 6 la valeur de ce nombre.

Changeons dans cette équation z en $\frac{1}{2}\pi - z$; le 1[er] membre deviendra $2^{u-1}\sin^u z$: quant au 2[e] membre, un arc de rang x étant $(u-2x)z = hz$, devient $\frac{1}{2}\pi h - hz$, ou $\frac{1}{2}\pi u - \pi x - hz$: on peut ajouter πx à cet arc sans changer son cos., qui devient

$$\cos(\tfrac{1}{2}\pi - hz) = \cos\tfrac{1}{2}\pi u\cos hz + \sin\tfrac{1}{2}\pi u\sin hz\,;$$

1° *Si* u *est un nombre pair,* $\cos\frac{1}{2}\pi u = \pm 1$, selon que u a la forme $4n$ ou $4n+2$; $\sin\frac{1}{2}\pi u = 0$; ainsi le cosinus se réduit à $\pm\cos hz = \pm\cos(u-2x)z$. Donc

$$\pm 2^{u-1}\sin^u z = \cos uz - u\cos(u-2)z + A'\cos(u-4)z\dots\quad (R)\,;$$

il ne faut pousser le développement que jusqu'au terme moyen (qui est constant), *dont on prendra la moitié.* On prend le signe + quand u est de la forme $4n$, et le — si $u = 4n+2$.

2° *Si* u *est impair,* $\cos\frac{1}{2}\pi u = 0$, $\sin\frac{1}{2}\pi u = \pm 1$ selon que u a la forme $4n+1$ ou $4n+3$, et on trouve

$$\pm 2^{u-1}\sin^u z = \sin uz - u\sin(u-2)z + A'\sin(u-4)z\dots\quad (S).$$

On ne poussera le développement que jusqu'au terme moyen (qui contient $\sin z$, et dont on ne prend plus la moitié) ; le signe + a lieu quand $u = 4n+1$, le — quand $u = 4n+3$.

On en tire aisément les équations suivantes :

$$\begin{aligned}
2\cos^2 z &= \cos 2z + 1,\\
4\cos^3 z &= \cos 3z + 3\cos z,\\
8\cos^4 z &= \cos 4z + 4\cos 2z + 3,\\
16\cos^5 z &= \cos 5z + 5\cos 3z + 10\cos z,\\
32\cos^6 z &= \cos 6z + 6\cos 4z + 15\cos 2z + 10,\ \text{etc.}\\
-2\sin^2 z &= \cos 2z - 1\,;\\
-4\sin^3 z &= \sin 3z - 3\sin z,\\
8\sin^4 z &= \cos 4z - 4\cos 2z + 3,\\
16\sin^5 z &= \sin 5z - 5\sin 3z + 10\sin z,\\
-32\sin^6 z &= \cos 6z - 6\cos 4z + 15\cos 2z - 10,\ \text{etc.}
\end{aligned}$$

634. Réciproquement, développons les sinus et cosinus d'arcs multiples, selon les puissances de $\sin z = s$, $\cos z = c$. Le 2ᵉ membre de l'équation (M, p. 232) est $(c + \sqrt{-1}\,.\,s)^n$: en le développant par la formule du binôme, on arrive à une équation de la forme

$$\cos nz + \sqrt{-1}\,.\,\sin nz = P + Q\sqrt{-1};$$

et puisque les imaginaires doivent se détruire entre elles, l'équation se partage en deux autres, $\cos nz = P$, $\sin nz = Q$, la 1ʳᵉ contenant tous les termes où $s\sqrt{-1}$ porte des exposants pairs; ainsi, n étant entier ou fractionnaire, positif ou négatif, on a

$$\cos nz = c^n - n\frac{n-1}{2}c^{n-2}s^2 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2\,.\,3\,.\,4}c^{n-4}s^4 - \ldots$$

$$\sin nz = nc^{n-1}s - \frac{n(n-1)(n-2)}{2\,.\,3}c^{n-3}s^3 + \frac{n(n-1)\ldots(n-4)}{2\,.\,3\,.\,4\,.\,5}c^{n-5}s^5 - \ldots$$

Ainsi, s étant $= \sin z$, et $c = \cos z$, on a

$\cos 2z = c^2 - s^2$, $\sin 2z = 2cs$,
$\cos 3z = c^3 - 3cs^2$, $\sin 3z = 3c^2s - s^3$,
$\cos 4z = c^4 - 6c^2s^2 + s^4$, $\sin 4z = 4c^3s - 4cs^3$,
$\cos 5z = c^5 - 10c^3s^2 + 5cs^4$, $\sin 5z = 5c^4s - 10c^2s^3 + s^5$,
$\cos 6z = c^6 - 15c^4s^2 + 15c^2s^4 - s^6$, $\sin 6z = 6c^5s - 20c^3s^3 + 6cs^5$,
etc. etc.

635. Dans ces formules, les sinus sont mêlés avec les cosinus; on peut en trouver d'autres en fonction du seul sinus, ou du cosinus. Puisque les arcs z, $2z$, $3z$.... font une équidifférence, les sinus et cosinus forment une série récurrente (nº 361), dont les facteurs sont $2\cos z$ et -1. De même, si les arcs procèdent de 2 en 2, savoir, z, $3z$, $5z$...., ou bien $0z$, $2z$, $4z$....; les facteurs sont $2\cos 2z$ et -1; or,

$$2\cos 2z = 2(c^2 - s^2) = 2 - 4s^2.$$

Ainsi, partant de $\cos z = 1$, $\sin 0z = 0$, $\cos z = c$, $\sin z = s$, il est bien aisé de former les séries récurrentes qui suivent, dont

on a les deux 1[ers] termes et la loi (n° 621).

$\sin 2z = s(2c)$, $\cos 2z = 2c^2 - 1$,
$\sin 3z = s(4c^2 - 1)$, $\cos 3z = 4c^3 - 3c$,
$\sin 4z = s(8c^3 - 4c)$, $\cos 4z = 8c^4 - 8c^2 + 1$,
$\sin 5z = s(16c^4 - 12c^2 + 1)$, $\cos 5z = 16c^5 - 20c^3 + 5c$,
$\sin 6z = s(32c^5 - 32c^3 + 6c)$, $\cos 6z = 32c^6 - 48c^4 + 18c^2 - 1$,
$\sin 7z = s(64c^6 - 80c^4 + 24c^2 - 1)$, etc.

Voici les formules générales (XI[e] leçon, *Cal. des fonctions*, Lagrange) * :

$$\sin nz = s \left\{ (2c)^{n-1} - (n-2)(2c)^{n-3} + \tfrac{1}{2}(n-3)(n-4)(2c)^{n-5} - (n-4)\frac{n-5}{2}\,\frac{n-6}{3}(2c)^{n-7} + (n-5)\frac{n-6 \ldots n-8}{2\,.\,3\,.\,4}(2c)^{n-9} \ldots \right\},$$

$$2\cos nz = (2c)^n - n(2c)^{n-2} + \tfrac{1}{2}n(n-3)(2c)^{n-4} - \tfrac{1}{6}n(n-4)(n-5)(2c)^{n-6} \ldots$$

Venons-en maintenant aux séries ascendantes selon s.

$\sin 2z = c(2s)$, $\sin 3z = 3s - 4s^3$,
$\sin 4z = c(4s - 8s^3)$, $\sin 5z = 5s - 20s^3 + 16s^5$,
$\sin 6z = c(6s - 32s^3 + 32s^5)$, $\sin 7z = 7s - 56s^3 + 112s^5 - 64s^7$,
$\sin 8z = c(8s - 80s^3 + 192s^5 - 128s^7)$, etc.
$\cos 2z = 1 - 2s^2$, $\cos 3z = c(1 - 4s^2)$,
$\cos 4z = 1 - 8s^2 + 8s^4$, $\cos 5z = c(1 - 12s^2 + 16s^4)$,
$\cos 6z = 1 - 18s^2 + 48s^4 - 32s^6$, $\cos 7z = c(1 - 24s^2 + 80s^4 - 64s^6)$,
etc. etc.

* Voici les valeurs du *terme général* T, i^e terme de ces équ., et du facteur F qui multipliant le i^e terme produit le terme suivant (*V*. p. 2) :

sin nz. . . . $T = (-1)^{i-1}(2c)^{n-2i+1}\, s \times [(n-i)\, C\,(i-1)]$,

$$F = -\frac{1}{4c^2} \times \frac{(n-2i+1)(n-2i)}{i(n-i)};$$

il y a $\frac{1}{2}n$, ou $\frac{1}{2}(n+1)$ termes, selon que n est pair ou impair ; le dernier terme est $\pm ncs$ dans le 1[er] cas, et $\pm s$ dans le 2[e].

cos nz. . . . $T = (-1)^{i-1}(2c)^{n-2i+2} \times \dfrac{n}{n-2i+2}[(n-i)\, C\,(i-1)]$,

$$F = -\frac{1}{4c^2} \times \frac{(n-2i+2)(n-2i+1)}{i(n-i)};$$

la série a $\frac{1}{2}n + 1$, ou $\frac{1}{2}(n+1)$ termes, selon que n est pair ou impair ; le dernier terme est ± 2 dans le 1[er] cas, et $\pm 2nc$ dans le 2[e].

1° Quand n est pair, on peut poser *

$$\sin nz = c\left[ns - n \cdot \frac{n^2-2^2}{2 \cdot 3}s^3 + n\frac{n^2-2^2}{2 \cdot 3} \cdot \frac{n^2-4^2}{4 \cdot 5}s^5 \ldots (2s)^{n-1}\right]$$

$$\cos nz = 1 - \frac{n^2}{2}s^2 + \frac{n^2}{2}.\frac{n^2-2^2}{3 \cdot 4}s^4 - \frac{n^2}{2}.\frac{n^2-2^2}{3 \cdot 4}.\frac{n^2-4^2}{5 \cdot 6}s^6 \ldots \tfrac{1}{2}(2s)^n;$$

2° Et quand n est impair,

$$\sin nz = ns - n\frac{n^2-1^2}{2 \cdot 3}s^3 + n \cdot \frac{n^2-1^2}{2 \cdot 3} \cdot \frac{n^2-3^2}{4 \cdot 5}s^5 \ldots \tfrac{1}{2}(2s)^n,$$

$$\cos nz = c\left[1 - \frac{n^2-1^2}{1 \cdot 2}s^2 + \frac{n^2-1^2}{1 \cdot 2} \cdot \frac{n^2-3^2}{3 \cdot 4}s^4 \ldots (2s)^{n-1}\right].$$

Méthode inverse, ou retour des Séries.

636. Étant donnée l'équation $y = \varphi x$, où φx est une série, il

* Le i^e terme T est le facteur F qui multipliant le i^e terme produit le terme suivant, dans ces équ., ont pour valeurs

n pair, $\sin nz$, $T = (-1)^{i-1} c\, (2s)^{2i-1} [(\tfrac{1}{2}n + i - 1)\, C\, (2i-1)]$,

$F = - s^2 \times \dfrac{n^2 - 4i^2}{2i(2i+1)}$;

il y a $\tfrac{1}{2}n$ termes; le dernier $= \pm c\, (2s)^{n-1}$.

$\cos nz$, $T = (-1)^{i-1} (2s)^{2i-2} \times \dfrac{n}{n-2i+2} [(\tfrac{1}{2}n + i - 2)\, C2\, (i-1)]$,

$F = - s^2 \times \dfrac{n^2 - 4(i-1)^2}{2i(2i-1)}$;

il y a $\tfrac{1}{2}n + 1$ termes; le dernier $= \pm 2^{n-1} s^n$.

n impair, $\sin nz$, $T = (-1)^{i-1} (2s)^{2i-1} \cdot \dfrac{n}{n-2i+} \left[(\dfrac{n-3}{2} + i)\, C\, (2i-1)\right]$,

$F = - s^2 \times \dfrac{n^2 - (2i-1)^2}{2i\,(2i+1)}$;

il y a $\tfrac{1}{2}(n+1)$ termes; le dernier $= \pm 2^{n-1} s^n$.

$\cos nz$, $T = (-1)^{i-1} c\, (2s)^{2i-2} \left[(\dfrac{n-3}{2} + i)\, C\, 2\, (i-1)\right]$

$F = - s^2 \times \dfrac{n^2 - (2i-2)^2}{2i(2i-1)}$;

il y a $\tfrac{1}{2}(n+1)$ termes; le dernier $= \pm c\, (2s)^{n-1}$.

s'agit de trouver $x = Fy$ en série ordonnée selon y. Si cette dernière a une forme connue, telle que, par exemple,

$$x = Ay + By^2 + Cy^3 + Dy^4 \ldots,$$

il ne s'agit que de déterminer les coefficients A, B, C.... On substituera dans la proposée $y = \varphi x$, cette série et ses puissances, pour x, x^2, x^3, et l'on aura une équ. identique, qu'on partagera en d'autres, par la comparaison des termes où y a la même puissance : ces équations feront connaître les constantes A, B, C, D....

Soit $$y = M(x - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{4}x^4 \ldots);$$

qu'on se soit assuré que la série ci-dessus convient pour x (cela suit de ce que y est le log. de $1 + x$, ou $a^y = 1 + x$: *voyez* n° 625); substituant donc pour x la série $Ay + By^2 \ldots$, il vient

$$\begin{array}{llll} \dfrac{y}{M} = Ay + By^2 + Cy^3 + & Dy^4 \ldots & \text{pour } x, \\ \quad - \tfrac{1}{2}A^2y^2 - ABy^3 - & (\tfrac{1}{2}B^2 + AC)\,y^4 \ldots & - \tfrac{1}{2}x^2, \\ \quad\quad + \tfrac{1}{3}A^3y^3 + & A^2By^4 \ldots & + \tfrac{1}{3}x^3, \\ & - A^4y^4 \ldots & - \tfrac{1}{4}x^4, \end{array}$$

d'où $AM = 1$, $B = \tfrac{1}{2}A^2$, $C = AB - \tfrac{1}{3}A^3$, $D = \ldots$;

puis $$A = \frac{1}{M},\ B = \frac{A^2}{2},\ C = \frac{A^3}{2\,.\,3},\ D = \frac{A^4}{2\,.\,3\,.\,4},\ \text{etc.}$$

Enfin, $$x = Ay + \frac{A^2y^2}{2} + \frac{A^3y^3}{2\,.\,3} + \frac{A^4y^4}{2\,.\,3\,.\,4} \ldots$$

De même, $$x = x - x^2 + x^3 - x^4 \ldots$$

se renverse ainsi $$x = y + y^2 + y^3 + y^4 \ldots$$

Mais il est rare qu'on connaisse d'avance la forme de la série cherchée $x = Fy$; on indique alors les puissances de y par des lettres, $x = Ay^\alpha + By^\beta + Cy^\gamma, \ldots$ et il s'agit de déterminer les coefficients et les exposants, en considérant qu'après la substitution dans $y = \varphi x$, il faut que chaque terme soit détruit par d'autres où y a la même puissance.

Soit $$y = \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{1}{4}x^4 + \ldots;$$

supposons $$x = Ay^\alpha + By^\beta + Cy^\gamma + \ldots,$$

$\alpha, \beta, \gamma \ldots$ étant des nombres croissants. Nous ne mettons pas de terme sans y, parce que $x = 0$ répond à $y = 0$. En substituant pour x sa valeur, nous voyons que,

1° Les exposants 2, 3, 4 .... qu'avait x, formant une équidifférence, $\alpha, \beta, \gamma \ldots$ doivent en former également une, puisqu'en développant, les puissances $x^2, x^3 \ldots$ jouiront visiblement de la même propriété.

2° Si l'on trouve α et β, $\gamma, \delta \ldots$ s'ensuivront.

3° Le terme où y aura le plus petit exposant est $\frac{1}{2}A^2y^{2\alpha}$; il doit s'ordonner avec le 1er membre y, d'où $2\alpha = 1$, $\frac{1}{2}A^2 = 1$; ainsi,

$$\alpha = \tfrac{1}{2},\ A = \sqrt{2}.$$

4° Les termes qui ensuite ont le moindre exposant étant $ABy^{\alpha+\beta}$ et $\frac{1}{2}A^3y^{3\alpha}$, pour s'ordonner ensemble, ils doivent avoir $\alpha + \beta = 3\alpha$, ou $\beta = \frac{2}{2}$; ainsi $\gamma = \frac{3}{2}$, $\delta = \frac{4}{2} \ldots$ savoir,

$$x = Ay^{\frac{1}{2}} + By^{\frac{2}{2}} + Cy^{\frac{3}{2}} + \text{etc.};$$

en refaisant le calcul, on trouve bientôt $A, B, C \ldots$; d'où

$$x = y^{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{2} - \tfrac{2}{3}y + \tfrac{1}{18}\sqrt{2} \cdot y^{\frac{3}{2}} - \tfrac{58}{135}y^2 + \ldots$$

C'est ainsi que

$$y = x - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2\ldots5} - \frac{x^7}{1.2\ldots7} \ldots,$$

se renverse sous la forme $x = Ay + By^3 + Cy^5 \ldots$

On trouve, tout calcul fait (*voy.* n° 840),

$$x = y + \frac{1 \cdot y^3}{2 \cdot 3} + \frac{1 \cdot 3y^5}{2 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5y^7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot y^9}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 9} \ldots$$

Pour $x = ay + by^2 + cy^3 + \ldots$, on obtient

$$y = \frac{x}{a} - \frac{bx^2}{a^3} + \frac{2b^2 - ac}{a^5}x^3 + \frac{5abc - a^2d - 5b^3}{a^7}x^4 \ldots$$

La série $x = ay + by^3 + cy^5 + dy^7 \ldots$ donne

$$y = \frac{x}{a} - \frac{bx^3}{a^4} + \frac{3b^2 - ac}{a^7}x^5 + \frac{8abc - a^2d - 12b^3}{a^{10}}x^7 \ldots$$

Enfin, $y = x^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{8}x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{16}x^{\frac{5}{2}} - \frac{5}{128}x^{\frac{7}{2}} \ldots$

donne $$x = Ay^{-2} + By^{-4} + Cy^{-6} \ldots$$

et par suite,

$$x = y^{-2} - y^{-4} + y^{-6} - y^{-8} + \ldots$$

Si la proposée était $y = a + bx + cx^2 \ldots$, pour la commodité du calcul, il serait bon de transposer a, et de faire

$$\frac{y-a}{b} = z, \quad \text{d'où} \quad z = x + \frac{c}{b}x^2 + \frac{d}{b}x^3 + \ldots;$$

on développerait ensuite x en z. Au reste, voyez n° 636, où nous avons traité la question du retour des suites de la manière la plus générale.

Des Equations de condition.

637. Lorsque la loi qui régit un phénomène physique est connue et traduite en équ. $\varphi(x, y \ldots a, b \ldots) = 0$, il arrive souvent que les constantes $a, b, c \ldots$ sont inconnues, $x, y \ldots$ étant des grandeurs variables avec les circonstances du phénomène. On consulte alors l'expérience pour déterminer $a, b, c \ldots$; en mesurant des valeurs simultanées de $x, y, z, \ldots$ et les substituant dans l'équ. $\varphi = 0$: puis répétant l'expérience, on observe d'autres valeurs pour $x, y, z \ldots$, ce qui donne d'autres *équations de condition* entre les constantes inconnues $a, b, c \ldots$ que l'élimination fait ensuite connaître.

Mais les valeurs tirées de l'observation n'étant jamais exactes, les nombres $a', b', c' \ldots$, qu'on obtient ainsi pour $a, b, c \ldots$, ne peuvent être regardés que comme approchés : on doit donc poser, dans $\varphi = 0$, $a = a' + A$, $b = b' + B \ldots$ et déterminer les erreurs $A, B \ldots$, dont $a, b \ldots$ sont affectés; et comme $A, B \ldots$ sont de très-petites quantités, on est autorisé à en négliger les puissances supérieures : ainsi l'équ. $\varphi = 0$ ne contient plus les inconnues $A, B \ldots$ qu'au 1er degré, par ex., sous la forme

$$0 = x + Ay + Bz + Ct \quad \ldots \ldots \quad (1)$$

On supplée alors à l'imperfection des mesures de x, y, z.... par le nombre des observations. En réitérant souvent les expériences, on obtient autant d'équ. (1), où x, y, z.... sont connus ; on compare ces équ., on en combine plusieurs entre elles, de manière à obtenir une équ. moyenne, où l'une des constantes ait le plus grand facteur possible, tandis qu'au contraire les autres facteurs deviennent très-petits : par là l'erreur de la détermination des coefficients se trouve beaucoup affaiblie. En réduisant ces équations de condition au nombre des inconnues, l'élimination donne bientôt les valeurs de A, B....

Cette méthode est usitée en Astronomie ; mais elle est bien moins exacte que celle des *moindres carrés,* proposée par M. Legendre, qui rachète la longueur des calculs par la précision des résultats. Concevons que l'observation ait donné des valeurs peu exactes de x, y, z.... ; substituées dans l'équ. (1), le 1er membre n'y sera pas zéro, mais un nombre e très-petit et inconnu. D'autres expériences donneront de même les erreurs e', e''.... correspondantes aux valeurs x', x'', y', y''...., savoir,

$$e' = x' + Ay' + Bz'\ldots.., \quad e'' = x'' + Ay'' + Bz''\ldots., \text{ etc.}$$

Formons la somme des carrés de ces équ., et n'écrivons que les termes en A, parce que les autres termes ont même forme : on trouve que $e^2 + e'^2 + e''^2$.... est

$$= A^2(y^2 + y'^2\ldots.) + 2A(xy + x'y'\ldots.) + 2AB\,(yz\ldots.) + 2AC \text{ etc.}$$

Ce 2e membre a la forme $A^2m + 2An + k$; il est le plus petit possible quand on prend A tel, que la dérivée soit nulle, $Am + n = 0$ (*voy.* nos 140, II, et 757) : en ne considérant que le facteur constant et inconnu A, on a donc

$$xy + x'y'\ldots + A\,(y^2 + y'^2\ldots) + B\,(yz + y'z'\ldots) + C\,(yt\ldots) \text{ etc.} = 0.$$

Il faut multiplier chacune des équ. de condition (1) *par le facteur* y *de* A. *et égaler la somme à zéro.* On conserve au facteur y son signe. En opérant de même pour B, C...., on obtient autant d'équations semblables qu'il y a de constantes inconnues ; ces équ. sont du 1er degré, et l'élimination est facile à faire.

Par exemple, la Mécanique enseigne que sous la latitude y, la longueur x du pendule simple à secondes sexagésimales est

$x = A + B \sin^2 y$, A et B étant des nombres invariables, qu'il s'agit de déterminer. Il suffirait de mesurer avec soin les longueurs x sous deux latitudes différentes y, pour obtenir deux équ. de condition propres à donner A et B. Mais la précision sera bien plus grande si, comme l'ont fait MM. Mathieu et Biot, on mesure x sous six latitudes différentes, et qu'on traite, par la méthode précédente, les six équ. de condition. Les quantités $A + B \sin^2 y - x$, évaluées en mètres, donnent ces six erreurs,

$$A + B \,.\, 0{,}3903417 - 0{,}9929750, \quad A + B \,.\, 0{,}4932370 - 0{,}9934740,$$
$$A + B \,.\, 0{,}4972122 - 0{,}9934620, \quad A + B \,.\, 0{,}5136117 - 0{,}9935967,$$
$$A + B \,.\, 0{,}5667721 - 0{,}9938764, \quad B + B \,.\, 0{,}6045628 - 0{,}9940952.$$

Comme le coefficient de A est 1, l'équ. qui s'y rapporte est formée de la somme des six erreurs. Pour B, on multipliera chaque trinôme par le facteur qui affecte B, et l'on ajoutera les six produits : donc

$$6A + B \,.\, 3{,}0657375 - 5{,}9614793 = 0,$$
$$A \,.\, 3{,}0657375 + B \,.\, 1{,}5933894 - 3{,}0461977 = 0.$$

L'élimination donne A et B ; enfin, on a

$$x = 0{,}9908755 + B \sin^2 y, \quad \log B = \bar{3}{,}7238509, \quad B = 0{,}0052941816.$$

Voy. la *Conn. des Tems de* 1816, où M. Mathieu discute par cette méthode les observations du pendule faites par les Espagnols en divers lieux.

Consultez mon *Astronomie pratique* et ma *Géodesie*, où ce sujet est traité avec le plus grand détail.

LIVRE SIXIÈME.

ANALYSE APPLIQUÉE AUX TROIS DIMENSIONS.

CHAPITRE Ier.

TRIGONOMÉTRIE SPHÉRIQUE.

Notions fondamentales.

638. Trois plans *MON*, *NOP*, *MOP* (fig. 25), qui passent par le centre d'une sphère, déterminent un angle *trièdre O*, et coupent la surface selon des grands cercles, dont les arcs *CA*, *CB*, *AB*, forment un triangle sphérique *ABC*; les angles plans de ce trièdre *O* sont respectivement mesurés par les côtés ou arcs de ce triangle; savoir, *NOP* par *AB*, *MON* par *AC*, *MOP* par *BC*. L'angle *C* du triangle est mesuré par celui que forment deux tangentes en *C*, aux arcs contigus *AC*, *BC*; ces tangentes, situées dans les plans de ces arcs, mesurent l'angle dièdre de ces mêmes plans *NOMP*, c'est-à-dire l'inclinaison de la face *NOM* sur *POM*. Donc, *les angles plans du trièdre* O *sont mesurés par les côtés du triangle sphérique* ABC, *et les inclinaisons des faces sont les angles de ce triangle.*

Les problèmes où, donnant quelques parties d'un triangle sphérique, on se propose de trouver les autres parties, sont précisément les mêmes que ceux où connaissant plusieurs éléments d'un trièdre, on veut obtenir les autres. *Il y a six éléments : trois angles* A, B, C, *et les trois côtés opposés* a, b, c, *du triangle sphérique*; ou, si l'on veut, *trois angles plans* a, b, c, *et les trois angles dièdres opposés* A, B, C, *du trièdre dont il s'agit. Étant données trois de ces six parties, il est question de déterminer les trois autres.*

D'après cela, que, d'un point *O*, l'on dirige des rayons visuels à trois points *M*, *N*, *P* éloignés dans l'espace, tels que trois étoiles, par exemple, ces lignes seront les arêtes d'un trièdre *O*, dont les éléments constituants seront ceux d'un triangle sphérique *ABC*,

lequel est formé par les arcs de grands cercles qui joignent les points où ces arêtes vont percer la surface d'une sphère de rayon arbitraire, dont l'œil est le centre O.

Ces principes servent à démontrer les théorèmes suivants.

1° Tout angle plan d'un trièdre étant moindre que deux droits, *chaque côté de tout triangle sphérique est* $< 180°$. *Chaque angle est aussi plus petit que deux droits* ; c'est ce qui suit encore du triangle polaire (*V.* ci-après n° 639).

Toutes les fois qu'un calcul conduira à trouver pour valeur d'un angle ou d'un côté de triangle, un arc $> 180°$, cette solution devra être rejetée comme impossible, ou du moins remplacée par le supplément de cet arc : et les cos., sin., tang., etc., ne peuvent appartenir qu'à un arc moindre que la demi-circonférence.

2° Puisque la somme des angles plans de tout angle polyèdre est moindre que 4 droits (n° 280), *la somme des trois côtés de tout triangle sphérique, est plus petite que* 360°. L'angle trièdre d'un cube, formé de 3 angles droits, montre que chaque côté d'un triangle sphérique peut valoir et même surpasser 90°.

3° *Deux triangles sphériques sont égaux, lorsque trois angles, ou trois côtés, ou deux côtés et l'angle compris, ou deux angles et le côté adjacent, sont respectivement égaux chacun à chacun.* Ces théorèmes se prouvent, ainsi que les deux suivants, comme pour les triangles rectilignes (n° 163).

4° *Dans un triangle sphérique isocèle, l'arc abaissé perpend. du sommet sur la base, divise par moitié cette base et l'angle du sommet ; les angles égaux sont opposés aux côtés égaux, et réciproquement.*

5° *Dans tout triangle sphérique, le plus grand angle est toujours opposé au plus grand côté, le moyen l'est au moyen, le moindre au plus petit.*

6° *Un côté est toujours moindre que la somme des deux autres, et plus grand que leur différence :* car la somme de deux angles plans d'un trièdre surpasse le 3ᵉ, d'où $a < b + c$, et $b < a + c$, ou $a > b - c$. Donc aussi, *la demi-somme des trois côtés d'un triangle surpasse toujours un côté quelconque :* car en remplaçant $b + c$ par $a + i$, $a + b + c$ devient $2a + i$; ainsi le demi-périmètre $= a + \frac{1}{2} i > a$.

639. Coupons notre trièdre O par trois plans respectivement perpend. aux arêtes; ces plans détermineront un second trièdre O' opposé au 1ᵉʳ (fig. 26) ; *les angles plans de l'un seront suppléments des angles dièdres de l'autre, et réciproquement.*

En effet, l'une des faces du trièdre proposé O, étant MON, menons, en des points quelconques N, M, sur les arêtes OM, ON, deux plans perpendiculaires à ces droites, et par suite aux faces MON, MOP d'une part, MON, NOP de l'autre; les angles M et N du quadrilatère $OMP'N$ sont droits; l'angle P' est donc supplément de MON. Mais ces deux plans coupants sont des faces du nouveau trièdre O', et se coupent suivant la droite $O'P'$, arête de ce corps. L'angle dièdre formé par ces plans est visiblement mesuré par l'angle $MP'N$, puisque le plan de cet angle est perpendiculaire à ces deux faces. Donc l'angle MON du premier est supplément de l'angle dièdre P' du second. Il en faut dire autant des deux autres faces MOP, NOP, qui sont suppléments des angles $MN'P$, $NM'P$. Les angles plans du trièdre O sont donc respectivement les suppléments des angles dièdres du trièdre opposé O'.

Réciproquement, les angles plans du trièdre O' sont les suppléments des angles dièdres du trièdre O, par la même raison.

Les deux trièdres O et O' déterminent deux triangles sphériques ABC, $A'B'C'$ qui sont tels que les angles de l'un sont suppléments des côtés de l'autre, et réciproquement.

Étant donné un triangle sphérique ABC *dont* a, b, c *sont les côtés, on peut toujours en construire un autre* A'B'C', *dont les côtés sont* a', b', c', *tel, que les angles* A, B, C, *de l'un soient les suppléments respectifs des côtés* a', b', c' *de l'autre, et réciproquement,* savoir :

$$a' = 180^\circ - A,\quad b' = 180^\circ - B,\quad c' = 180^\circ - C, \ldots . (1)$$

$$A' = 180^\circ - a,\quad B' = 180^\circ - b,\quad C' = 180^\circ - c \ldots . . (2)$$

Le triangle ainsi formé s'appelle *polaire* ou *supplémentaire* du 1[er].

On voit en outre que *la somme des trois angles de tout triangle sphérique, est toujours comprise entre deux et six droits.* En effet, d'une part chaque angle étant moindre que deux droits, $A + B + C < 6$ droits; et d'une autre part, en ajoutant les trois équations (2) on a

$$A + B + C = 6 \text{ droits} - (a' + b' + c');$$

et comme on a vu que $a' + b' + c' < 4$ droits (nº 638, 2º), on voit que $A + B + C > 2$ droits.

Les équations (1) et (2) sont fort utiles, car elles réduisent à trois les six problèmes de la trigonométrie sphérique, qui consistent à

trouver trois des six éléments d'un triangle, lorsqu'on connaît les autres. Supposons, par exemple, qu'on sache trouver les trois angles A, B, C, quand on connaît les trois côtés a, b, c : réciproquement, si l'on donne les trois angles A, B, C, pour trouver un côté a, on substituera au triangle son supplémentaire A'B'C', dont on connaît les trois côtés a', b', c', par les équ. (2); et lorsqu'on aura trouvé l'un A' des angles, l'équ. (1) donnera le côté opposé $a = 180° - A'$. En sorte qu'il suffit de savoir résoudre un triangle dont on connaît les trois côtés, pour savoir aussi résoudre celui dont on a les trois angles ; et ainsi des autres cas. C'est ce qui s'éclaircira mieux par la suite.

640. Si l'on coupe le trièdre O (fig. 27) par un plan pmn perpendiculaire à un arête OB, en un point m tel que $Om = 1$, on a

$$mn = \text{tang } c,\quad On = \text{séc } c,\quad mp = \text{tang } b,\quad Op = \text{séc } b :$$

Or les triangles rectilignes mnp, npO donnent (n° 355)

$$np^2 = mn^2 + pm^2 - 2mn \,.\, pm \,.\, \cos A,$$
$$np^2 = nO^2 + pO^2 - 2nO \,.\, pO \,.\, \cos a;$$

retranchant la 1re de la 2e, il vient, à cause des triangles nmO, pmO, rectangles en m, et de $Om = 1$,

$$0 = 1 + 1 - 2 \text{ séc } c \,.\, \text{séc } b \,.\, \cos a + 2 \text{ tang } c \,.\, \text{tang } b \,.\, \cos A;$$

et mettant $\dfrac{1}{\cos}$ pour séc., et $\dfrac{\sin}{\cos}$ pour tang.,

$$0 = 1 - \frac{\cos a}{\cos c \,.\, \cos b} + \frac{\sin c \,.\, \sin b \,.\, \cos A}{\cos c \,.\, \cos b};$$

ce qui conduit à l'*équation fondamentale*

$$\cos a = \cos b \,.\, \cos c + \sin b \,.\, \sin c \,.\, \cos A \quad \ldots \quad (3)$$

On aurait de même

$$\left.\begin{array}{l} \cos b = \cos a \,.\, \cos c + \sin a \,.\, \sin c \,.\, \cos B \\ \cos c = \cos a \,.\, \cos b + \sin a \,.\, \sin b \,.\, \cos C \end{array}\right\} \quad \ldots \quad (4)$$

On a
$$\cos A = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c},$$

d'où
$$1 - \cos^2 A = \sin^2 A = 1 - \left(\frac{\cos a - \cos b \,.\, \cos c}{\sin b \,.\, \sin c}\right);$$

réduisant le 2[e] membre au même dénominateur, et remplaçant sin² par 1 — cos²,

$$\sin^2 A = \frac{1 - \cos^2 b - \cos^2 c - \cos^2 a + 2 \cos a \,.\, \cos b \,.\, \cos c}{\sin^2 b \,.\, \sin^2 c}.$$

Prenons la racine carrée, et divisons les deux membres par $\sin a$, le 2[e] membre est une *fonction symétrique* de a, b, c, que nous nommerons M, savoir, $\frac{\sin A}{\sin a} = M$. Changeant dans cette équ. A et a, en B et b, en C et c, comme M reste constant, on en tire

$$\frac{\sin A}{\sin a} = \frac{\sin B}{\sin b} = \frac{\sin C}{\sin c} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Dans tout triangle sphérique, les sinus des angles sont proportionnels aux sinus des côtés opposés.

Pour éliminer b de l'équ. (3), mettons pour $\cos b$ sa valeur (4), et $\frac{\sin B \sin a}{\sin A}$ pour $\sin b$; il vient

$$\cos a = \cos a \cos^2 c + \sin a \sin c \cos c \cos B + \frac{\sin a \sin c \sin B \cos A}{\sin A}$$

mais $\cos^2 c = 1 - \sin^2 c$ donc en divisant tout par $\sin a \sin c$,

$$\sin c \cot a = \cos c \cos B + \sin B \cot A \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

En appliquant à l'équ. (3) la propriété du triangle supplémentaire (équ. 1 et 2), c'est-à-dire, changeant a en $180° - A$, A en $180° - a$, etc., nous avons

$$-\cos A = \cos B \cos C - \sin B \sin C \cos a. \quad . \quad . \quad (7)$$

Ces théorèmes suffisent à la résolution de tous les triangles sphériques, ainsi qu'on le verra par les développements que nous allons donner; mais il y a encore une équ. générale qu'on emploie quelquefois.

Éliminons $\cos c$ entre les équ. (4); comme.... $\cos^2 a = 1 - \sin^2 a$, en divisant tout par $\sin a$, on trouve

$$\sin a \cos b = \sin b \cos a \cos C + \sin c \cos B \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

Nous devons encore ajouter que dans les équ. générales entre certains éléments d'un triangle sphérique quelconque ABC, on

peut changer a et A en b et B, ou bien en c et C, et réciproquement : en sorte que nos équ. (6, 7 et 8) en représentent chacun trois, comme l'équation (3) en a donné deux autres (4). On a, par exemple :

$$\sin c \cot b = \cos c \cos A + \sin A \cot B \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$
$$-\cos B = \cos A \cos C - \sin A \sin C \cos b. \quad (10)$$
$$\sin c \cos b = \sin b \cos c \cos A + \sin a \cos B. \quad \text{etc.}$$

Triangles sphériques rectangles.

641. Désignons l'angle droit par A, et l'hypoténuse par a (fig. 28); faisons donc $A = 90°$ dans les équ. (3, 5, 6, 7, 9 et 10) :

$$\cos a = \cos b \cos c \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (m)$$
$$\sin b = \sin a \sin B \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (n)$$
$$\operatorname{tang} c = \operatorname{tang} a \cos B \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (p)$$
$$\cos a = \cot B \cot C \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (q)$$
$$\cot B = \cot b \sin c \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (r)$$
$$\cos B = \sin C \cos b \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (s)$$

Ces six équ. sont propres au calcul logarithmique, et suffisent à la résolution de tout triangle rectangle : *Des cinq éléments* a, b, c, B *et* C *deux étant donnés, on peut toujours trouver les trois autres.* Ainsi la question est posée entre trois éléments dont un seul est inconnu. On dénommera les angles du triangle par A, B, C, l'angle droit étant A, et l'on cherchera celle de ces six équ. qui comprend les trois éléments dont il s'agit ; mais pour trouver cette équ., il pourra arriver qu'on soit obligé de changer de place les lettres B et C dans la figure. Suivant les divers cas qui se présentent, on choisit les équ. qui contiennent les trois éléments compris dans le problème.

L'hypoténuse a	et deux angles B, C. . . . . prenez l'équation		(q)
	un angle B et le côté	opposé b.	(n)
		adjacent c.	(p)
	les trois côtés a, b, c		(m)
Un côté b de l'angle droit et les angles B, C			(s)
Deux côtés b, c de l'angle droit et un angle B.			(r)

Le fréquent usage qu'on fait de ces équ. exige qu'on les ait sans

cesse présentes à la mémoire, chose que le défaut de symétrie rend assez difficile. Mauduit a indiqué un moyen empirique de les retrouver, qui consiste à lire, sur la figure, les cinq éléments du triangle rectangle dans l'ordre où ils sont, en faisant le tour, et à observer que les trois éléments entre lesquels on cherche une relation, sont *contigus* ou *alternatifs ;* et il est de fait qu'on a toujours

$$\textit{cos. arc intermédiaire} = \textit{produit} \left\{ \begin{array}{l} \textit{des sin. d'arcs } \text{ALTERNES}, \\ \textit{des cot. d'arcs } \text{CONTIGUS}. \end{array} \right.$$

Seulement, en appliquant ce théorème, il faut *remplacer les deux côtés de l'angle droit par leurs compléments,* c'est-à-dire leur sin. par cos., leurs tang. par cot., etc. On peut, en effet, vérifier que ces deux propositions reproduisent exactement nos six équations.

1° De l'équ. (m), on conclut que *le cosinus de l'hypoténuse est égal au produit des cosinus des deux autres côtés ;* ainsi l'un des trois côtés est $<$ ou $>$ 90°, selon que les deux autres côtés sont d'espèces semblables ou différentes, car les cosinus d'arcs $>$ 90° sont négatifs.

2° L'équ. (q) montre que si l'on compare l'hypoténuse aux deux angles adjacents B et C, l'un de ces trois arcs est $>$ ou $<$ 90°, selon que les deux autres arcs sont d'espèces semblables ou différentes.

3° Les équ. (r ou s) prouvent que chacun des angles B et C est toujours de même espèce que le côté opposé.

4° De même, l'équ. (p) montre que l'hypoténuse et un côté sont de même espèce, quand l'angle compris est $<$ 90°, et d'espèces différentes quand cet angle est $>$ 90°.

Nous entendons par arcs de même espèce ceux qui sont ensemble soit $<$, soit $>$ 90° ; et d'espèces différentes, quand l'un de ces arcs est $<$ et l'autre $>$ 90°.

5° Enfin, si le côté b de l'angle droit $=$ 90°, on aura $\cos b = 0$, et (d'après les équ. m et s) $\cos a = 0$, $\cos B = 0$: les côtés CA, CB sont donc chacun de 90°, et perpend. sur AB ; le triangle est isocèle bi-rectangle ; C est le *pôle* de l'arc AB (fig. 28), c'est-à-dire que C est distant de 90° de tous les points de cet arc.

642. Quoique nos équ. résolvent tous les triangles sphériques rectangles, il convient de remarquer qu'elles ne donneraient pas les valeurs des inconnues avec précision, si ces arcs étaient très-

petits et exprimés par des cos., ou voisins de 90° et donnés par des sinus. Voici comment on doit opérer dans ces cas :

1° On a (t. I, p. 335) $\operatorname{tang}^2 \frac{1}{2} x = \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}$;

si l'on demande l'hypoténuse a, connaissant B et C, l'équ. (q) devient

$$\operatorname{tang}^2 \frac{1}{2} a = \frac{1 - \cot B \cot C}{1 + \cot B \cot C} = \frac{\sin B \sin C - \cos B \cos C}{\sin B \sin C + \cos B \cos C},$$

$$\operatorname{tang}^2 \frac{1}{2} a = -\frac{\cos(B+C)}{\cos(B-C)}. \quad \ldots \ldots \ldots \quad (11)$$

on voit par cette équ. que *la somme des deux angles* B *et* C *est* $> 90°$, puisque le 2e membre est négatif, et doit devenir positif.

2° De même, pour obtenir un côté b de l'angle droit, connaissant les angles B et C, l'équ. (s) donne $\cos b = \frac{\cos B}{\sin C}$;

on pose $z = 90° - B$, d'où $\cos B = \sin z$, et $\cos b = \frac{\sin z}{\sin C}$:

ainsi l'on a (équ. citée et n° 360)

$$\operatorname{tang}^2 \frac{1}{2} b = \frac{\sin C - \sin z}{\sin C + \sin z} = \frac{\operatorname{tang} \frac{1}{2}(C - z)}{\operatorname{tang} \frac{1}{2}(C + z)},$$

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2} b = \sqrt{\left\{ \operatorname{tang}\left[\tfrac{1}{2}(B - C) + 45°\right] . \operatorname{tang}\left[\tfrac{1}{2}(B + C) - 45°\right]\right\}}.$$

3° Connaissant l'hypoténuse a et un côté c, pour trouver l'angle adjacent B, l'équ. (p) donne

$$\operatorname{tang}^2 \frac{1}{2} B = \frac{1 - \operatorname{tang} c \cot a}{1 + \operatorname{tang} c \cot a} = \frac{\cos c \sin a - \sin c \cos a}{\cos c \sin a + \sin c \cos a},$$

$$\operatorname{tang} \frac{1}{2} B = \sqrt{\left[\frac{\sin(a - c)}{\sin(a + c)}\right]}. \quad \ldots \ldots \quad (12)$$

On remarquera que les sinus de $a - c$ et $a + c$ doivent avoir le même signe, pour éviter les imaginaires ; donc si $a + c > 180°$, l'hypoténuse a doit être $< c$. Donc quand le triangle a des angles

obtus, l'hypoténuse a n'est pas le plus grand côté. C'est au reste ce que la *fig.* 31 mettra en évidence.

4° L'équ. (m) donne $\cos c = \frac{\cos a}{\cos b}$, d'où

$$\tang^2 \tfrac{1}{2} c = \tang \tfrac{1}{2} (a + b) \,.\, \tang \tfrac{1}{2} (a - b). \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

5° Enfin, si l'on cherche un côté b, connaissant l'angle opposé B et l'hypoténuse a, au lieu d'employer l'équ. (n) quand b est voisin de 90°, posez

$$b = 90° - 2z, \quad \tang x = \sin a \sin B\,;$$

l'équ. (n) revient à $\cos 2z = \tang x$, d'où

$$\tang^2 z = \frac{1 - \tang x}{1 + \tang x} = \tang (45° - x)\,;$$

ainsi $$\tang (45° - \tfrac{1}{2} b) = \sqrt{\tang (45° - x)}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

L'arc x étant calculé par l'équ. $\tang x = \sin a \sin B$, cette dernière donnera b.

Nous donnerons ici les cinq éléments constitutifs d'un triangle sphérique rectangle, afin qu'on puisse s'exercer à l'application numérique des formules, en prenant, à volonté, deux de ces éléments, et calculant les trois autres.

Triangle rectangle d'épreuve.

ÉLÉMENTS.	LOG. SINUS.	LOG. COSINUS.	LOG. TANG.
$a = 71°24'30''$	$\bar{1}.9767255$	$\bar{1}.5035475$ +	0.4731759 +
$b = 140.52.40$	$\bar{1}.8000134$	1.8897507 —	$\bar{1}.9102626$ —
$c = 114.15.54$	$\bar{1}.9598303$	$\bar{1}.6137969$ —	0.3460333 —
$B = 138.15.45$	$\bar{1}.8232909$	$\bar{1}.8728568$ —	$\bar{1}.9505341$ —
$C = 105.52.39$	$\bar{1}.9831068$	$\bar{1}.4370867$ —	0.5460201 —

Le signe — qui suit plusieurs de ces log. est destiné à indiquer que le facteur qui s'y rapporte est négatif; ce qu'il ne faut pas confondre avec les — qu'on place à gauche des log., quand on veut

écrire qu'il faut les soustraire, ce qui arrive dans le cas d'une division. Selon que le nombre des facteurs négatifs d'une formule est pair ou impair, le produit a le signe $+$ ou $-$, circonstance qu'il faut noter avec soin ; car, par exemple, tang a donne pour a un arc $a < 90^\circ$, quand cette tangente est positive, et le supplément de cette valeur quand la tangente est négative.

Quant au $\bar{1}$ qui est l'entier de plusieurs log., cette notation a été expliquée t. I, p. 106.

Triangles sphériques obliquangles.

643. Passons en revue tous les cas qui peuvent se présenter (fig. 28).

1[er] CAS. *Étant donnés les trois côtés* a, b, c, *trouver l'angle* A?

L'équ. (3), p. 248, en substituant $1 - 2\sin^2 \frac{1}{2} A$ pour $\cos A$ devient

$$\cos a = \cos(b - c) - 2 \sin b \sin c \sin^2 \tfrac{1}{2} A. \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

Cette équ. est d'un fréquent usage. On en tire

$$2 \sin b \sin c \sin^2 \tfrac{1}{2} A = \cos(b - c) - \cos a;$$

et à cause de l'équ. (8) de la note n° 360 *

$$\sin^2 \frac{1}{2} A = \frac{\sin \frac{1}{2}(a + b - c) \cdot \sin \frac{1}{2}(a + c - b)}{\sin b \cdot \sin c}.$$

Cette équ., propre au calcul des log., fait connaître l'angle A. Elle devient plus symétrique, en posant

$$2p = a + b + c;$$

d'où
$$\sin^2 \frac{1}{2} A = \frac{\sin(p - b) \cdot \sin(p - c)}{\sin b \cdot \sin c}. \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

De même, en mettant dans l'équ. (3), $2\cos^2 \frac{1}{2} A - 1$ pour $\cos A$,

on a
$$\cos^2 \frac{1}{2} A = \frac{\sin p \cdot \sin(p - a)}{\sin b \cdot \sin c}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17)$$

* Comme le premier membre est essentiellement positif, ainsi que sin b et sin c (attendu que b et c sont $< 180^\circ$), on voit qu'il faut qu'on ait à la fois $c < b + a$, et $c > b - a$, puisque les relations contraires sont visiblement absurdes ; on retrouve donc ici le théorème 6[e], page 246.

Enfin, en divisant la 1re de ces équ. par la 2e,

$$\text{tang}^2 \frac{1}{2} A = \frac{\sin(p-b) \cdot \sin(p-c)}{\sin p \cdot \sin(p-a)} \quad \ldots \quad (18)$$

L'une quelconque de ces trois équ. résout la question.

2e CAS. *Étant donnés les trois angles* A, B, C, *trouver le côté* a ?

La propriété du triangle supplémentaire (p. 247), appliquée aux équ. précédentes, par la substitution des valeurs (1) et (2), et posant

$$2P = A + B + C,$$

donne
$$\sin^2 \frac{1}{2} a = -\frac{\cos P \cdot \cos(P-A)}{\sin B \cdot \sin C},$$

$$\cos^2 \frac{1}{2} a = \frac{\cos(P-B) \cdot \cos(P-C)}{\sin B \cdot \sin C},$$

$$\text{tang}^2 \frac{1}{2} a = -\frac{\cos P \cdot \cos(P-A)}{\cos(P-B) \cdot \cos(P-C)}.$$

3e CAS. *Étant donnés deux côtés* a *et* b, *et l'angle compris* C, *trouver le troisième côté ?*

L'équ. (4, p. 248) peut être employée sous cette forme

$$\cos c = \cos a \cos b\,(1 + \text{tang}\, a\, \text{tang}\, b \cos C).$$

Connaissant deux côtés b, c, et l'angle compris A, on peut trouver le 3e côté a, à l'aide de l'équ. fondamentale (3, p. 248), en la rendant propre au calcul logarithmique. On pose

$$\cos A = 2\cos^2 \tfrac{1}{2} A - 1, \quad \cos a = 1 - 2\sin^2 \tfrac{1}{2} a,$$

d'où
$$1 - 2\sin^2 \tfrac{1}{2} a = \cos(b+c) + 2\sin b \sin c \cos^2 \tfrac{1}{2} A,$$

$$= 1 - 2\sin^2 \tfrac{1}{2}(b+c) + 2\sin b \sin c \cos^2 \tfrac{1}{2} A;$$

Soit pris un arc v tel que $\sin v = \cos \tfrac{1}{2} A \sqrt{\sin b \sin c}$,

et on a $\sin^2 \tfrac{1}{2} a = \sin^2 \tfrac{1}{2}(b+c) - \sin^2 v$

$$\sin^2 \tfrac{1}{2} a = \sin \tfrac{1}{2}(b + c + 2v) \sin \tfrac{1}{2}(b + c - 2v),$$

d'après l'équ. (6) (t. I, p. 335).

4e CAS. *Étant donnés deux angles* C *et* B, *et le côté adjacent* a, *trouver le troisième angle* A?

L'équ. (7), p. 249, donne

$$\cos A = \cos B \cos c\,(\text{tang}\, B\, \text{tang}\, C \cos a - 1).$$

On peut aussi recourir au triangle supplémentaire, et, par la théorie qui précède, on trouve

$$\sin v = \sin \tfrac{1}{2} a \sqrt{\sin B \sin C},$$

$$\cos^2 \tfrac{1}{2} A = \sin \tfrac{1}{2}(B + C + 2v) \sin \tfrac{1}{2}(B + C - 2v).$$

5e CAS. *De deux côtés et les angles opposés, connaissant trois éléments, trouver le quatrième?*

Il faut recourir à la *règle des quatre sinus*, équ. 5, p. 249.

644. Excepté lorsqu'on connaît les trois côtés, ou les trois angles d'un triangle, tout problème de trigonométrie sphérique comprend au rang des données un angle et un côté adjacent, outre un troisième élément : dans ce qui suit, nous désignerons toujours cet angle par A, et ce côté par b. Abaissons de l'un des angles C (fig. 29) un arc CD perpendiculaire sur le côté c : ce côté c sera coupé en deux segments φ et φ', et l'angle C en deux angles θ et θ', savoir :

$$c = \varphi + \varphi', \quad C = \theta + \theta'.$$

Bien entendu que *l'une de ces parties sera négative dans chaque équation, si l'arc perpendiculaire tombe hors du triangle, cas qui se présente lorsque l'un des angles* A *et* B *de la base est aigu et l'autre obtus : cet arc tombe, au contraire, au-dedans du triangle quand ces deux angles sont de même espèce.* En effet, des deux triangles rectangles ACD, BCD, tirons les valeurs de l'arc perpend. CD, par l'équ. (r), p. 250,

$$\text{tang}\, CD = \text{tang}\, A \sin \varphi = \text{tang}\, B \sin \varphi'.$$

Si les angles A et B sont de même espèce, leurs tangentes ont même signe : $\sin \varphi$ et $\sin \varphi'$ sont donc dans le même cas : mais quand A et B sont d'espèces différentes, leurs tangentes, et par suite $\sin \varphi$ et $\sin \varphi'$ doivent avoir des signes contraires ; alors l'arc perpendiculaire CD tombe hors du triangle, et l'un des segments φ et φ' a seul le signe $-$.

645. Dans la figure 29, on voit que le triangle ABC est décomposé en deux, ACD, BCD, qu'on peut traiter séparément, et dont la résolution fait connaître les éléments non donnés, à l'aide de ceux qui le sont. Ce procédé conduit à des équ. simples, auxquelles le calcul des log. s'applique facilement. C'est ce que nous allons montrer.

On résout d'abord les triangles ACD, BCD, pour en tirer l'une des parties φ ou θ, du côté c ou de l'angle C, en supposant connus l'angle A et le côté adjacent b. Les équ. (p et q) p. 250 conduisent aux équ. (1 et 2). Puis tirant de chacun de ces triangles les valeurs de l'arc perpendiculaire CD, et égalant ces valeurs, on obtient les équ. (5, 6, 7 et 8), lesquelles viennent respectivement des équations (m, s, r et p).

$$\text{Tang}\ \varphi = \text{tang}\ b \cos A, \ldots . (1)\ ; \quad \cot \theta = \cos b\ \text{tang}\ A. \ldots (2)$$

$$c = \varphi + \varphi', \ldots\ldots (3); \qquad C = \theta + \theta', \ldots\ldots (4)$$

$$\frac{\cos a}{\cos b} = \frac{\cos \varphi'}{\cos \varphi}, \ldots\ldots (5); \qquad \frac{\cos A}{\cos B} = \frac{\sin \theta}{\sin \theta'}, \ldots (6)$$

$$\frac{\text{tang}\ A}{\text{tang}\ B} = \frac{\sin \varphi'}{\sin \varphi}, \ldots\ldots (7); \qquad \frac{\text{tang}\ a}{\text{tang}\ b} = \frac{\cos \theta}{\cos \theta'}, \ldots (8)$$

$$\frac{\sin A}{\sin a} = \frac{\sin B}{\sin b} = \frac{\sin C}{\sin c}. \ldots\ldots (9)$$

Voici les divers cas qui peuvent se présenter, et la manière de les traiter par ces équ. en ayant soin d'ailleurs d'avoir égard aux signes des sin., cos. et tang., signes qui sont positifs ou négatifs, selon que ces lignes appartiennent à des arcs $<$ ou $>$ 90°.

Outre les données A *et* b, on a encore un 3e élément.

1° Si l'on connaît c (*deux côtés* b *et* c, *et l'angle compris* A), l'équ. (1) donne (φ), (3) donne φ', et ces arcs peuvent recevoir le signe —; (5) donne a; (7), B; enfin (9), C, dont l'espèce est d'ailleurs connue (n° 644).

2° Si l'on a C (*deux angles* A *et* C, *et le côté adjacent* b), l'équ. (2) donne θ; (4), θ', qui peut être négatif; (6), B; (8), a; (9), c, qui est d'espèce connue.

3° Quand on connaît α (*deux côtés* a *et* b, *et l'angle opposé* A) l'équ. (1) donne φ; (5), φ'; (3), c; (7 et 9), B et C:

ou bien, (2) donne θ; (8), θ'; (4), c; (6 et 9), B et c.

Dans ce cas, le problème a en général deux solutions ; car φ' ou θ' étant calculé par un cosinus, l'arc a le double signe $\pm$; c et C ont donc deux valeurs, à moins qu'on ne soit conduit à en rejeter une comme négative, ou $> 180°$. Les équ. (6 et 7) donnent φ' et θ' par leurs sinus et il en résulte deux valeurs de B ; de même pour C et c.

4° Quand on connaît B (*deux angles* A *et* B, et le côté opposé b) l'équ. (2) donne θ ; (6), θ' ; (4), C ; (8 et 9), a et c.

Ou bien (1) donne φ ; (7), φ' ; (3), c ; (5 et 9), a et C.

Il existe encore ici deux solutions, car φ' ou θ' étant donné par un sinus, l'arc a deux valeurs supplémentaires ; ainsi c dans l'équ. (3), et a dans l'équ. (8), reçoivent deux valeurs : de même pour a et c dans (5 et 4), etc.

Observez que dans chacun des quatre cas que nous venons d'analyser, on ne se sert que des équ. marquées de numéros soit pairs, soit impairs : lorsqu'on a le choix des deux systèmes, on doit préférer celui qui conduit à des calculs plus simples ou plus précis *.

646. Voici plusieurs conséquences importantes (fig. 29) :

1° L'équ. (5) donne $\dfrac{\cos b - \cos a}{\cos b + \cos a} = \dfrac{\cos \varphi - \cos \varphi'}{\cos \varphi + \cos \varphi'}$, et en vertu des équ. 7 et 8, t. I, p. 335, comme $c = \varphi + \varphi'$ on a

$$\text{tang}\, \tfrac{1}{2}(\varphi' - \varphi) = \text{tang}\, \tfrac{1}{2}(a + b) \,.\, \text{tang}\, \tfrac{1}{2}(a - b) \,.\, \cot \tfrac{1}{2} c \ldots. (10)$$

Connaissant les trois côtés a, b, c, d'un triangle, cette équ. fait connaître la demi-différence des segments φ et φ', et par suite ces segments mêmes, puisque $\frac{1}{2} c$ est leur demi-somme. En résolvant les triangles rectangles ACD, BCD, on obtient les angles A et B,

* Pour résoudre un triangle sphérique où l'on connaît soit deux côtés et un angle, soit deux angles et un côté, abaissez de l'un des sommets un arc perpendiculaire sur le côté opposé, pour former deux triangles rectangles, dont l'un ait deux parties connues, outre l'angle droit. Cet arc ne doit donc pas partir de l'angle donné dans le 1er cas, ni tomber sur le côté donné dans le 2e cas. Résolvez ce triangle rectangle, et calculez les deux segments φ et φ' de la base, ou ceux θ et θ' de l'angle du sommet. Les équ. 5, 6, 7 et 8, s'énoncent ainsi :

1° *Les cos. des deux côtés de l'angle d'où part l'arc perpend. sont comme les cos. des segments respectifs de la base ; les cot. de ces côtés sont comme les cos. respectifs des segments de l'angle au sommet ;*

2° *Les cot. des deux angles à la base sont comme les sinus respectifs des segments de la base ; les cos. de ces angles sont comme les sinus des segments respectifs de l'angle au sommet.*

savoir : $\cos A = \text{tang}\,\varphi \cot b,\quad \cos B = \text{tang}\,\varphi' \cot a$. . . . (11)

2° L'équ. (7) donne de même (*voyez* n° 360 et équ. 3, t. I, p. 334).

$$\frac{\text{tang}\,A - \text{tang}\,B}{\text{tang}\,A + \text{tang}\,B} = \frac{\sin\varphi' - \sin\varphi}{\sin\varphi' + \sin\varphi} = \frac{\text{tang}\,\frac{1}{2}(\varphi' - \varphi)}{\text{tang}\,\frac{1}{2}(\varphi' + \varphi)},$$

$$\text{tang}\,\tfrac{1}{2}(\varphi' - \varphi) = \frac{\sin(A - B)}{\sin(A + B)}\,.\,\text{tang}\,\tfrac{1}{2}c \quad . . . . (12)$$

Quand on connaît deux angles A, B *et le côté adjacent* c, cette équ. donne φ et φ' (fig. 29) : les équ. (11) déterminent ensuite a et b.

3° L'équ. (6) donne, en opérant de la même manière,

$$\text{tang}\,\tfrac{1}{2}(\theta' - \theta) = \text{tang}\,\tfrac{1}{2}(A + B)\,.\,\text{tang}\,\tfrac{1}{2}(A - B)\,.\,\text{tang}\,\tfrac{1}{2}C \quad . . . . (13)$$

Lorsque les trois angles A, B, C, *sont donnés,* cette équ. fait connaître θ et θ'; on a ensuite les côtés a et b, en résolvant les triangles *ACD, BCD,*

$$\cos b = \cot\theta \cot A,\quad \cos a = \cot\theta' \cot B \quad . . . . (14)$$

4° Enfin, l'équ. (8) donne de même,

$$\text{tang}\,\tfrac{1}{2}(\theta' - \theta) = \frac{\sin(a - b)}{\sin(a + b)} \cot\tfrac{1}{2}C \quad . . . . (15)$$

Connaissant deux côtés a, b, *et l'angle compris* C, on obtiendra θ et θ', puis A et B par les équ. (14).

Les équ. que nous venons d'établir servent à démontrer les théorèmes connus sous le nom d'*analogies de Néper*. Égalons les valeurs (10) et (12) de $\text{tang}\,\frac{1}{2}(\varphi' - \varphi)$; nous aurons, à cause de

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha,$$

$$\text{tang}\,\tfrac{1}{2}(a + b)\,.\,\text{tang}\,\tfrac{1}{2}(a - b) = \frac{\sin\frac{1}{2}(A - B)\cos\frac{1}{2}(A - B)}{\sin\frac{1}{2}(A + B)\cos\frac{1}{2}(A + B)}\,.\,\text{tang}\,\tfrac{1}{2}c \ldots (16)$$

Or, l'équ. (9) donne $\dfrac{\sin a - \sin b}{\sin a + \sin b} = \dfrac{\sin A - \sin B}{\sin A + \sin B}$.

D'où (n° 360) $\dfrac{\text{tang}\,\frac{1}{2}(a - b)}{\text{tang}\,\frac{1}{2}(a + b)} = \dfrac{\text{tang}\,\frac{1}{2}(A - B)}{\text{tang}\,\frac{1}{2}(A + B)}$.

Multipliant l'équ. (16) membre à membre par cette dernière, tous les facteurs qui ne sont pas détruits sont au carré; prenant la racine, il vient

$$\left.\begin{array}{l}\tang \frac{1}{2}(a-b) = \dfrac{\sin \frac{1}{2}(A-B)}{\sin \frac{1}{2}(A+B)} \cdot \tang \frac{1}{2} c,\\ \text{et} \quad \tang \frac{1}{2}(a+b) = \dfrac{\cos \frac{1}{2}(A-B)}{\cos \frac{1}{2}(A+B)} \cdot \tang \frac{1}{2} c\ ^*,\end{array}\right\}\ldots.(17)$$

en divisant l'équ. (16) par la précédente.

Égalons les valeurs (13 et 15) de tang $\frac{1}{2}(\theta' - \theta)$, et opérons de la même manière sur l'équation résultante, ce qui revient à changer A et B ci-devant en a et b, et réciproquement, puis c en C; nous avons

$$\left.\begin{array}{l}\tang \frac{1}{2}(A-B) = \dfrac{\sin \frac{1}{2}(a-b)}{\sin \frac{1}{2}(a+b)} \cdot \cot \frac{1}{2} C,\\ \tang \frac{1}{2}(A+B) = \dfrac{\cos \frac{1}{2}(a-b)}{\cos \frac{1}{2}(a+b)} \cdot \cot \frac{1}{2} C.\end{array}\right\}\ldots.(18)$$

Telles sont les *analogies de Néper :* on s'en sert principalement pour trouver deux côtés a et b d'un triangle, lorsqu'on connaît le 3[e] côté c et les deux angles adjacents A et B (équ. 17); ou bien, pour trouver deux angles A et B, connaissant les deux côtés opposés a, b, et l'angle compris C (équ. 18).

Triangles isocèles. Soient C et B les deux angles égaux d'un triangle isocèle (fig. 29 *bis*), b et c les deux côtés égaux, A l'angle du sommet, a la base; l'arc perpend. qui va du sommet au milieu de la base, donne deux triangles rectangles symétriques, dans lesquels on trouve les relations suivantes, formées des combinaisons 3 à 3 des quatre éléments A, B, a, b; ces équ. font connaître l'un quelconque de ces arcs, quand on a les deux autres. Ainsi, *de ces quatre parties d'un triangle sphérique isocèle, l'angle* A *du sommet, la*

* Comme tang $\frac{1}{2} c$. cos $\frac{1}{2}(A-B)$ est une quantité positive, il faut que tang $\frac{1}{2}(a+b)$ et cos $\frac{1}{2}(A+B)$ aient même signe, d'où l'on conclut que *la demi-somme de deux angles quelconques est toujours de la même espèce que la demi-somme des deux côtés opposés, et réciproquement.*

base a, *l'un* b *des côtés égaux, et l'un* B *des angles égaux, deux étant donnés, on peut trouver les deux autres.*

$$\sin \tfrac{1}{2} a = \sin \tfrac{1}{2} A \sin b, \quad \ldots \quad (m)$$
$$\cos b = \cot B \cot \tfrac{1}{2} A, \quad \ldots \quad (q)$$
$$\text{tang}\ \tfrac{1}{2} a = \text{tang}\ b \cos B, \quad \ldots \quad (p)$$
$$\cos \tfrac{1}{2} A = \cos \tfrac{1}{2} a \sin B. \quad \ldots \quad (s)$$

Des problèmes qui ont deux solutions.

647. Tout triangle sphérique résulte de la section d'une sphère par trois plans qui passent au centre. La figure 31 a pour base le cercle KMK', et représente un hémisphère produit par l'un de ces plans : les deux autres plans donnent les demi-circonférences $AC\alpha$, BCB''', qu'on voit ici en perspective ; leurs plans se coupent selon le rayon CO, et déterminent le triangle sphérique ABC. Les arcs CA, $C\alpha$, sont supplémentaires ; l'angle A est l'inclinaison du plan $AC\alpha$ sur la base KK'. En menant le plan MCm, par le rayon CO, perpendiculairement à cette base KK', puis prenant $MA' = MA$, de part et d'autre de ce plan MCm, on obtient un deuxième plan $A'C\alpha'$ symétrique à $AC\alpha$, et l'on a

$$m\alpha = m\alpha', \quad AC = A'C, \quad C\alpha = C\alpha', \quad A = A' = \alpha = \alpha'.$$

Si l'on fait tourner le plan $AC\alpha$ autour du rayon CO, pour prendre toutes les positions CK, CB, Cf, ... ce plan sera perpendiculaire à la base quand il coïncidera avec MCm ; puis, dans l'une quelconque de ses positions, il formera avec la base deux angles supplémentaires, l'un en dessous, l'autre en dessus de ce plan. Les arcs CB, CA, Cf,.... croissent en s'écartant de l'arc perpendicul. $CM = \psi$, qui est le plus petit de tous, jusqu'à l'arc perpend. opposé Cm, qui est le plus grand. En effet, le triangle rectangle ACM, où $CA = b$, donne $\cos ACM = \cot b \ \text{tang}\ \psi$, et le facteur tang ψ est constant.

Quand l'angle ACM est devenu de 90°, comme pour l'arc CK, dont le plan est perpendiculaire à MCm, on a $\cot b = 0$, et l'arc $CK = 90°$. Le plan continuant ensuite de tourner vers $C\alpha'$, cos ACM devient négatif, et croît ainsi que cot b ; en sorte que l'arc $C\alpha'$ continue d'augmenter. Tout est d'ailleurs symétrique des deux côtés

du plan *MCm*; ainsi les arcs et les inclinaisons seront deux à deux égales, pour des arcs égaux $MA = MA'$, savoir, $CA = CA'$, angle $A = A'$.

En tournant ainsi, le plan coupant s'incline d'abord de plus en plus sur la base *KMK'*, en devenant *CB*, *CA*, *CK*, car le triangle rectangle *ACM* donne encore

$$\sin \psi = \sin b \sin A, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

équ. dont le 1[er] membre est constant, et où $\sin b$ va d'abord en augmentant, comme on vient de le dire : ainsi $\sin A$ décroît en même temps. Mais dès que le côté b atteint 90° (alors *CB* devient $CK = 90° = MK$), $\sin b$ diminue; donc $\sin A$ augmente, et l'angle A aigu à la base, a pris sa moindre valeur au point K, et commence à croître. Ce point K est le *pôle* de la demi-circonférence *MCm*; l'angle K est mesuré par l'arc $CM = \psi = K$, ou de l'autre côté du plan coupant, par $Cm = 180° - \psi$.

On voit donc que tous les arcs partant de C (fig. 31) pour aboutir en quelque point de la base demi-circulaire *KMK'*, sont $< 90°$; tandis que les autres qui vont en *KmK'* sont $> 90°$, et que $CK = CK' = 90°$. De plus, $CM = \psi$, et $Cm = 180° - \psi$ (valeurs de ψ que donne l'équ. 16) sont les limites entre lesquelles ces arcs *CA* sont renfermés. Plus un arc approche de *CM*, et plus il est petit; plus il approche de *Cm*, plus, au contraire, il est grand.

L'inclinaison des plans sur la base, de 90° qu'elle est en *MCm*, diminue en prenant les positions *CB*, *CA*.... jusqu'en *CK* où elle devient $K = \psi$; puis elle croît de K vers m, jusqu'à redevenir de 90° en *Cm*. L'angle est aigu du côté de *CM*, mais il est obtus du côté de *Cm*, ces derniers angles étant suppléments respectifs des premiers : tous ces angles obtus sont $< 180° - \psi$.

Enfin, tout est symétrique de part et d'autre de *MCm*, en sorte que pour deux arcs égaux *MA* et *MA'*, les inclinaisons de *CA*, *CA'* sont égales, et ces arcs sont égaux.

D'après cela, il est aisé de reconnaître si, pour un triangle quelconque *BCA*, *B'CA*, l'arc *CM* perpendiculaire sur la base *AB*, tombe au dedans ou au dehors de ce triangle, et l'on vérifie les corollaires donnés n° 641, relatifs aux grandeurs des côtés et des angles des triangles rectangles.

Les problèmes qui ont des solutions doubles, et qu'on a coutume d'appeler *cas douteux*, sont ceux où, parmi les données, il y a un

côté et l'angle qui lui est opposé, ce qui arrive dans deux problèmes 3° et 4°, p. 257.

648. 1er CAS. *On donne deux côtés* a *et* b, *et l'angle opposé* B. Coupez l'hémisphère KMK' (fig. 31) par un plan $AC\alpha$, passant par le centre O, et qui soit incliné de l'angle A sur la base ; puis prenez $AC = b$; C sera le sommet du triangle, lequel doit être fermé par un arc $CB = a$, de grandeur connue. Analysons ces conditions.

Supposons d'abord que l'*angle* A *soit aigu*, $CA = b$ est l'un des côtés du triangle que ferme le côté a qui doit tomber dans la région $\alpha A'MA$, puisque si le côté a tombait comme Cf, $C\alpha'$, le triangle CAf, $CA\alpha'$...., au lieu de l'angle aigu A, aurait celui qui, de l'autre côté du plan CA, en est le supplément. Ce côté terminal a, partant du sommet C, doit donc se rendre en quelque point de l'arc $AMA'\alpha$. Les arcs, tels que CB, CB' sont deux à deux égaux et autant inclinés sur la base, lorsqu'ils vont en des points B, B', à égale distance de M. Prenons $MA' = MA$, $MB' = MB$, les arcs seront $CA' = CA = b$, $CB' = CB = a$.

Or, si le côté a est $< b$, a tombe dans l'angle $A'CA$, comme CB, CB', et l'on a deux triangles BCA, $B'CA$, composés des trois éléments donnés A, b et a, c'est-à-dire *deux solutions* du problème. Alors l'un des angles B à la base est obtus, l'autre B' est aigu. Au contraire, si $a > b$, l'arc a tombe comme Cf', et le triangle ACf' est le seul qui réunisse les trois éléments donnés, attendu que l'arc Cf, symétrique à Cf', se trouve exclus, comme étant situé au-dessus du plan CA. Il n'y a donc qu'*une solution*, et l'angle B du triangle ACf' est aigu en f', ainsi que b. Enfin, quand le côté $a > C\alpha = 180° - b$, l'arc a tombe comme CB''', en dessus du plan $AC\alpha$, et *il n'y a aucune solution possible*.

Dans tout ceci, l'arc $b < 90°$, puisqu'on a pris $CA = b$: mais si l'on avait $b = C\alpha > 90°$, et que le côté a tombât comme CB ou CB', on aurait encore *deux solutions* $BC\alpha$, $B'C\alpha$, ayant à la base, l'un l'angle B aigu, l'autre l'angle B' obtus : tandis qu'on n'en aurait qu'*une seule* $\alpha Cf'$, si ce côté a tombait en Cf' dans l'espace $A'C\alpha$, avec un angle f' obtus aussi bien que b ; enfin, il n'y aurait *aucune solution*, si ce côté a tombait en CB''' au-dessus du plan $AC\alpha$.

Ainsi, quand l'angle A est aigu, b étant $>$ ou $<$ 90°, il n'y a qu'une solution, lorsque le côté b tombe dans l'espace $\alpha CA'$, c'est-à-dire quand la valeur de l'arc a est entre b et $180° - b$: et alors l'angle à la base est aigu ou obtus avec b : hors de ces limites, il y

a deux solutions, ou il n'y en a aucune ; deux, quand a tombe sur l'arc AMA', circonstance où $a < 90°$; aucune, quand a tombe sur l'arc $am\alpha'$, ou $a > 90°$.

Venons-en maintenant au cas où l'*angle* A *est obtus*, cas où le côté a qui ferme le triangle, en partant de C, doit être au-dessus du plan αCA, tels que Cf, CB''.... Le même raisonnement montre que si $a = C\alpha > 90°$, et si le côté terminal a tombe dans l'espace $\alpha C\alpha'$, il y a *deux solutions*, telles que $\alpha CB''$, $\alpha CB'''$, ayant à leur base, l'une un angle B''' aigu, l'autre un angle B'' obtus : qu'*il n'y en a qu'une seule* $KC\alpha$, quand ce côté a tombe, comme ci-devant, dans l'angle $\alpha' CA$, l'angle K à la base étant aigu ou obtus en même temps que b ; et enfin qu'il *n'y en a pas* de possible, lorsque a tombe sur l'arc $A'MA$.

On opérera de même pour le cas de $a = CA < 90°$.

Que l'angle A soit aigu ou obtus, on voit donc que la solution est unique, quand le côté terminal a, opposé à l'angle donné A, a sa valeur entre b et $180° - b$: hors de ces limites, la question admet deux solutions ou aucune ; deux, quand A et a sont de même espèce (ensemble $>$ ou $< 90°$), et aucune, lorsque ces arcs sont d'espèces différentes. Et s'il n'y a qu'une solution, B et b sont de même espèce. Or, on sait (nº 644) que la perpend. abaissée du sommet C sur la base c, tombe au dedans ou au dehors du triangle (ce que d'ailleurs on reconnaît bien sur la fig. 31), selon que les angles A et B à la base, sont d'espèces semblables ou différentes ; donc dans les équ. $c = \varphi \pm \varphi'$, $C = \theta \pm \theta'$, on prendra le signe $+$ quand les arcs A et b seront de même espèce, et — dans le cas contraire, condition qui détermine la solution. L'analyse du troisième cas du nº 645 est ainsi complétée, puisqu'on sait quelle est celle des deux solutions qu'on doit admettre.

Donc *lorsqu'on aura un triangle à résoudre, connaissant deux côtés* a, b *et un angle opposé* B, *on comparera* a *à* b *et à* 180° — b ; *si* a *est l'une de ces limites, ou compris entre elles, il n'y a qu'une seule solution ;* B *et* b *sont de même espèce ;* C *et* c *seront la somme ou la différence de leurs segments, selon que les arcs* A *et* b *seront d'espèces semblables ou différentes. Hors de ces limites, on a deux solutions, quand* A *et* a *sont de même espèce, et aucun triangle n'est possible dans le cas contraire.*

Observez que la moindre et la plus grande valeurs que le côté terminal a puisse recevoir sont CM et Cm, l'une ψ, l'autre $180° - \psi$;

si a n'était pas compris entre ces limites, c'est-à-dire entre les deux valeurs supplémentaires de ψ que donne l'équ. (16), p. 262, le problème proposé serait absurde, parce qu'on ne pourrait former aucun triangle avec les trois éléments donnés A, b et a. Au reste, ce cas n'exige pas de calcul spécial pour être reconnu, attendu qu'il se manifeste de lui-même par une opération impraticable.

649. 2e cas. *On donne deux angles* A *et* B, *avec un côté opposé* b.

En raisonnant comme ci-dessus, on arriverait à une conséquence qu'on obtient plus facilement par la considération du triangle supplémentaire $A'B'C'$ (fig. 26, n° 639). On y connaît les côtés $a' = 180° - A$, $b' = 180° - B$, et l'angle $B' = 180° - b$; et il suit de ce qu'on vient de dire que ces éléments appartiennent à deux triangles dont un seul convient à la question, quand b', côté opposé à l'angle B', est compris entre a' et $180° - a'$; ou, ce qui équivaut, quand B est entre A et $180° - A$ (en retranchant chaque arc de 180°). Alors A et a doivent être de même espèce; C et c seront la somme ou la différence de leurs segments, selon que les arcs A et b seront d'espèces semblables ou différentes.

Ainsi *lorsqu'on voudra résoudre un triangle où* A, B *et* b *seront donnés, on comparera* B *à* A *et à* 180° — A ; *si* B *est l'un de ces arcs, ou intermédiaire entre eux, il n'y aura qu'une seule solution;* A *et* a *seront de même espèce ; dans les équations* $C = \theta \pm \theta'$, $c = \varphi \pm \varphi'$, *on prendra le signe* + *quand les arcs* A *et* b *seront de même espèce, et* — *dans l'autre cas, ce qui apprendra quelle est celle qu'on doit adopter ou rejeter des deux solutions que donne le calcul* n° 645, 4°. *Hors de ces limites, il y a deux solutions, quand* B *et* b *sont de même espèce, et aucune lorsque ces arcs sont d'espèce différente.*

En outre, l'angle B doit être compris entre les deux valeurs supplémentaires de ψ données par l'équ. (16); car sans cela, on ne pourrait former aucun triangle avec les données, et le problème serait absurde.

650. *Quand le triangle est rectangle*, CM ou Cm (fig. 31) est l'un des côtés, et si l'on donne un angle et un côté opposé, il y a deux solutions qui se réduisent à une seule dans certains cas.

1° Étant donnés l'hypoténuse a et un côté b, trouver l'angle opposé B? L'équ. (n), p. 250, fait connaître B par un sinus, qui répond à deux arcs supplémentaires. De même, étant donnés l'hypoténuse a et l'angle B, trouver le côté opposé b? La même équ. donne deux arcs supplémentaires pour le côté opposé b. Mais da s

ces deux cas, on n'admet qu'une seule solution, parce que les deux arcs CA ou CA' qui ferment le triangle CMA, CMA', sont symétriques : ainsi B et b sont de même espèce et il n'y a plus d'indécision.

2° Étant donnés un côté b de l'angle droit et l'angle opposé B, la troisième partie cherchée admet deux valeurs : car si l'on demande l'hypoténuse a, l'équ. (n) donne sin a; si l'on cherche le troisième côté c, l'équ. (r) donne sin c; enfin, pour trouver l'angle C adjacent au côté connu b, l'équ. (s) donne sin C. Ainsi l'inconnue reçoit deux valeurs supplémentaires pour l'arc correspondant à chacun de ces sinus.

651. Voici quelques applications numériques :

I. Soient $a = 133° 19'$, $b = 57° 28'$, $A = 45° 23'$. Le triangle est impossible, parce que a n'est pas entre 57° 28′ et son supplément 122° 32′, et qu'en outre A et a ne sont pas de même espèce.

II. Il en faut dire autant si l'on a $A = 120°$, $B = 51°$, $b = 101°$; car on trouve que B n'est pas entre 120° et 60°, et que B et b ne sont pas de même espèce.

III. Soient $b = 40° 0' 10''$, $a = 50° 10' 30''$, $A = 42° 15' 14''$; il n'y a qu'une solution, attendu que a est entre b et $180° - b$; B est $< 90°$, et l'arc perpend. abaissé du sommet tombant dans le triangle, φ et φ' sont positifs ; c est la somme de ces arcs. Le calcul des équ. (1, 5 et 3), page 257, donne

tang b . . . . $\bar{1}.9238563$	cos a . . . . $\bar{1}.8064817$	$\varphi = 31°50'46''$
cos A . . . . $\bar{1}.8693330$	cos φ . . . . $\bar{1}.9291471$	$\varphi' = 44.44.50$
tang φ . . . . $\bar{1}.7931893$	cos b . . . $-\bar{1}.8842363$	$c = 76.35.36$
	cos φ' . . . . $\bar{1}.8513925$	

Pour trouver l'angle C du sommet, les équ. (2, 8 et 4) donnent

cos b . . . . $\bar{1}.8842363$	tang . . . . . $\bar{1}.9238563$	$\theta = 55°9'59''$
tang A . . . . $\bar{1}.9583058$	cot a . . . . . $\bar{1}.9211182$	$\theta' = 66.26.21$
cot θ . . . . $\bar{1}.8425421$	cos θ . . . . . $\bar{1}.7567851$	$C = 121.36.20$
	cos θ'' . . . . $\bar{1}.8017596$	

Enfin, la règle des quatre sinus (p. 249) donne $B = 34°15'3''$.

IV. Pour $B = 42° 15' 14''$, $A = 121°36' 20''$, $b = 50° 10' 30''$, on a deux solutions, parce que B n'est pas compris entre A et son supplément, et que B et b sont de même espèce. Les équations

(2, 6 et 9) conduisent aux calculs suivants :

$\cos b$ . . . $\bar{1}.8064817$	$\cos B$ . . . $\bar{1}.8693340$	$\sin b$ . . . $\bar{1}.8853636$
tang A . . . 0.2108864 —	$\sin \theta$ . . . $\bar{1}.8406262$ —	$\sin A$ . . . $\bar{1}.9302745$
cot θ . . . 0.0173681 —	$\cos A$ . . . — $\bar{1}.7193880$ —	$\sin B$. — $\bar{1}.8276379$
$\theta = -43°51'16''$	$\sin \theta'$ . . . $\bar{1}.9905712$ +	$\sin a$ . . . $\bar{1}.9880002$
$\theta' =$ 78 . 6 . 19	ou . . . . . $101°53'41''$	$a = 76°35'36''$
$C =$ 34 . 15 . 3	ou $C =$ 58.2.25	ou $=$ 103.24.24

tang b 0.0788818	cot B . . . 0.0416956
$\cos A$ . . . . . $\bar{1}.7193874$ —	tang A . . . 0.2108873 —
tang φ . . . . . $\bar{1}.7982692$ —	$\sin \varphi$ . . . $\bar{1}.7259905$ —
$\varphi = -$ $52°8'50''$	$\sin \varphi'$ . . . $\bar{1}.9785734$ +
$\varphi' =$ 72 . 9 . 0 ou	$107°51'0''$
$c =$ 40.0.10 ou	$c =$ 75.42.10

L'une de ces deux solutions reproduit le triangle précédent; elle est fCA' (fig. 31); l'autre est $f'CA'$.

V. *Connaissant les trois côtés, trouver un angle ?*

$a =$	$76°35'36''$	sin . . . . $\bar{1}.9880008$	les autres éléments du triangle sont :
$b =$	50 . 10 . 30	sin . . . . $\bar{1}.8853636$	
$c =$	40 . 0 . 10		
$2p =$	166 . 46 . 16	— $\bar{1}.8733644$	A = $121°36'19''8$
$p =$	83 . 23 . 8		B = 42.15.13,7
$p - a =$	6 . 47 . 32	sin . . . . $\bar{1}.0728716$	C = 34.15. 2,8
$p - b =$	33 . 12 . 38	sin . . . . $\bar{1}.7385565$	ψ = 40.51. 3,0
		sin² . . . . $\bar{2}$,9380637	φ, φ', θ, θ' sont donnés
$\frac{1}{2}$ C =	17.7.31,4	sin . . . . $\bar{1}.4690318$	ci-dessus, le triangle
C =	34.15.2,8.		étant ici le même.

Nous terminerons la trigonométrie sphérique, en donnant tous les éléments d'un triangle sphérique, comme exercice de calcul; car connaissant tous les éléments du triangle, on y prendra à volonté trois de ces éléments pour données, et le calcul devra reproduire les trois autres.

ARCS.	LOG. SIN.	LOG. COS.	LOG. TANG.
$A =$ 121°36′19″81	$\bar{1}.9302747$	$\bar{1}.7193874$ —	0.2108873 —
$B =$ 42.15.13,66	$\bar{1}.8276379$	$\bar{1}.8693336$	$\bar{1}.9583043$
$C =$ 31.15. 2,76	$\bar{1}.7503664$	$\bar{1}.9172860$	$\bar{1}.8330804$
$a =$ 76.35.36,0	$\bar{1}.9880008$	$\bar{1}.3652279$	0.6227729
$b =$ 50.10.30,0	$\bar{1}.8853636$	$\bar{1}.8064817$	0.0788819
$c =$ 40. 0.10,0	$\bar{1}.8080926$	$\bar{1}.8842363$	$\bar{1}.9238563$
$\varphi =$ — 32. 8.50,0	$\bar{1}.7259905$ —	$\bar{1}.9277212$	$\bar{1}.7982693$ —
$\varphi' =$ 72. 9. 0,0	$\bar{1}.9785741$	$\bar{1}.4864674$	0.4921067
$\theta =$ — 43.51.16,2	$\bar{1}.8406263$ —	$\bar{1}.8579964$	$\bar{1}.9826249$ —
$\theta' =$ 78. 6.19,0	$\bar{1}.9905733$	$\bar{1}.3141076$	0.6764657
On a pour l'arc perpendiculaire $\psi =$ 40.51. 3,0	$\bar{1}.8156388$	$\bar{1}.8787602$	$\bar{1}.9368787$

CHAPITRE II.

SURFACES ET COURBES A DOUBLE COURBURE.

Principes généraux.

652. Pour fixer (fig. 32) la position d'un point M dans l'espace, on conçoit trois axes Ax, Ay, Az, que nous supposerons rectangulaires pour plus de facilité, et les plans zAx, zAy, xAy, qui passent par ces lignes ; puis on donne la distance PM, ou $z = c$, de ce point à sa projection P sur l'un de ces plans, ainsi que cette projection, et par conséquent les coordonnées AN, AS du point P, ou $x = a$, $y = b$: les données a, b et c ne sont autre chose que les distances MQ, MR, MP à ces trois plans ; ces droites achèvent le parallélipipède QN.

En considérant qu'outre l'angle trièdre $zAxy$, les trois plans coordonnés forment sept autres trièdres, on verra bientôt que la position absolue du point M dans l'espace n'est fixée par les longueurs de a, b, c, qu'autant qu'on introduira les notions sur les signes (n° 340). Ainsi, au-dessous du plan xAy, conçu dans son étendue indéfinie, les z sont négatifs ; si le point est à gauche du

plan zAy, vers x', x est négatif; y l'est en arrière du plan zax.

653. Imaginons une équ. entre les trois coordonnées x, y, z, telle que $f(x, y, z) = 0$; elle sera indéterminée. Prenons, pour deux de ces variables, des valeurs quelconques $x = a = AN$, $y = b = PN$ (fig. 32) ; notre équ. donnera, pour z, au moins une racine $z = c$. Si c est réel, on elèvera en P la perpend. $PM = c$ au plan yAx, et le point M de l'espace sera ainsi déterminé. Changeant de valeurs pour les arbitraires x et y, c'est-à-dire prenant à volonté des points P sur le plan xAy, on tirera de l'équ. autant de valeurs de z; tous les points M, ainsi obtenus, seront sur une surface, qu'on forme en les unissant par la pensée, et établissant entre eux la continuité : cette surface sera, par exemple, un cône, un cylindre, une sphère; $f(x, y, z) = 0$ sera *l'équation de la surface*, parce qu'elle en distingue les divers points de tous ceux de l'espace. Si z a plusieurs racines réelles, la surface aura plusieurs nappes; et si z est imaginaire, la perpend. indéfinie élevée en P au plan xy ne la rencontrera pas.

Si, après avoir pris une valeur fixe de y, telle que $y = b = AS$, on fait varier x, l'ordonnée $PM = z$ se mouvra suivant SP parallèle au plan xz, et les variations correspondantes qu'elle éprouvera seront déterminées par $f(x, b, z) = 0$, qui est par conséquent l'équ. de l'intersection de la surface par le plan SM, entre les deux coordonnées x et z, comptées dans le plan $QMPS$. De même, en faisant $x = a$, ou $z = c$, on a les intersections de la surface par des plans MN, ou QR, parallèles aux yz ou aux xy.

$z = 0$ est visiblement l'équ. du plan xy, $z = c$ celle d'un plan qui lui est parallèle, et en est distant de la quantité c; $x = 0$ est l'équ. du plan yz, $x = a$ est celle du plan qui lui est parallèle, mené à la distance a.

654. Le triangle rectangle AMP donne $z^2 + AP^2 = AM^2$; et comme on tire de APN, $AP^2 = x^2 + y^2$, on a

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2,$$

en faisant $AM = R$. Donc, 1° la distance d'un point à l'origine est la racine des carrés des trois coordonnées de ce point. 2° Si x, y et z sont variables, cette équation caractérisera tous les points de l'espace dont la distance à l'origine est la même et $= R$: c'est donc *l'équation de la sphère* qui a R pour rayon et le centre à l'origine.

Soient deux points, l'un $N(x, y, z)$, l'autre $M(x', y', z')$ (fig. 33), n et m leurs projections sur le plan xy, mn est celle de la ligne $MN = R$. Or (nº 373), on a

$$mn^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2.$$

De plus, MP, parallèle à mn, forme le triangle MNP rectangle en P; d'où $MN^2 = MP^2 + PN^2 = mn^2 + PN^2$; et comme $PN = Nn - Mm = z - z'$, on a

$$(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2 = R^2 :$$

R est la distance entre les points (x, y, z), (x', y', z') *; et si l'on regarde x, y, z, comme des variables, *cette équation est celle d'une sphère de rayon* R, et dont le centre est situé au point $M(x', y', z')$.

655. Concevons une surface cylindrique droite à base quelconque (nº 287); cette base est une courbe donnée sur le plan xy par son équ. $f(x, y) = 0$. En attribuant à x et y des valeurs qui satisfassent à cette équ., le point du plan xy que ces coordonnées déterminent, est un de ceux de la courbe qui sert de base au cylindre; la perpend. z indéfinie, élevée en ce point au plan xy, est une génératrice de ce corps; ainsi, quelque valeur qu'on attribue à z, l'extrémité de cette perpend. sera sur la surface du cylindre, en quelque point qu'on la termine. Donc *l'équation de la surface d'un cylindre droit est celle de sa base,* ou $f(x, y) = 0$.

Si la génératrice du cylindre droit est perpend. au plan des xz, l'équ. de cette surface est celle de la base tracée sur ce plan, etc.

Le même raisonnement prouve que l'équ. d'un plan perpend. à l'un des plans coordonnés est celle de sa *Trace* sur celui-ci, c'est-à-dire de la ligne d'intersection de ces deux plans. Soit donc $AB = \alpha$ (fig. 33 *bis*), $a =$ tang CBI, $x = az + \alpha$, qui est l'équ. de la ligne BC sur le plan zAx, est aussi celle du plan $FEBC$, perpend. à zAx, et menée suivant BC.

656. Soient $M = 0$, $N = 0$, les équ. de deux surfaces quelcon-

* Comme mB, nC (fig. 33) parallèles à Ay, donnent $BC = x - x' =$ la projection de MN sur l'axe des x, on voit que *la longueur d'une ligne dans l'espace est la racine carrée de la somme des carrés de ses projections sur les trois axes.*

On a aussi $MP = MN \,.\, \cos NMP$; donc la projection mn est le produit de la longueur projetée par le cos. de l'inclinaison; et réciproquement une ligne dans l'espace est le quotient de sa projection sur un plan divisé par le cosinus de l'angle qu'elle fait avec ce plan. Ces théorèmes s'étendent aussi aux aires planes situées dans l'espace (*voyez* nº 793).

ques ; chacune de ces équ. distingue en particulier ceux des points de l'espace qui appartiennent à la ligne suivant laquelle ces surfaces se coupent. Donc, *un point est déterminé par trois équations entre* x, y, z, *qui sont les coordonnées de ce point ; une surface par une seule équation ; une courbe en a deux, qui sont celles des surfaces qui, par leur intersection, déterminent cette ligne.* Comme il y a une infinité de surfaces qui passent par une ligne donnée, on sent qu'une même courbe dans l'espace a une infinité d'équations.

Si l'on élimine z entre $M = 0$, $N = 0$, on trouvera une équ. $P = 0$ en x et y ; ce sera celle d'un cylindre droit, qui coupe nos deux surfaces suivant la courbe dont il s'agit, et aussi, l'équ. de la projection (n° 272) de cette courbe sur le plan xy. De même, en éliminant y, on aura l'équ. $Q = 0$ de la projection sur le plan xz, ou du cylindre projetant ; $P = 0$, $Q = 0$, sont les équations de nos deux cylindres, qu'on peut substituer aux surfaces données ; ce sont les équ. des projections de notre courbe, et celles de la courbe même : donc, *on peut prendre pour équ. d'une courbe les équ. de ses projections sur deux des plans coordonnés.*

657. Appliquons ces principes à la ligne droite. Nous prendrons pour ces équ. celles de deux plans quelconques qui la contiennent ; mais il sera convenable de préférer ceux qui fournissent des résultats plus simples. L'axe des z a pour équations $x = 0$, $y = 0$, qui sont celles des plans yz et xz. De même, $x = \alpha$, $y = \beta$, sont les équ. d'une droite PM (fig. 32) parallèle aux z, et dont le pied P, sur le plan xy, a pour coordonnées $x = \alpha$, $y = \beta$. On raisonnera de même pour les autres axes ; $x = 0$, $z = 0$, sont les équ. de celui des y, etc....

Soit une droite quelconque EF, dans l'espace (fig. 33 *bis*) ; conduisons un plan $FEBC$ perpendiculaire au plan xz ; BC en sera la projection sur ce plan (n° 272). De même, on projettera EF en HG sur le plan yz ; les équ. de ces projections, ou des plans projetants, sont celles de la droite EF, ou

$$x = az + \alpha,$$
$$y = bz + \beta.$$

Il sera aisé de voir que α et β sont les coordonnées AB, AG, du point E où la droite EF rencontre le plan xy, et que a et b sont les tangentes des angles que ses projections BC, HG font avec l'axe Az.

En éliminant z, on obtient l'équ. de la projection sur le plan xy,

$$ay = bx + a\beta - b\alpha.$$

658. Si la droite EF (fig. 33 *bis*) passe par un point donné $F(x', y', z')$, les projections C et H de ce point sont situées sur celles de la droite ; donc les équ. sont (nº 369) ;

$$x - x' = a(z - z'),$$
$$y - y' = b(z - z').$$

On trouvera aisément les valeurs de a et b lorsque la droite doit passer par un second point (x'', y'', z'').

Quand la droite passe par l'origine A, ses équations sont

$$x = az, \quad y = bz.$$

Il est aisé de voir que les projections de deux droites parallèles sur le même plan, sont parallèles (nº 268) ; donc les équations de ces lignes doivent avoir pour z les mêmes coefficients a et b, et différer seulement par les valeurs des constantes α et β.

Équations du Plan, du Cylindre, du Cône, etc.

659. Quelles que soient les conditions qui déterminent la nature d'une surface, elles se réduisent toujours, en dernière analyse, à donner la loi de sa génération, qui consiste en ce qu'une courbe *Génératrice*, variable ou constante de forme, glisse le long d'une ou plusieurs lignes données, qu'on nomme *Directrices*. L'équ. de la surface engendrée s'obtient en raisonnant ici comme au nº 462 ; nous allons en donner divers exemples, en commençant par le plan.

Un plan DC (fig. 34) est engendré par une droite EF, qui glisse sur deux autres qui se croisent : les traces BC, BD de ce plan sur ceux de xz, yz, se rencontrent en B sur l'axe des z, et ont pour équations, savoir,

$$BC \ldots y = 0, \quad z = Ax + C,$$
$$BD \ldots x = 0, \quad z = By + C, \quad \ldots \ldots (1)$$

en faisant $AB = C$. La trace BC, glissant parallèlement le long de BD, engendre ce plan BDC ; c'est ce qu'il s'agit d'exprimer par l'analyse.

Soit EF une parallèle quelconque à BC, dans l'espace; le plan projetant $EHIF$ sera parallèle à zx, HI le sera à Ax. La projection de EF sur le plan zx le sera à BC; en sorte que les équations de EF seront

$$y=\alpha, \quad z=Ax+\beta. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Pour avoir le lieu E de l'intersection de EF avec la directrice BD, éliminons x, y et z entre les quatre équations (1) et (2), il viendra l'équation de *condition*

$$\beta=B\alpha+C, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

qui exprime que les lignes BD et EF se coupent. Si donc on donne à α et β des valeurs qui y satisfassent, on sera sûr que les équ. (2) seront celles de la génératrice dans une de ses positions. Concevons donc qu'on mette dans (2) pour β sa valeur $B\alpha+C$, ces équ. seront celles d'une génératrice quelconque, dont la position dépendra de la valeur qu'on attribuera à l'arbitraire α. On en conclut que, si l'on élimine α entre elles, c'est-à-dire α et β entre les trois équations (2) et (3), l'équ. résultante

$$z=Ax+By+C,$$

est celle du plan, puisque x, y et z représentent les coordonnées des divers points d'une génératrice quelconque.

C est le z à l'origine, ou AB; A et B sont les tangentes des angles que font avec les axes des x et des y les traces BC, BD du plan, sur ceux des xz et des yz.

Si l'on fait varier C seul, le plan se meut parallèlement, parce que ses traces demeurent parallèles (n° 268). Donc

1° Toute équation du 1er degré est celle d'un plan;

2° Deux équations quelconques du 1er degré sont celles d'une ligne droite;

3° Lorsque l'équ. d'un plan est donnée, on obtient les équ. des traces sur les plans des xz, yz et xy, en faisant successivement $y=0$, $x=0$, $z=0$; ce sont les équations de ces plans. Ainsi, $Ax+By+C=0$ est l'équ. de la trace du plan sur celui des xy.

On aurait pu prendre une droite quelconque dans l'espace pour génératrice, et la faire glisser sur les traces; ce calcul plus compliqué, auquel on pourra s'exercer, aurait conduit au même résultat.

660. Le même raisonnement sert à trouver l'équation du *Cy-*

lindre. Soient $M = 0$, $N = 0$, les équ. d'une courbe quelconque donnée dans l'espace, sur laquelle doit glisser la droite génératrice, en restant parallèle à elle-même (nº 287). Désignons par

$$x = az + \alpha, \quad y = bz + \beta, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

les équ. d'une parallèle à la génératrice, a et b étant donnés, α et β dépendant de la position de cette droite. Or, pour qu'elle coupe la directrice, il faut que ces quatre équ. puissent coexister; c'est-à-dire que, si l'on élimine x, y et z entre elles, α et β doivent être tels, que l'équ. finale $\beta = F\alpha$ soit satisfaite. Si l'on met dans (1) $F\alpha$ pour β, ces deux équ. seront donc celles d'une génératrice quelconque, dont la position dépendra de la valeur de α; et si l'on élimine ensuite α entre elles, on aura une relation entre x, y et z, qui aura lieu pour une génératrice quelconque; ce sera par conséquent l'équ. cherchée.

Concluons de là que pour trouver l'équ. d'une surface cylindrique, il faut éliminer x, y et z entre les équ. (1) et celles $M = 0$, $N = 0$, de la courbe directrice; puis, dans l'équation de condition $\beta = F\alpha$, qui en résulte, mettre $x - az$ pour α, et $y - bz$ pour β; l'équation du cylindre est donc de la forme $y - bz = F(x - az)$, la forme * de la fonction F dépendant de la nature de la directrice (*voy*. nºs 745 et 919).

Si, par exemple, la base est un cercle de rayon r, tracé dans le plan xy, et placé comme l'est celui AE de la fig. 36, le diamètre AE sur l'axe des x, et l'origine en A, les équ. de la directrice sont $y^2 + x^2 = 2rx$, $z = 0$; éliminant x, y et z par les équ. (1), il vient $\beta^2 + \alpha^2 = 2r\alpha$, pour l'équ. de condition **. Ainsi

$$(y - bz)^2 + (x - az)^2 = 2r(x - az)$$

* Les signes Fx, fx, φx..... servent à désigner des fonctions différentes de x; ils indiquent des formules dans lesquelles la même quantité x entre, mais combinée de diverses manières avec les données. Au contraire, fx, fz sont la même fonction de deux quantités différentes x et z: en sorte que si l'on changeait z en x dans celle-ci, on reproduirait identiquement l'autre; $f(\sqrt{z} + a)$, $f\left(\dfrac{a}{b + \log z}\right)$ désignent que si l'on faisait $\sqrt{z} + a = x$, et $\dfrac{a}{b + \log z} = x$, ces fonctions deviendraient identiques, et $= fx$.

** Cela est visible de soi-même, puisque α et β sont les coordonnées du pied de la génératrice. Même remarque pour le cône.

On pourrait trouver l'équ. du plan, en le considérant comme un cylindre dont la base est une ligne droite.

est *l'équ. du cylindre oblique à base circulaire;* la direction de l'axe donne les valeurs de a et b. Si cet axe est dans le plan xz, on a $b=0$,

$$y^2 + (x - az)^2 = 2r(x - az).$$

Enfin, si le centre du cercle est situé à l'origine, il suffit de remplacer le second membre par r^2.

661. Soient $\qquad M=0, \quad N=0, \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (1)$

les équations de la directrice quelconque d'une surface *conique* (n° 289). Les coordonnées du sommet étant a, b, c, toute droite qui passe par ce point a pour équ. (n° 658),

$$x - a = \alpha(z - c), \quad y - b = \beta(z - c) \quad . \ . \ . \ . \quad (2)$$

Si cette droite rencontre la courbe, elle sera une génératrice : éliminons donc x, y et z entre ces quatre équ., et à l'aide des équations (2) éliminons α et β de l'équ. finale $\beta = F\alpha$, nous aurons pour le cône une équation telle que

$$\frac{y-b}{z-c} = F\left(\frac{x-a}{z-c}\right).$$

La forme de la fonction F, dépendant de la courbe directrice, est donnée par le calcul même que nous venons d'exposer (*voy.* n°s 745 et 919).

Par ex., si la base est le cercle AE (fig. 36), ces équ. sont $z=0$; $y^2 + x^2 = 2rx$; l'origine est à l'extrémité A du diamètre, lequel est couché sur l'axe des x; l'équ. de condition $\beta = F\alpha$ est ici

$$(a - \alpha c)^2 + (b - \beta c)^2 = 2r(a - \alpha c);$$

d'où $\qquad (az - cx)^2 + (bz - cy)^2 = 2r(z - c) \cdot (az - cx).$

Telle est l'*équ. du cône oblique à base circulaire*, le sommet S étant au point (a, b, c). Si nous voulons que l'axe SC soit dans le plan xz, comme on le voit fig. 36), on fera $b=0$, et il viendra

$$^2 (x^2 + y^2) + 2c(r - a)xz + a(a - 2r)z^2 + 2acrz - 2c^2rx = 0.$$

Enfin, quand le cône est droit $a = r$. Il est alors plus commode de prendre l'axe des z pour celui du cône, et l'on trouve, pour l'équ. de cette surface ainsi disposée,

$$c^2(x^2 + y^2) = r^2(z - c)^2, \quad \text{ou} \quad x^2 + y^2 = m^2(z - c)^2,$$

en nommant m la tangente de l'angle formé par l'axe et la génératrice, ou posant $mc = r$.

Si le cercle de la base n'était pas tracé dans le plan xy, mais dans un plan incliné sur les xy, et perpend. aux xz, A étant la tang. de l'angle que cette base fait avec le plan xy, il faudrait remplacer les équ. (1) par $z = Ax$ et $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$.

662. On peut concevoir toute *surface de révolution* comme engendrée (n° 286) par le mouvement d'un cercle BDC (fig. 37), dont le plan est perpend. à un axe Az, le centre I étant sur cet axe, et le rayon IC tel, que ce cercle coupe toujours une courbe quelconque donnée CAB. Nous ne traiterons d'abord que le cas où l'axe est pris pour celui des z. Tout cercle BDC dont le plan est parallèle aux xy, a pour équ. celles de son plan et de son cylindre projetant, ou

$$z = \beta, \quad \text{et} \quad x^2 + y^2 = \alpha^2; \quad \ldots \ldots \quad (1)$$

en faisant $AI = \beta$, et le rayon $IC = \alpha$.

Les équ. de la directrice donnée CAB étant

$$M = 0, \quad N = 0, \quad \ldots \ldots \quad (2)$$

pour que ces courbes se rencontrent, il faut qu'en éliminant x, y et z entre ces quatre équ., la relation $\beta = F\alpha$, à laquelle on parviendra, soit satisfaite. Si l'on met $F\alpha$ pour β dans (1), ces équations seront alors celles du cercle générateur dans une de ses positions dépendante de α; et si l'on élimine ensuite α, on aura l'équation demandée. Ainsi, on éliminera x, y et z des quatre équ. (1) et (2); puis dans l'équ. finale $\beta = F\alpha$, on mettra z pour β, et $\sqrt{(x^2 + y^2)}$ pour α; l'équ. de la surface de révolution a donc la forme $z = F(x^2 + y^2)$: celle de la fonction F dépend de la nature de la courbe directrice, et est donnée par le calcul que nous venons d'exposer.

I. Soit d'abord pris pour directrice un cercle dans le plan xz, et dont le centre soit à l'origine; on a, pour les équations (2), $y = 0$, $x^2 + z^2 = r^2$, et pour l'équ. de condition $\alpha^2 + \beta^2 = r^2$, ce qui est d'ailleurs évident par soi-même; donc, remettant $x^2 + y^2$ pour α^2, et z pour β, on a $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ pour l'équation de la sphère (n° 654).

II. Traçons dans le plan xz une parabole BAC située comme on le voit fig. 37; ses équ. seront $y = 0$, $x^2 = 2pz$; d'où $\alpha^2 = 2p\beta$, et

$$x^2 + y^2 = 2pz,$$

équ. du *Paraboloïde de révolution* autour de l'axe des z.

III. De même, l'équ. de l'*Ellipsoïde* et de l'*Hyperboloïde de révolution*, dont le 1[er] axe A se confond avec celui des x, est

$$A^2(x^2+y^2) \pm B^2z^2 = \pm A^2B^2;$$

les signes supérieurs ont lieu pour l'ellipsoïde.

IV. Supposons qu'une droite quelconque tourne autour de l'axe des z; cherchons la surface de révolution qu'elle engendre. Les équ. de cette droite mobile, qui est la directrice, sont

$$x = az + A, \quad y = bz + B;$$

d'où
$$(a\beta + A)^2 + (b\beta + B)^2 = \alpha^2,$$

pour équ. de condition. Celle de la surface est donc

$$x^2 + y^2 = (a^2+b^2)\,z^2 + 2\,(Aa + Bb)\,z + A^2 + B^2.$$

En faisant $x = 0$, on trouve (n° 450) que l'intersection par le plan yz est une hyperbole; comme x et y n'entrent ici qu'assemblés en binômes x^2+y^2, z est une fonction de x^2+y^2, et la surface engendrée est un hyperboloïde de révolution.

Cependant si la droite génératrice coupe l'axe des z, ses deux équ. doivent être satisfaites en faisant $x = y = 0$ et $z = c$; d'où $A = -ac$, $B = -bc$; donc on a

$$(a^2+b^2)\,(z-c)^2 = x^2 + y^2,$$

qui appartient à un cône droit (n° 661).

Pour trouver l'équ. d'une surface de révolution dont l'axe a une situation quelconque, il faut ou recourir à une transformation de coordonnées (n° 676), ou traiter directement le problème d'une manière analogue à la précédente (*voy.* n° 669).

Problèmes sur le plan et la ligne droite.

663. Remarquons, comme au n° 375, qu'on peut se proposer deux genres de problèmes sur les surfaces. Tantôt il s'agit de déterminer les points qui jouissent de certaines propriétés, tantôt de donner à la surface une position ou des dimensions telles, qu'elle remplisse des conditions demandées. Dans le 1[er] cas x, y, z sont les inconnues; dans le 2[e], il faut déterminer quelques constantes de l'équ. d'une manière convenable. Les conditions données doivent, dans

tous les cas, conduire à autant d'équ. que d'inconnues, sans quoi le problème serait indéterminé ou absurde. Nous allons appliquer ces considérations générales au plan.

664. *Trouver les projections de l'intersection de deux plans donnés par leurs équations.*

$$z = Ax + By + C, \quad z = A'x + B'y + C'.$$

En éliminant z, on a la projection sur le plan xy,

$$(A - A')\,x + (B - B')\,y + C - C' = 0.$$

De même, chassant x ou y,

$$(A' - A)\,z + (AB' - A'B)\,y + AC' - A'C = 0,$$
$$(B' - B)\,z + (A'B - AB')\,x + BC' - B'C = 0,$$

sont les équ. des projections sur les plans des yz et des xz.

665. *Faire passer un plan par un, deux ou trois points donnés.* L'équ. de ce plan étant $z = Ax + By + C$, s'il passe par le point (x', y', z'), on a $z' = Ax' + By' + C$; et retranchant, il vient

$$z - z' = A\,(x - x') + B\,(y - y');$$

c'est l'équ. du plan qui passe par le point (x', y', z'). Le problème resterait indéterminé si les constantes A et B n'étaient pas données, à moins qu'elles ne fussent liées par deux équations d'où il faudrait les déduire. Si, par exemple, le plan doit être parallèle à un autre, $z = A'x + B'y + C'$, on aura

$$A = A', \quad B = B'.$$

Quand le plan doit passer par un 2e point (x'', y'', z''), on a $z'' = Ax'' + By'' + C$; ce qui laisse une constante arbitraire, et permet de faire passer le plan par un 3e point, etc. (*voy.* n° 369).

666. *Trouver le point d'intersection de deux droites.*

équ. de la 1re . . . . $x = az + \alpha, \quad y = bz + \beta,$

équ. de la 2e . . . . $x = a'z + \alpha', \quad y = b'z + \beta'.$

Pour le point cherché, x, y et z satisfont à ces quatre équations; éliminant, on trouve l'équation de condition

$$(\alpha - \alpha')\,(b - b') = (\beta - \beta')\,(a - a').$$

Si elle n'est pas satisfaite, les lignes ne se coupent pas; et si elle l'est, le point d'intersection a pour coordonnées

$$z = \frac{\alpha - \alpha'}{a' - a} = \frac{\beta - \beta'}{b' - b}, \quad x = \frac{a'\alpha - a\alpha'}{a' - a}, \quad y = \frac{b'\beta - b\beta'}{b' - b}.$$

667. *Trouver les conditions pour qu'une droite et un plan coïncident ou soient parallèles.* Soient les équ. du plan et de la droite

$$z = Ax + By + C,$$
$$x = az + \alpha, \quad y = bz + \beta :$$

en substituant $az + \alpha$, et $bz + \beta$ pour x et y dans la 1re, on a

$$z(Aa + Bb - 1) + A\alpha + B\beta + C = 0.$$

Si la droite et le plan n'avaient qu'un point de commun, on en trouverait ainsi les coordonnées, mais pour qu'elle soit entièrement située dans le plan, il faut satisfaire à cette équ. quel que soit z; d'où (nº 616),

$$Aa + Bb = 1, \quad A\alpha + B\beta + C = 0;$$

ce sont les équ. de condition cherchées.

Si la droite est simplement parallèle au plan, il faut qu'en les transportant parallèlement jusqu'à l'origine, la droite et le plan coïncident; ainsi, ces équ. doivent être satisfaites en y supposant α, β et C nuls; d'où

$$Aa + Bb - 1 = 0.$$

668. *Exprimer qu'une droite est perpend. à un plan.* Le plan projetant la droite sur les xy est à la fois perpend. au plan donné et à celui des xy; ces deux derniers se coupent donc suivant une perpendiculaire au plan projetant (nos 272 et 273); c'est-à-dire que la trace du plan donné sur les xy est perpend. à toute droite dans le plan projetant, et par suite à la projection sur le plan xy de la droite donnée. Donc, *lorsqu'une ligne est perpend. à un plan, les traces de ce plan et les projections de la ligne sont à angle droit.* D'après cela, les équ. du plan et de la droite étant les mêmes qu'au numéro qui précède, celles des traces du plan sur les xz et yz, sont

$$z = Ax + C, \quad z = By + C,$$

ou $$x = \frac{1}{A}z - \frac{C}{A}, \quad y = \frac{1}{B}z - \frac{C}{B};$$

la relation connue (nº 370, équ. 4) donne

$$A + a = 0, \quad B + b = 0.$$

Cette équ. détermine deux des constantes du plan ou de la droite qui lui est perpendiculaire. Les autres constantes devront être données, ou assujetties à d'autres conditions.

669. Lorsque l'on veut mener un plan perpend. à la droite donnée, l'équ. de ce plan est donc

$$z + ax + by = C.$$

Les coordonnées du pied de la droite sur le plan xy sont α et β; la sphère, dont le centre est en ce point, a pour équation (nº 654),

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 + z^2 = r^2.$$

Ces deux dernières équ. appartiennent donc à un cercle dont le plan est perpend. à la droite donnée; le rayon de ce cercle et sa situation absolue dépendent de r et de C.

Soient $M = 0$, $N = 0$, les équ. d'une courbe; pour qu'elle coupe notre cercle, il faut que ces quatre équ. puissent co-exister; en éliminant x, y et z, on a une équ. de condition $r = F(C)$, et remettant

$z + ax + by$ pour C, et $\sqrt{[(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 + z^2]}$ pour r,

on aura l'équ. de la surface engendrée par la révolution de la courbe donnée autour de l'axe quelconque.

670. Si au contraire le plan est donné, et si l'on veut que la droite lui soit perpendiculaire, et passe par un point donné (x', y', z'), on a pour les équ. de la droite,

$$x - x' + A\,(z - z') = 0, \quad y - y' + B\,(z - z') = 0.$$

671. On en déduit la distance du point au plan; car, mettons l'équ. du plan sous la forme

$$z - z' = A\,(x - x') + B\,(y - y') + L,$$

en faisant $\quad L = C - z' + Ax' + By'$;

puis éliminons les coordonnées x, y, z du pied de la perpend., il vient

$$z - z' = \frac{L}{1 + A^2 + B^2}, \quad x - x' = \frac{-AL}{1 + A^2 + B^2}, \quad y - y' = \frac{-BL}{1 + A^2 + B^2}.$$

Donc (nº 654) la distance δ entre les extrémités est

$$\delta = \frac{L}{\sqrt{(1+A^2+B^2)}}.$$

672. *Trouver la distance d'un point à une droite.* Les équ. de la droite étant toujours comme nº 667, le plan perpendiculaire, mené par le point donné (x', y', z'), a pour équation

$$a(x-x') + b(y-y') + z - z' = 0.$$

Éliminant x, y et z à l'aide des équ. de la droite, on trouve pour les coordonnées du point de rencontre,

$$x = \frac{aM}{1+a^2+b^2} + \alpha, \quad y = \frac{bM}{1+a^2+\beta^2} + \beta, \quad z = \frac{M}{1+a^2+b^2},$$

en faisant $\quad M = a(x'-\alpha) + b(y'-\beta) + z'.$

La distance P entre les points (x, y, z), (x', y', z'), tout calcul fait, est donnée par

$$P^2 = (x'-\alpha)^2 + (y'-\beta)^2 + z'^2 - \frac{M^2}{1+a^2+b^2}.$$

673. *Trouver l'angle* A *que forment deux droites.* Menons, par l'origine, des parallèles à ces lignes; l'angle de ces deux parallèles est ce qu'on appelle l'angle des droites, qu'elles se coupent ou non. Soient donc les équ. de ces parallèles

$$(1)\ldots\; x = az, \quad y = bz, \qquad (2)\ldots\; x = a'z, \quad y = b'z;$$

il faut trouver A en fonction de a, b, a' et b'. Concevons une sphère dont le centre serait à l'origine, et qui aurait l'unité pour rayon; on aura les coordonnées des points où elle coupe nos droites, en éliminant x, y et z entre leurs équ. respectives et celle de la sphère, qui est $x^2+y^2+z^2=1$. On trouve $(a^2+b^2+1)z^2=1$, d'où l'on tire z, puis x et y par les équ. (1) ; on accentue ensuite a et b pour avoir z', x' et y' ;

$$z = \frac{1}{\sqrt{(1+a^2+b^2)}}, \quad x = \frac{a}{\sqrt{(1+a^2+b^2)}}, \quad y = \frac{b}{\sqrt{(1+a^2+b^2)}},$$

$$z' = \frac{1}{\sqrt{(1+a'^2+b'^2)}}, \quad x' = \frac{a'}{\sqrt{(1+a'^2+b'^2)}}, \quad y' = \frac{b'}{\sqrt{(1+a'^2+b'^2)}}.$$

La distance D de ces points est donnée par

$$D^2 = (x' - x)^2 + (y' - y)^2 \text{ etc.} = 2 - 2\,(xx' + yy' + zz'),$$

à cause de $x'^2 + y'^2 + z'^2 = 1$, $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. On a, dans l'espace, un triangle isocèle dont les trois côtés sont 1, 1 et D; l'angle A est opposé à ce dernier; l'équ. (D, n° 355) donne pour cet angle $\cos A = 1 - \frac{1}{2} D^2 = xx' + yy' + zz'$, ou

$$\cos A = \frac{1 + aa' + bb'}{\sqrt{(1+a^2+b^2)}\sqrt{(1+a'^2+b'^2)}}.$$

1° Pour en déduire les angles X, Y, Z, qu'une droite fait avec les axes des x, y et z, il faut donner à la 2e ligne tour à tour la situation de chacun de ces axes, puis mettre ici les valeurs de a' et b' correspondantes. Par ex., $x = 0$, $y = 0$, sont les équ. de l'axe des z : pour que les équations (2) deviennent celles-ci, il faut poser $a' = b' = 0$. Si l'on introduit ces valeurs dans notre formule, on aura

$$\cos Z = \frac{1}{\sqrt{(1 + a^2 + b^2)}}.$$

Faisons tourner la droite autour de l'origine pour l'appliquer sur le plan des xz, sans sortir du plan projetant ; l'angle dont b' est la tangente diminuera, et deviendra nul : ainsi il faut faire $b' = 0$, pour avoir l'angle qu'une droite dans l'espace fait avec une autre située dans le plan des xz ; ce qui réduit le numérateur à $1 + aa'$, et le second radical à $\sqrt{(1 + a'^2)}$. Et si cette 2e droite se rapproche de l'axe des x, a' croît, et devient infini lorsqu'elle coïncide avec cet axe. Alors 1 disparaît * devant aa' et a'^2, ce qui réduit le numé-

* Soit la fraction $\dfrac{Ax^a + Bx^b + \dots}{Mx^m + Nx^n + \dots}$, que l'on peut écrire ainsi $\dfrac{x^a(A + Bx^{b-a} + \dots)}{x^m(M + Nx^{n-m} + \dots)}$, en supposant que a et m sont les moindres exposants de x dans les deux termes. Il se présente trois cas.

1° Si $m = a$, les facteurs x^a, x^m se détruisent ; plus x décroît, et plus la fraction approche de $\dfrac{A}{M}$, qui est la limite répondant à $x = 0$.

2° Si $m > a$, on a $\dfrac{A + Bb^{-a} + \dots}{x^{m-a}(M + Nx^{n-m} \dots)}$, dont l'infini est visiblement la limite ; la fraction croît donc sans bornes quand x diminue.

3° Enfin, si $m < a$, la limite est zéro. Cette manière de prendre la limite est ce qu'on appelle *faire* x *infiniment petit*.

Si les exposants a et m sont, au contraire, les plus élevés dans les deux termes, la frac-

rateur à aa', et le second radical à $\sqrt{a'^2}$ ou a'; leur quotient étant a, on a pour l'angle X qu'une droite dans l'espace fait avec l'axe des x,

$$\cos X = \frac{a}{\sqrt{(1+a^2+b^2)}}.$$

En faisant de même $a' = 0$, $b' = \infty$, on trouve $\cos Y$. Donc, les cosinus des angles qu'une droite fait avec les axes, sont

$$\cos X = \frac{a}{\sqrt{(1+a^2+b^2)}},$$

$$\cos Y = \frac{b}{\sqrt{(1+a^2+b^2)}},$$

$$\cos Z = \frac{1}{\sqrt{(1+a^2+b^2)}}.$$

2° Ces valeurs sont aussi celles des sinus des angles que la droite fait avec les plans des yz, xz et xy, puisque ces angles sont visiblement les compléments de X, Y et Z.

3° Ajoutons les carrés de ces cosinus ; il vient

$$\cos^2 X + \cos^2 Y + \cos^2 Z = 1.$$

tion se met sous la forme $\dfrac{x^a\left(A + \dfrac{B}{x^{a-b}} + \ldots\ldots\right)}{x^m\left(M + \dfrac{N}{x^{m-n}} + \ldots\right)}$. Or plus x croît, et plus les termes $\dfrac{B}{x^{a-b}}$, $\dfrac{N}{x^{m-n}}\ldots$, approchent de zéro, qui répond à x infini; en sorte que si $a = m$, la limite est $\dfrac{A}{M}$; si $a > m$. la fraction devient $\dfrac{x^{a-m}(A + \ldots)}{M + \ldots,}$, qui est infinie avec x ; enfin, si $a < m$, la limite est zéro. On appelle cette opération *faire* x *infiniment grand*.

Il est facile de voir que le raisonnement ne porte que sur le 1er terme du numérateur et du dénominateur, en sorte qu'on aurait pu d'abord réduire la fraction à $\dfrac{Ax^a}{Ma^m}$; il en serait de même de toute autre fonction algébrique, ce qu'on démontrerait par un raisonnement analogue. Concluons donc que, *pour faire* x *infini dans une fonction, il faut n'y conserver que les termes où cette lettre porte les exposants les plus élevés ; au contraire, pour faire* x *infiniment petit, il faut supprimer tous les termes, excepté ceux qui ont les moindres puissances de* x.

C'est ainsi que, quand $x = \infty$, $\dfrac{a + \sqrt[3]{(x^3 + bx^2 + c)}}{m + (\sqrt{x^2} + n)}$ se réduit à $\dfrac{\sqrt[3]{x^3}}{\sqrt{x^2}} = 1$.

On peut donc mener dans l'espace une droite qui forme, avec les axes des x et des y, des angles donnés X et Y; mais Z est déterminé. C'est ce qui d'ailleurs est visible (*voy.* n° 677).

4° Prenons une longueur quelconque MN (fig. 33), sur une droite, qui fait dans l'espace les angles X, Y, Z avec les axes, et projetons-la sur les x et les y; les projections sont

$$BC = MN . \cos X, \quad \text{et} \quad MN . \cos Y.$$

Mais mn ou MP, est la projection de MN sur le plan xy, $mn = MN . \sin Z$; et projetant de nouveau mn sur les x et les y, ces projections sont $BC = mn . \cos\theta$ et $mn . \sin\theta$, θ étant l'angle que fait mn avec les x; donc nos projections sont $BC = MN . \sin Z . \cos\theta$, et $MN . \sin Z . \sin\theta$; égalant les valeurs des mêmes projections, il vient

$$\cos X = \sin Z . \cos\theta, \quad \cos Y = \sin Z . \sin\theta.$$

Au lieu de déterminer une direction dans l'espace, par les trois angles X, Y, Z qu'elle fait avec les axes, il suffit de donner l'angle qu'elle fait avec sa projection sur le plan zy (complément de l'angle Z), et l'angle θ de cette projection avec l'axe de x; et réciproquement.

En ajoutant les carrés de ces deux équ., on a

$$\cos^2 X + \cos^2 Y = \sin^2 Z = 1 - \cos^2 Z,$$

relation déjà trouvée (3°).

5° Mettant les valeurs de $\cos X$, X', Y.... dans $\cos A$, p. 282,

$$\cos A = \cos X \cos X' + \cos Y \cos Y' + \cos Z \cos Z';$$

l'angle des deux droites est exprimé en fonction des angles que chacune d'elles fait avec les trois axes.

6° Si les deux lignes sont perpendiculaires, $\cos A = 0$, et l'on a, pour l'équation qui exprime cette condition,

$$1 + aa' + bb' = 0,$$

ou $$\cos X \cos X' + \cos Y \cos Y' + \cos Z \cos Z' = 0.$$

674. *Trouver l'angle θ de deux plans.* Leurs équ. étant

$$z = Ax + By + C, \quad z = A'x + B'y + C',$$

si de l'origine on abaisse des perpend. sur ces plans, l'angle de ces lignes sera égal à celui des plans. Soient donc $x = az$, $y = bz$ les équ. d'une droite menée par l'origine ; pour qu'elle soit perpendiculaire au 1er plan, il faut qu'on ait (n° 668), $A + a = 0$, $B + b = 0$. Les équ. des perpend. sont donc

$$x + Az = 0, \quad y + Bz = 0 \ldots \quad x + A'z = 0, \quad y + B'z = 0.$$

Ainsi, le cosinus de l'angle de ces droites, et par conséquent celui des plans est

$$\cos\theta = \frac{1 + AA' + BB'}{\sqrt{(1 + A^2 + B^2)}\sqrt{(1 + A'^2 + B'^2)}}.$$

1° Si l'on fait prendre au 2e plan la situation de celui des xz, $y = 0$ est son équ. ; il faut donc faire $A' = C' = 0$, et $B' = \infty$, pour avoir l'angle T qu'un plan fait avec celui des xz. On a de même les angles U et V qu'il fait avec les yz et les xy. Donc

$$\cos T = \frac{B}{\sqrt{(1+A^2+B^2)}},$$

$$\cos U = \frac{A}{\sqrt{(1+A^2+B^2)}},$$

$$\cos V = \frac{1}{\sqrt{(1+A^2+B^2)}},$$

d'où $$\cos^2 T + \cos^2 U + \cos^2 V = 1,$$

et $$\cos\theta = \cos T\cos T' + \cos U\cos U' + \cos V\cos V',$$

pour le cosinus de l'angle de deux plans en fonction de ceux qu'ils forment respectivement avec les plans coordonnés.

2° Si les plans sont à angle droit

$$1 + AA' + BB' = 0,$$

ou $$\cos T\cos T' + \cos U\cos U' + \cos V\cos V' = 0.$$

675. *Trouver l'angle η d'une droite et d'un plan.* Soient

$$z = Ax + By + C \quad \text{et} \quad x = az + \alpha, \quad y = bz + \beta,$$

leurs équ. L'angle cherché est celui que la droite fait avec sa projection sur le plan (n° 272) ; si l'on abaisse d'un point de la droite une perpend. sur ce plan, l'angle de ces deux lignes sera donc

complément de η. De l'origine, menons une droite quelconque, $x = a'z$, $y = b'z$; pour qu'elle soit perpend. au plan, il faut (nº 668), qu'on ait $a' = -A$, $b' = -B$. L'angle qu'elle forme avec la ligne donnée a pour cosinus la valeur déterminée p. 281;

donc $$\sin \eta = \frac{1 - Aa - Bb}{\sqrt{(1 + a^2 + b^2)}\sqrt{(1 + A^2 + B^2)}}.$$

Il sera aisé d'en conclure que les angles que la droite fait avec les plans coordonnés des xz, yz et xy, ont pour sinus respectifs

$$\frac{b}{\sqrt{1 + a^2 + b^2)}}, \quad \frac{a}{\sqrt{(1 + a^2 + b^2)}}, \quad \frac{1}{\sqrt{(1 + a^2 + b^2)}};$$

ce qui s'accorde avec ce qu'on a vu (nº 673, 2º),

Transformation des coordonnées.

676. Pour transporter l'origine au point (α, β, γ), sans changer la direction des axes, qu'on suppose d'ailleurs quelconque, par un raisonnement semblable à celui du nº 382, on verra qu'il faut faire

$$x = x' + \alpha, \quad y = y' + \beta, \quad z = z' + \gamma.$$

Les axes primitifs x, y, z sont parallèles aux nouveaux x', y', z', quels que soient les angles qu'ils forment entre eux; on doit d'ailleurs attribuer aux coordonnées α, β, γ de la nouvelle origine les signes qui dépendent de sa position (nº 652). Si elle est située sur le plan xy, $\gamma = 0$; si elle est sur l'axe des z, α et β sont nuls, etc.

677. Pour changer la direction des axes, en conservant la même origine, imaginons trois nouveaux axes Ax', Ay', Az'; les 1ers axes seront ici supposés rectangulaires, et les nouveaux axes de direction donnée arbitraire. Prenons un point quelconque, puis menons les coordonnées x', y', z' de ce point, et projetons-les sur l'axe des x; l'abscisse x sera, comme nº 383, la somme de ces 3 projections. Désignons par (xx') l'angle $x'Ax$ formé par les axes des x et x', par $(y'y)$ l'angle $y'Ay$, etc., nous aurons

$$\left.\begin{aligned} x &= x' \cos(x'x) + y' \cos(y'x) + z' \cos(z'x) \\ y &= x' \cos(x'y) + y' \cos(y'y) + z' \cos(z'y) \\ z &= x' \cos(x'z) + y' \cos(y'z) + z' \cos(z'z) \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (A)$$

Ces deux dernières équ. se trouvent en projetant les x', y' et z' sur l'axe des y, et ensuite sur celui des z.

Telles sont les relations qui servent à changer la direction des axes. Comme $(x'x)$, $(x'y)$, $(x'z)$ sont les angles que forme la droite Ax' avec les axes rectangulaires des x, y, z, on a (n° 673, 3°)

$$\left.\begin{aligned} &\cos^2(x'x)+\cos^2(x'y)+\cos^2(x'z)=1 \\ \text{de même,}\quad &\cos^2(y'x)+\cos^2(y'y)+\cos^2(y'z)=1 \\ &\cos^2(z'x)+\cos^2(z'y)+\cos^2(z'z)=1 \end{aligned}\right\}\ldots(B)$$

Les angles que les nouveaux axes forment entre eux donnent (n° 673, 5°)

$$\cos(x'y')=S,\quad \cos(x'z')=T,\quad \cos(y'z')=U\ldots(C)$$

en faisant, pour abréger,

$$\begin{aligned} S &= \cos(x'x)\cos(y'x)+\cos(x'y)\cos(y'y)+\cos(x'z)\cos(y'z), \\ T &= \cos(x'x)\cos(z'x)+\cos(x'y)\cos(z'y)+\cos(x'z)\cos(z'z), \\ U &= \cos(y'x)\cos(z'x)+\cos(y'y)\cos(z'y)+\cos(y'z)\cos(z'z). \end{aligned}$$

Si les nouvelles coordonnées sont rectangulaires, on a

$$S=0,\quad T=0,\quad U=0.\ \ldots\ (D)$$

Les équ. (A), (B), (C), (D), contiennent les neuf angles que font les axes x', y', z', avec les x, y, z. On voit que lorsqu'on veut choisir un nouveau système de coordonnées, ces neuf angles ne forment que six arbitraires, parce que les équ. (B) en déterminent trois; et même, quand ce système est aussi rectangulaire, les équ. (D), qui expriment cette condition, ne laissent plus que trois arbitraires. L'axe des x' fait avec les x, y, z, trois angles, dont deux sont quelconques, et le 3e s'ensuit : l'axe des y' serait dans le même cas s'il ne devait pas être perpend. aux x'; mais cette condition ne laisse réellement qu'une arbitraire; ce qui fait 3 en tout, puisque ces données fixent la situation de l'axe des z', perpend. au plan $x'y'$.

678. Au lieu de déterminer la position des nouveaux axes rectangles, par les angles qu'ils forment avec les premiers, on peut prendre les données suivantes.

Un plan $CAy'x'$ (fig. 38) est incliné de θ sur xAy qu'il coupe selon AC; cette trace AC fait avec Ax l'angle $CAx=\psi$; dans le plan CAy', déterminé par θ et ψ, traçons les deux axes rectangles Ax',

Ay' : le 1er faisant avec la trace AC l'angle $CAx' = \varphi$. Les nouveaux axes sont ainsi fixés par les angles θ, ψ et φ, qui donnent l'inclinaison du plan $x'y'$ sur le plan xy, la direction de la trace AC et celle de Ax' dans ce plan $x'y'$ ainsi déterminé ; l'axe y', dans ce plan, fait l'angle $x'Ay'$ de 90° ; et l'axe z' est perpend. à ce même plan. Pour transformer les axes, il reste à exprimer les angles $(x'x)$, $(y'x)\ldots$, qui entrent dans les équ. A, en fonction des données θ, ψ et φ.

Les droites Ax, Ax' et AC forment un trièdre dont on connaît deux angles plans φ et ψ, ainsi que l'angle dièdre compris θ. Appliquons ici la formule (3, pag. 248) de la Trigonométrie sphérique ; faisons $c = (x'x)$, $C = \theta$, $a = \psi$, $b = \varphi$.

$$\cos(x'x) = \cos\psi\cos\varphi + \sin\psi\sin\varphi\cos\theta :$$

Il est clair que pour l'angle xAy', il suffit d'opérer de même sur le trièdre formé par AC et les axes x et y' : les angles plans sont $(y'x)$, $CAy' = 90° + \varphi$, $CAx = \psi$; on trouve donc $\cos(y'x)$. Prenons ensuite le trièdre $x'ACy$, dont les angles plans sont $(x'y)$, $CAy = 90° + \psi$, et $CAx' = \varphi$: et pour $(y'y)$, on prend le trièdre $y'ACy$, où $CAy' = 90° + \varphi$, et $CAy = 90° + \psi$; donc

$$\cos(y'x) = -\cos\psi\sin\varphi + \sin\psi\cos\varphi\cos\theta,$$
$$\cos(x'y) = -\sin\psi\cos\varphi + \cos\psi\sin\varphi\cos\theta,$$
$$\cos(y'y) = \sin\psi\sin\varphi + \cos\varphi\cos\psi\cos\theta.$$

Considérons le trièdre $z'AxC$; l'axe Az' fait avec AC un angle droit (n° 266), ainsi qu'avec le plan CAy' ; l'angle des plans xy et $z'AC$ est $90° + \theta$, en supposant le plan CAy' situé au-dessus de celui des xy. Faisons, dans l'équ. (3), p. 248,

$$c = (z'x), \quad C = 90° + \theta, \quad a = 90°, \quad b = \psi,$$

nous aurons $\qquad \cos(z'x) = -\sin\psi\sin\theta.$

De même, le trièdre $z'ACy$ donne

$$\cos(z'y) = -\cos\psi\sin\theta,$$

en augmentant ψ de 90°. Enfin, l'angle zAC étant aussi droit, et l'angle dièdre $zACx' = 90° - \theta$, le trièdre $zACx'$ donne

$$\cos(x'z) = \sin\varphi\sin\theta,$$
d'où $\qquad \cos(y'z) = \cos\varphi\sin\theta;$

enfin, $\qquad \cos(z'z) = \cos\theta.$

On a ainsi les valeurs des neuf coefficients des équations (A). Les équations de condition B et D sont satisfaites d'elles-mêmes par ces valeurs, ainsi qu'on peut s'en assurer.

Des intersections planes.

679. Lorsque l'intersection des deux surfaces est une courbe plane, il est plus commode, pour en connaître les propriétés, de la rapporter à des coordonnées prises dans ce plan DOC (fig. 39), déterminé par l'angle θ, qu'il forme avec le plan xy, et par l'angle ψ que fait avec Ox l'intersection OC de ces plans; nous prendrons cette ligne OC pour axe des x' : la perpend. OA, menée sur OC, dans le plan coupant DOC, sera l'axe des y'.

Comme il s'agit d'avoir en x', y', l'équ. de la courbe d'intersection des surfaces, il est clair qu'après avoir fait la transformation (A) pour rapporter l'une de ces surfaces aux axes x', y', z', il suffira de faire ensuite $z' = 0$, et l'on aura son intersection avec le plan $x'Oy'$. Il est préférable, dans un cas aussi simple, de faire $z' = 0$ dans les équ. (A), et de chercher directement les cosinus de $(x'x)$, $(y'x)$.... Dans le trièdre $AOCB$, on connaît les angles plans $a = \psi$, $b = 90^\circ$, et l'angle dièdre compris $C = \theta$: donc, l'équ. (3, p. 248) devient

$$\cos(y'x) = \sin\psi\cos\theta, \quad \cos(y'y) = -\cos\psi\cos\theta.$$

De plus,

$$(x'x) = \psi, \quad (x'y) = 90^\circ - \psi, \quad (x'z) = 90^\circ.$$

Enfin, le plan $x'Oy'$, qu'on suppose élevé au-dessus de celui des xy, fait avec l'axe Oz l'angle $(y'z) = 90^\circ - \theta$. Ainsi, les équations ($A$) donnent

$$\left.\begin{aligned} x &= x'\cos\psi + y'\sin\psi\cos\theta \\ y &= x'\sin\psi - y'\cos\psi\cos\theta \\ z &= y'\sin\theta \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (E)$$

On serait aussi parvenu à ces résultats, en se servant des équ. du nº 678.

680. Appliquons ces équ. au cône oblique dont la base est un cercle. Le plan zAx (fig. 36) perpend. au plan coupant AB, et mené par l'axe SC, sera celui des xz; la section AB de ces deux plans, ou

l'axe de la courbe, coupe celle-ci au *sommet* A, qui sera pris pour origine des coordonnées : le plan xAy, parallèle à la base circulaire du cône, sera celui des xy; il coupe le cône selon un cercle AE, de rayon r, qu'on peut regarder comme la *directrice* même (n° 661) ; ainsi, notre cône, dont le sommet a pour coordonnées a, 0, c, dont l'axe est dans le plan xz, et la base, sur le plan xy, a pour équ. $c^2(x^2+y^2)+2c(r-a)\,xz\ldots\ldots=0$, comme p. 275 ; le plan coupant AB étant perpend. aux xz, coupe le plan xy selon l'axe Ay, et il faut poser $\psi=90°$ dans les équ. (E) ; d'où

$$x=y'\cos\theta,\quad y=x',\quad z=y'\sin\theta.\quad .\quad .\quad .\ (1)$$

$$y'^2\,[c^2\cos^2\theta+2c\,(r-a)\sin\theta\cos\theta+(a^2-2ar\sin^2\theta]$$
$$+\,c^2x'^2+2cry'\,(a\sin\theta-c\cos\theta)=0.\quad .\quad .\quad .\ (2)$$

Telle est l'équ. de la courbe, qui peut d'ailleurs représenter toutes les sections du cône oblique (excepté les parallèles à la base), en faisant varier a, c, r et θ; les x' sont comptées sur Ay, les y' sur AB. Il est aisé de discuter cette équ. (n° 450), et de reconnaître que les courbes sont de même espèce que pour le cône droit.

Si l'on veut que la section soit un cercle, les coefficients de x'^2 et y'^2 seront égaux (n° 446) ; d'où

$$(c^2+2ar-a^2)\,\text{tang}^2\,\theta=2c\,(r-a)\,\text{tang}\,\theta.$$

tang $\theta=0$ reproduit la base AE du cône. Quant à l'autre valeur de tang θ, pour l'interpréter, nous avons

$$\text{tang}\,SAD=\frac{SD}{AD}=\frac{c}{a},\quad \text{tang}\,SAB=\frac{c-a\,\text{tang}\,\theta}{a+c\,\text{tang}\,\theta}.$$

En mettant pour tang θ notre 2ᵉ racine, il vient, toute réduction faite,

$$\text{tang}\,SAB=\frac{c^3+a^2c}{2a^2r-a^3+2c^2r-ac^2}=\frac{c}{2r-a}=-\frac{SD}{DE}.$$

ou
$$\text{tang}\,SAB=-\,\text{tang}\,SED=\text{tang}\,SEA.$$

La section est donc encore un cercle, quand les angles SAB', SEA, formés avec les génératrices opposées, sont égaux. Le plan coupant yAB étant comparé au cercle AE de la base, c'est ce qu'on appelle des *sections sous-contraires.*

Pour obtenir les sections planes du cône droit, il suffit de poser $a = r$ dans l'équation (2),

$$y'^2 (c^2 \cos^2 \theta - r^2 \sin^2 \theta) + c^2 x'^2 + 2cry' (r \sin \theta - c \cos \theta) = 0;$$

cette équ. revient à celle du n° 400. Du reste, on ne peut plus rendre égaux, de deux manières, les facteurs de x'^2 et y'^2; et, en effet, les sections sous-contraires coïncident alors.

681. Le cylindre oblique, dont la base est un cercle situé comme pour le cône ci-dessus, et dont l'axe est dans le plan xz, a pour équ. (p. 275)

$$y^2 + (x - az)^2 = 2r(x - az).$$

En y introduisant les valeurs (1), le plan coupant étant perpend. aux xz, on a

$$y'^2 (\cos^2 \theta + a^2 \sin^2 \theta - 2a \sin \theta \cos \theta) + x'^2 = 2ry' (\cos \theta - a \sin \theta).$$

La section est une ellipse qui se réduit au cercle quand $\sin \theta = 0$,

$$(a^2 - 1) \operatorname{tang} \theta = 2a, \quad \text{ou} \quad \operatorname{tang} \theta = - \operatorname{tang} 2\alpha;$$

(équ. L, 359), α étant l'angle que l'axe du cylindre fait avec les z : donc θ est le supplément de 2α.

Surfaces du second ordre.

682. L'équation générale du 2e degré est

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dxy + 2exz + 2fyz + gx + hy + iz = k. \ldots (1)$$

Pour *discuter* cette équ., c'est-à-dire déterminer la nature et la position des surfaces qu'elle représente, simplifions-la par une transformation de coordonnées qui chasse les termes en xy, xz et yz; les axes, de rectangulaires qu'ils sont, seront rendus obliques, en substituant les valeurs (A), p. 286; et les neuf angles qui y entrent étant assujettis aux conditions (B), il y a six arbitraires dont on peut disposer d'une infinité de manières. Égalons à zéro les coefficients des termes en $x'y'$, $x'z'$ et $y'z'$. Mais si l'on veut que la direction des nouveaux axes soit aussi rectangulaire, comme cette condition est exprimée par les trois relations (D), les six arbitraires

sont réduites à trois, que nos trois coefficients, égalés à zéro, suffisent pour faire connaître, et le problème devient déterminé.

Ce calcul sera rendu plus facile par le procédé suivant. Soient $x=\alpha z$, $y=\beta z$ les équ. de l'axe des x'; en faisant, pour abréger, $l=\dfrac{1}{\sqrt{(1+\alpha^2+\beta^2)}}$, on trouve (*voy.* p. 283)

$$\cos(x'x)=l\alpha,\quad \cos(x'y)=l\beta,\quad \cos(x'z)=l.$$

En raisonnant de même pour les équ. $x=\alpha' z$, $y=\beta' z$ de l'axe des y', et enfin, pour l'axe des z', on a

$$\cos(y'x)=l'\alpha',\quad \cos(y'y)=l'\beta',\quad \cos(y'z)=l',$$
$$\cos(z'x)=l''\alpha'',\quad \cos(z'y)=l''\beta'',\quad \cos(z'z)=l''.$$

Les équ. (A) de la transformation deviennent

$$x=l\alpha x'+l'\alpha' y'+l''\alpha'' z',$$
$$y=l\beta x'+l'\beta' y'+l''\beta'' z',$$
$$z=lx'+l'y'+l''z'.$$

Les neuf angles du problème sont remplacés par les six inconnues α, α', α'', β, β', β'', attendu que les équ. (B) se trouvent satisfaites d'elles-mêmes.

Substituons donc ces valeurs de x, y, z dans l'équ. générale du 2e degré, et égalons à zéro les coefficients de $x'y'$, $x'z'$ et $y'z'$:

$$(a\alpha+d\beta+e)\alpha'+(d\alpha+b\beta+f)\beta'+e\alpha+f\beta+c=0\ldots.\ x'y',$$
$$(a\alpha+d\beta+e)\alpha''+(d\alpha+b\beta+f)\beta''+e\alpha+f\beta+c=0\ldots.\ x'z',$$
$$(a\alpha''+d\beta''+e)\alpha'+(d\alpha''+b\beta''+f)\beta'+e\alpha''+f\beta''+c=0\ldots.\ y'z'.$$

L'une de ces équ. peut s'obtenir seule, et sans faire la substitution en entier; de plus, d'après la symétrie du calcul, il suffit de trouver une de ces équ. pour en déduire les deux autres. Éliminons α' et β' entre la 1re et les équ. $x=\alpha' z$, $y=\beta' z$ de l'axe des y'; il viendra cette équ., qui *est celle d'un plan*.

$$(a\alpha+d\beta+e)x+(d\alpha+b\beta+f)y+(e\alpha+f\beta+c)z=0\ldots.\ (2)$$

Or, la 1re équ. est la condition qui chasse le terme $x'y'$: en tant qu'on n'a égard qu'à elle, on peut prendre α, β, α', β' à volonté, pourvu qu'elle soit satisfaite : il suffira donc que l'axe des y' soit

tracé dans le plan dont nous venons de donner l'équ., pour que la transformée n'ait pas de terme en $x'y'$.

De même, en éliminant α'' et β'' de la 2e équ., à l'aide des équ. de l'axe des z', $x = \alpha''z$, $y = \beta''z$, on aura un plan tel, que si l'on prend pour axe des z' toute droite qu'on y tracerait, la transformée sera privée du terme en $x'z'$. Mais, d'après la forme des deux 1res équ., il est clair que ce second plan est le même que le premier : donc, si l'on y trace les axes des y' et z' à volonté, *ce plan sera celui des* y' *et* z', et la transformée n'aura pas de termes en $x'y'$ et $x'z'$. La direction de ces axes, dans ce plan, étant quelconque, on a une infinité de systèmes qui atteignent ce but; l'équ. (2) sera, comme on voit, celle d'un plan parallèle à celui qui coupe par moitié toutes les parallèles aux x, et qu'on nomme *Plan diamétral*. Si, en outre, on veut que le terme en $y'z'$ disparaisse, la 3e équ. devra faire connaître α' et β'; et l'on voit qu'il y a une infinité d'axes obliques qui remplissent les trois conditions imposées.

683. Mais admettons que les x', y' et z' soient rectangulaires; l'axe des x' devra être perpend. au plan des y' z' dont nous avons trouvé l'équ.; et pour que $x = \alpha z$, $y = \beta z$ soient les équ. d'une perpend. à ce plan (2), il faut que (n° 668)

$$a\alpha + d\beta + e = (e\alpha + f\beta + c)\,\alpha \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$
$$d\alpha + b\beta + f = (e\alpha + f\beta + c)\,\beta \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Substituant dans (3) la valeur de α tirée de (4), on trouve

$$\begin{aligned}&[(a-b)fe + (f^2-e^2)\,d]\,\beta^3,\\ &+[(a-b)(c-b)\,e + (2d^2-f^2-e^2)\,e + (2c-a-b)\,fd]\,\beta^2,\\ &+[(c-a)(c-b)\,d + (2e^2-f^2-d^2)\,d + (2b-a-c)\,fe]\,\beta,\\ &+\ (a-c)\,(fd + (f^2-d^2)\,e = 0.\end{aligned}$$

Cette équ. du 3e degré donne pour β au moins une racine réelle; l'équ.(4) en donne ensuite une pour α; ainsi l'axe des x' est déterminé de manière à être perpend. au plan $y'z'$, et à priver l'équ. des termes en $x'z'$ et $x'y'$. Il reste à tracer dans ce plan $y'z'$, les axes à angle droit, et tels que le terme $y'z'$ disparaisse ; mais il est évident qu'on trouvera de même un plan des $x'z'$, tel que l'axe des y' lui soit perpend., et que les termes $x'y'$, $z'y'$ soient chassés. Or, il arrive que les conditions qui expriment que l'axe des y' est perpend. à ce plan, sont encore les équ. (3) et (4), en sorte que la même

équ. du 3ᵉ degré doit encore donner β'. Il en est de même pour l'axe des z'. Donc les trois racines de l'équ. en β sont réelles, et sont les valeurs de β, β', et β''; par suite α, α' et α'' sont données par l'équ. (4).

Il n'y a donc qu'un système d'axes rectangulaires qui délivre l'équ. des termes en $x'y'$, $x'z'$, $y'z'$, *et il en existe un dans tous les cas; notre calcul enseigne à trouver ces axes.*

Ce système prend le nom d'*Axes principaux de la surface.*

684. Analysons les cas que peut offrir l'équ. du 3ᵉ degré en β.

1° Si l'on a $\quad (a-b)\,fe + (f^2 - e^2)\,d = 0,$

l'équ. est privée du 1ᵉʳ terme : on sait qu'alors une des racines de β est infinie, aussi bien que α, qui, d'après l'équ. (4), se réduit à $e\alpha + f\beta = 0$; les angles correspondants sont droits : l'un des axes, celui des z', par ex., se trouve dans le plan xy, et l'on obtient son équ. en éliminant α et β à l'aide de $x = \alpha z$, $y = \beta z$; cette équ. est $ex + fy = 0$. Les directions des y' et z' sont données par notre équ. en β, réduite au 2ᵉ degré.

2° Si, outre ce 1ᵉʳ coefficient, le 2ᵉ est aussi $= 0$, tirant b de l'équ. ci-dessus, pour substituer dans le facteur de β^2, il se réduit au dernier terme de l'équ. en β :

$$(a - c)\,fd + (f^2 - d^2)\,e = 0.$$

Ces deux équ. expriment la condition dont il s'agit. Or, le coefficient de β se déduit de celui de β^2, en changeant b en c, et d en e, et il en est de même pour le 1ᵉʳ et le dernier terme de l'équ. en β : donc l'équ. du 3ᵉ degré est satisfaite d'elle-même. Il existe alors une infinité de systèmes d'axes rectangulaires, qui chassent les termes en $x'y'$, $x'z'$ et $y'z'$. Éliminant a et b des équ. (3) et (4), à l'aide des deux équ. de condition ci-dessus, on trouve qu'elles sont le produit de $f\alpha - d$, et $e\beta - d$ par le facteur commun $ed\alpha + fd\beta + fe$. Ces facteurs sont donc nuls; et éliminant α et β, on trouve

$$fx = dz, \quad ey = dz, \quad edx + fdy + fez = 0.$$

Les deux 1ʳᵉˢ sont les équ. de l'un des axes; la 3ᵉ, celle d'un plan qui lui est perp., et dans lequel sont tracés les deux autres axes sous des directions arbitraires. Ce plan coupera la surface selon une courbe où tous les axes à angle droit sont principaux, qui est par conséquent un cercle, seule des courbes du 2ᵉ degré qui jouisse de

cette propriété. La surface est alors de révolution autour de l'axe dont nous venons de donner les équ.; c'est ce qu'on reconnaît bientôt en transportant l'origine au centre du cercle (voy. *Annales de Math.*, t. II).

685. L'équ., une fois degagée des trois rectangles, est telle que

$$kz^2 + my^2 + nx^2 + qx + q'y + q''z = h. \quad . \quad . \quad (5)$$

Chassons les termes de première dimension, en transportant l'origine (n° 676) : il est clair que ce calcul sera possible, excepté si l'équ. manque de l'un des carrés x^2, y^2, z^2 : nous examinerons ces cas à part; il s'agit d'abord de discuter l'équ.

$$kz^2 + my^2 + nx^2 = h \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

Toute droite passant par l'origine, coupe la surface en deux points, à égales distances des deux parts, puisque l'équ. reste la même après avoir changé les signes de x, y et z : l'origine étant au milieu de toutes les cordes menées par ce point, est un *Centre; la surface jouit donc de la propriété d'avoir un centre, toutes les fois que la transformée ne manque d'aucun des carrés des variables.*

Nous prendrons toujours n positif : il reste à examiner les cas où k et m sont positifs, ou négatifs, ou de signes différents.

686. Si, dans l'équ. (6), k, m et n sont positifs, il faut que h le soit aussi, sans quoi l'équ. serait *absurde et ne représenterait rien;* et si h est nul, on a $x = 0$, $y = 0$ et $z = 0$ à la fois (n° 112), et la surface n'est qu'*un seul point.*

Mais quand h est positif, en faisant séparément x, y ou z nul, on trouve des équ. à l'ellipse, courbes qui résultent de la section de notre surface par les trois plans coordonnés. Tout plan parallèle à ceux-ci donne aussi des ellipses, et il serait aisé de voir qu'il en est de même de toutes les sections planes (n° 679) : c'est pour cela que ce corps a le nom d'*Ellipsoïde*. Les longueurs A, B, C des trois *axes principaux* s'obtiennent en cherchant les sections de la surface par les axes des x, y et z, savoir, $kC^2 = h$, $mB^2 = h$, $nA^2 = h$; éliminant k, m et n de l'équ. (6),

$$\frac{z^2}{C^2} + \frac{y^2}{B^2} + \frac{x^2}{A^2} = 1, \quad A^2B^2z^2 + A^2C^2y^2 + B^2C^2x^2 = A^2B^2C^2;$$

telle est l'équ. de *l'ellipsoïde rapporté à son centre et à ses trois axes principaux.* On peut concevoir cette surface engendrée par une

ellipse tracée dans le plan xy, mobile parallèlement à elle-même, pendant que ses deux axes varient, cette courbe glissant le long d'une autre ellipse tracée dans le plan xz. Si deux des quantités A, B, C sont égales, on a un ellipsoïde de révolution; si $A = B = C$, on a une sphère.

687. Supposons k négatif, m et h positifs, ou

$$kz^2 - my^2 - nx^2 = -h.$$

En posant x ou y nul, on reconnaît que les sections par les plans de yz et xz sont des hyperboles, dont l'axe des z est le 2e axe : les plans menés par l'axe des z donnent cette même courbe ; on dit que la surface est un *hyperboloïde*. Les sections parallèles au plan de xy sont toujours des ellipses réelles, où A, B, $C\sqrt{-1}$ désignant les longueurs comprises sur les axes, à partir de l'origine; l'équ. est la même que ci-dessus, au signe près du 1er terme, qui devient ici négatif.

688. Enfin, quand k et h sont négatifs,

$$-kz^2 + my^2 + nx^2 = -h,$$

tous les plans qui sont menés par l'axe des z coupent la surface selon des hyperboles, dont l'axe des z est le premier axe; le plan xy ne rencontre pas la surface, et ses parallèles, au delà de deux limites opposées, donnent des ellipses. On a un *hyperboloïde à deux nappes* autour de l'axe des z. L'équ. en A, B, C est encore la même que ci-dessus, excepté que le terme en z^2 est seul positif.

689. Lorsque $h = 0$, on a, dans ces deux cas, $kz^2 = my^2 + nx^2$, *équ. d'un cône*, qui est à nos hyperboloïdes ce que les asymptotes étaient à l'hyperbole (*voy.* p. 275).

Il resterait à traiter le cas de k et m négatifs; mais il se réduit à une simple inversion dans les axes, pour le ramener aux deux précédents. L'hyperboloïde est à une ou deux nappes autour de l'axe des x, selon que h est négatif ou positif.

690. Quand l'équ. (5) est privée de l'un des carrés, de x^2 par ex., en transportant l'origine, on peut dégager cette équ. du terme constant, et des 1res puissances de y et z, savoir,

$$kz^2 + my^2 = hx.$$

Les sections par les plans des xz et xy sont des paraboles tournées

dans un sens, ou dans le sens opposé, selon les signes de k, m et h; les plans parallèles à ceux-ci donnent aussi des paraboles. Les plans parallèles aux yz donnent des ellipses, ou des hyperboles, selon le signe de m. La surface est *un paraboloïde elliptique* dans un cas, *hyperbolique* dans l'autre ; $k = m$ lorsque le paraboloïde est de révolution.

691. Quand $h = 0$, l'équ. a la forme $a^2z^2 \pm b^2y^2 = 0$, selon les signes de k et m. Dans un cas, on a $z = 0$ et $y = 0$, quel que soit x; la surface se réduit à l'axe des x : dans l'autre,

$$(az + by) \cdot (az - by) = 0$$

indique qu'on peut rendre à volonté chaque facteur nul : ainsi, l'on a le système de deux plans qui se croisent selon l'axe des x.

692. Lorsque l'équ. (5) est privée de deux carrés, par ex., de x^2 et y^2, en transportant l'origine parallèlement aux z, on réduira l'équ. à

$$kz^2 + py + qx = h.$$

Les sections par les plans menés selon l'axe des z sont des paraboles. Le plan xy et ses parallèles donnent des droites qui sont parallèles entre elles. La surface est donc un *cylindre à base parabolique* (n° 660).

Si les trois carrés manquaient dans l'équ. (5), elle serait celle d'un plan.

693. Il est bien aisé de reconnaître le cas où la proposée (1) est décomposable en deux facteurs rationnels ; ceux où elle est formée de carrés positifs, qui se résolvent en deux équ., représentant la section de deux plans ; enfin ceux où, étant formée de trois parties essentiellement positives, elle est absurde. Tout ceci est analogue à ce qu'on a dit nos 453 et 459.

LIVRE SEPTIÈME.

CALCUL DIFFÉRENTIEL ET INTÉGRAL.

CHAPITRE Ier.

RÈGLES GÉNÉRALES DE LA DIFFÉRENTIATION.

Définitions, Théorème de Taylor.

694. Plus une branche de connaissances embrasse d'objets et reçoit d'applications diverses, et plus il est difficile d'en donner une définition exacte qui permette d'en concevoir toute l'étendue, et comprenne tous les sujets que l'on peut y rattacher. Cette partie de la haute analyse, qu'on nomme *Calcul différentiel,* s'applique à des questions si variées, que nous n'en pouvons exposer la nature sans faire d'abord quelques observations préliminaires.

Étant donnée une équ. $y = f(x)$ entre deux variables x et y, qu'on peut regarder comme représentée par une courbe plane BMM' (fig. 40) rapportée à deux axes coordonnés rectangulaires Ax, Ay, on comprend que si l'on attribue à l'abscisse x une suite de valeurs quelconques, d'où l'on tirera celles des ordonnées correspondantes y, on aura une série de points M, M' de la courbe; mais que ces points seront séparés les uns des autres par un certain intervalle, quelque voisines qu'on suppose les valeurs de x. Ainsi, dans cet état l'équation $y = fx$ n'exprime pas qu'il y ait *continuité* entre les points. Cette remarque peut être faite pour toute équ. entre 3, 4.... variables. Voyons si l'analyse ne peut pas fournir quelque artifice propre à manifester la continuité dans les fonctions.

Prenons pour exemple l'équation $y = ax^3 + bx^2 + c$. Si, après avoir considéré le point M, qui a pour coordonnées x et y, nous voulons prendre un autre point M' pour le comparer au 1er, en nommant $x + h$ et $y + k$ ses coordonnées AP', $P'M'$, on aura

$y + k = a(x+h)^3 + b(x+h)^2 + c$, et développant,

$$y + k = (ax^3 + bx^2 + c) + (3ax^2 + 2bx)h + (3ax + b)h^2 + ah^3.$$

Or, *le coefficient de la* 1re *puissance de* h, savoir $3ax^2 + 2bx$, est déduit de la fonction proposée, en porte l'empreinte, et ne convient qu'à elle ; de plus ce coefficient est indépendant de h, qui est la distance PP' des extrémités des deux abscisses, et qui, par suite, mesure l'intervalle des deux points de la courbe : donc ce coefficient est composé de manière à exprimer qu'on considère deux points de la courbe aussi rapprochés qu'on veut, et par conséquent que la fonction est continue. Les coefficients de h^2, h^3 participent à cette propriété. De là on tire que toutes les fois qu'une question proposée, de quelque nature qu'elle soit, reposera sur la notion de *continuité*, les coefficients des puissances de h dans le développement de cette fonction, où x est remplacé par $x + h$, convenablement combinés et analysés, pourront résoudre le problème.

Raisonnons de même sur le cas général $y = f(x)$: le signe f représente ici une *fonction* quelconque de x. Si l'on remplace x par $x + h$, et y par $y + k$, on aura l'équ. $y + k = f(x+h)$: il s'agit maintenant de développer $f(x+h)$ de manière à mettre en évidence les termes affectés des différentes puissances de h. Ce calcul sera soumis à la nature de la fonction f, et nous verrons bientôt comment on peut l'effectuer pour chaque forme de f : contentons-nous de faire remarquer ici que si l'on prend $h = 0$, ce qui suppose $k = 0$, et fait coïncider le 2e point avec le 1er, tous les termes où h est facteur devront disparaître dans le développement dont il s'agit de $f(x+h)$, en sorte qu'il ne restera que le seul 1er terme, qui par conséquent doit être $f(x)$, ou y. On voit aussi que h ne peut être affecté d'aucun exposant négatif, car s'il existait dans $f(x + h)$ un terme tel que Mh^{-m}, lequel équivaut à $\frac{M}{h^m}$, en faisant h nul, ce terme devenant infini, on ne retrouverait plus $f(x)$. Il suit de là que $f(x + h)$ *doit se développer de cette manière* $f(x + h) = fx +$ *une suite de termes dont* h *est facteur à différentes puissances positives.*

695. Mais on peut voir qu'en général

$$f(x + h) = f(x) + y'h + \alpha h, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

savoir, outre le terme fx, dont on vient de prouver l'existence, 1° un terme $y'h$ contenant la 1re puissance de h multipliée par une

fonction de x seul, que nous désignons par y', et 2° un ensemble d'autres termes où h entre à des puissances supérieures à la 1re, et que nous désignons par αh ; α étant fonction de x et de h, et admettant encore le facteur h à quelque puissance positive.

Pour prouver cette proposition, qui sert de base à tout le calcul différentiel, menons une tangente TH au point M (x,y) de la courbe BMM' dont l'éq. est $y = fx$. On sait que cette droite s'obtient en menant par ce point M une ligne quelconque SMM', appelée *sécante,* et la faisant tourner autour du point M jusqu'à ce que les points M et M' de section coïncident ensemble. Faisons par analyse cette opération géométrique. En changeant x en $x + h$, et y en $y + k$, pour considérer un second point M' de la courbe, nous aurons $y + k = f(x + h)$ pour l'ordonnée $P'M'$; on a

$$MQ = h,\quad P'M' = f(x + h),\quad M'Q = k,$$

ou
$$k = P'M' - PM = f(x + h) - f(x);$$

d'où le triangle rectangle $MM'Q$ donne

$$\text{tang } M'MQ = \frac{M'Q}{MQ} = \frac{k}{h} = \frac{f(x + h) - f(x)}{h}.$$

Pour en déduire la direction de la tangente cherchée TM, il faut, dans cette expression, faire h nul, afin d'exprimer que M' se rapproche de M jusqu'à coïncidence. La valeur de tang HMQ est donc ce que devient le dernier membre ci-dessus, lorsqu'on y pose $h = 0$. Et puisque la direction cherchée de la tangente dépend du point M, il est clair qu'on doit trouver une fonction de x pour résultat; nommons-la y'.

De là résulte que la valeur de ce dernier membre doit être formée de deux parties : 1° du terme y', qui est indépendant de h ; 2° d'autres termes dont h est facteur à diverses puissances positives, et qui disparaissent lorsqu'on pose $h = 0$. Désignons ces termes ensemble par α, qui est une fonction de x et de h, et nous aurons

$$\frac{f(x + h) - f(x)}{h} = y' + \alpha, \quad \ldots \ldots \quad (2)$$

équation qui revient à celle ci-dessus (1), en chassant le dénominateur h et transposant $f(x)$. Pour que ce raisonnement ne fût pas exact, il faudrait que le point (x,y) que nous avons pris sur la courbe

n'eût aucune tangente, ce qui ne saurait arriver que dans certains cas spéciaux, où en effet le calcul différentiel présente des résultats obscurs : mais tant qu'on se tient dans des généralités qui laissent x quelconque, on est assuré que l'équation (1) est toujours vraie.

696. Quelle que soit la forme de la fonction f, on est donc certain que l'expression $f(x+h)$ est susceptible, par des calculs convenables, d'être développée en plusieurs termes, dont le 1er est la fonction proposée $f(x)$; le 2e un terme $y'h$ qui ne renferme h qu'à la 1re puissance et est facteur d'une fonction de x; enfin d'autres termes compris dans la forme αh, qui tous contiennent le facteur h à quelque puissance plus élevée que *un*, c'est-à-dire $h=0$ donnant $\alpha=0$.

Le second terme $y'h$ a pour coefficient y' une fonction de x, qui est essentiellement résultante de la proposée y, ou fx; et de plus, comme elle est indépendante de h, elle est propre à exprimer que la fonction f est continue, puisqu'elle provient de ce qu'on considère à la fois deux points d'une courbe aussi voisins qu'on veut. Ce facteur y' de la 1re puissance de h est ce qu'on appelle *la dérivée* ou *le coefficient différentiel* de la fonction y : on l'exprime aussi par $f'(x)$ (*voy*. p. 68).

La fonction α est elle-même susceptible, comme on va bientôt le dire, de se développer en plusieurs termes, procédant selon les puissances de h, et dont chaque coefficient peut, aussi bien que y', exprimer la continuité dans y : mais comme on verra que ces coefficients dépendent de y', cette remarque n'affaiblit en rien notre conséquence; seulement, selon les problèmes, on peut être conduit à préférer tel ou tel de ces coefficients pour cet objet.

697. On voit, dans l'équation (2), que plus h décroît, et plus α devient petit, jusqu'à être nul quand h devient zéro : on en tire cette conséquence, qui donne même souvent un excellent procédé de calcul pour déduire la fonction $f'(x)$ de $f(x)$, que la dérivée y' d'une fonction y est ce que devient le 1er membre de l'équation (2) lorsqu'on rend h nul ; c'est-à-dire que *la dérivée* y', *ou le coefficient différentiel d'une fonction* y, *est la limite du rapport de l'accroissement de cette fonction* y *à celui de la variable* x ; en effet, le numérateur $f(x+h)-f(x)$ est l'excès de la fonction variée sur la fonction primitive, et le dénominateur est l'accroissement h attribué à x (*voy*. ce qu'on a dit n° 113 sur les *limites*).

698. L'origine du mot *différentiel* est utile à connaître. Puisque,

dans l'équation (2), le terme α est aussi petit qu'on veut avec h, tandis que y', qui est indépendant de h, reste constant, il est clair que plus h sera petit, plus le 2e membre approchera de se réduire à y'; ainsi la différence $f(x+h)-f(x)$ se réduit à $y'h$, pour des valeurs de h très-petites; et comme $y'h$ est la différence entre la fonction variée et la fonction primitive, on a appelé $y'h$ une petite différence, ou une *différentielle*. Et même Leibnitz, inventeur de ce calcul, ayant désigné par le signe d un accroissement infiniment petit attribué à une variable, dy et dx ont été des symboles destinés à remplacer les lettres k et h ci-dessus, et l'on a eu $y'dx$ (au lieu de $y'h$) pour la différentielle de y, savoir $dy = y'dx$. Cette notation est reçue dans le genre de calcul dont nous exposons les principes. *La dérivée* ou *le coefficient différentiel de la fonction* $\mathrm{y}=\mathrm{f}(\mathrm{x})$, *est* y', *ou* $\mathrm{f}'(\mathrm{x})$, *ou* $\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}}$; *c'est le coefficient du* 2e *terme, ou de la* 1re *puissance de* h *dans le développement de la fonction variée* $\mathrm{f}(\mathrm{x}+\mathrm{h})$; ou *la limite du rapport de l'accroissement de la fonction* $\mathrm{f}(\mathrm{x})$ *à celui de la variable* x; ou enfin *le coefficient de la différence infiniment petite* $\mathrm{dy} = \mathrm{y}'\mathrm{dx}$, *qu'on trouve lorsque* x *croît de* dx.

En attachant au mot *dérivée* l'acception précédente, nous pouvons définir le calcul différentiel, *une branche de haute analyse, dans laquelle on recherche les dérivées de toutes les fonctions proposées, on assigne leurs propriétés particulières, et l'on applique ces dérivées aux problèmes dans lesquels la continuité des fonctions est une des conditions essentielles.*

Regardons l'expression y' comme connue, lorsque fx est donné; puisque y' est une fonction de x, elle est susceptible de varier, et d'avoir à son tour une dérivée, que nous désignerons par y''; de même, la dérivée de y'' sera y''', celle de y''' sera y^{IV}. . . . On conçoit donc ce qu'on entend par *les dérivées de premier, de second, de troisième ordre*. . . .

699. Nous ne savons pas encore comment x et h entrent dans α (équ. 2); voyons à développer cette fonction. Représentons $y'+\alpha$ par P; cette équ. deviendra

$$f(x+h) = fx + Ph = y + Ph \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Posons $x+h=z$, d'où $h=z-x$, $fz = y + P(z-x)$.

Or P, qui était fonction de x et de h, l'est actuellement de x et

z; ces variables sont indépendantes, puisque leur diff. h est arbitraire. On peut donc regarder z comme un nombre constant donné, et faire varier x seul (avec y et P qui contiennent x). Changeons donc x en $x + i$ dans la dernière équ. 1° fz ne changera pas; 2° y deviendra $y + y'i + \beta i$; 3° $P(z - x)$ se changera en $(P + P'i + \gamma i)(z - x - i)$. Ne conservons dans toute l'équ. que les coefficients des termes où i est au 1[er] degré, savoir,

$$0 = y'i - Pi + P'i\,(z - x) + \ldots,$$

d'où
$$P = y' + P'(z - x) + \ldots \ldots \quad (4)$$

Traitons cette équ. comme la précédente. Le changement de x en $x + i$ donne $P' = y'' - P' + P''(z - x) \ldots$, d'où

$$2P' = y'' + P''(z - x); \ldots \ldots \quad (5)$$

de même,
$$3P'' = y''' + P'''(z - x) \ldots$$
$$4P''' = y^{\text{IV}} + P^{\text{IV}}(z - x) \ldots$$

Éliminons $P, P', P'', \ldots$ des équ. (3), (4), (5).... puis rétablissons h au lieu de $z - x$, et nous aurons

$$f(x + h) = y + y'h + \frac{y''h^2}{2} + \frac{y'''h^3}{2.3} + \frac{y^{\text{IV}}h^4}{2.3.4} + \ldots \quad (A)$$

c'est la formule appelée *Théorème de Taylor*, du nom du célèbre géomètre qui l'a découverte.

Par le théorème (1), toute fonction fx était décomposée en $y + y'h + \alpha h$, la 3e partie αh renfermant tous les termes où h a une puissance supérieure à la première : maintenant nous connaissons la composition de ces derniers termes.

Tout cela est conforme à ce qu'on a exposé n° 527; mais ici fx, qui désignait alors un polynôme rationnel et entier, représente une fonction quelconque de x.

Il est donc démontré que lorsqu'on attribue à x un accroissement h dans une fonction quelconque fx, la série (A), développement de $f(x + h)$, *n'a que des puissances entières et positives de* h, du moins quand x conserve une valeur indéterminée (n° 695). Cette série (A) sert à trouver ce développement, toutes les fois qu'on sait tirer de fx les dérivées successives $f'x, f''x\ldots$, ou $y', y''\ldots$

Par ex., soit $y = x^m$, on en tire $y' = mx^{m-1}$, puisque tel est le coefficient de h^1 dans le développement de $(x + h)^m$. De même,

$y'' = m(m-1)x^{m-2}$, $y''' = m(m-1)(m-2)x^{m-3}$, etc. Donc en substituant dans l'équ. (A), $f(x+h)$ devient $(x+h^m)$, et l'on retrouve la série de Newton (p. 11). Il suffit donc de savoir que le 2ᵉ terme de $(x+h)^m$ est $mx^{m-1}h$, pour en avoir le développement total, quel que soit l'exposant m.

Nous avons appris, page 213 et suiv., à développer diverses fonctions en séries : comme la recherche de ces expressions est une application simple des principes du calcul des dérivations, nous les tirerons de la formule de Taylor, en suivant les règles de ce calcul : nous ne ferons donc aucun usage de ces séries avant de les avoir démontrées de nouveau.

Règles de la différentiation des Fonctions algébriques.

700. La manière dont la dérivée y' est composée en x, dépend de la fonction primitive y, et en porte l'empreinte. Il faut, pour chaque fonction proposée, savoir former cette dérivée : c'est ce qu'on obtient par deux procédés. Le 1ᵉʳ résulte de la définition même, exprimée par l'équ. (1).

On changera x *en* x + h *dans la fonction proposée* fx, *et l'on exécutera les calculs nécessaires pour mettre en évidence le terme affecté de la* 1ʳᵉ *puissance de* h : *le coefficient de ce terme est la dérivée cherchée* y, *ou* f'x.

701. Le second procédé est fondé sur la propriété des limites nº 697. Après avoir changé x en $x+h$, on retranchera la fonction proposée, et l'on divisera par h, afin de composer le rapport $y'+\alpha$, de l'accroissement de la fonction à celui de la variable : puis faisant décroître h indéfiniment, on cherchera la grandeur vers laquelle ce rapport tend sans cesse, c'est-à-dire qu'on en cherchera la valeur dans le cas de $h=0$: cette *limite* sera y'.

Mais il convient de composer des règles pour chaque espèce de fonction, afin d'être dispensé d'appliquer directement ces procédés, dans les divers exemples qu'on rencontre : ces règles donnent la dérivée pour chaque cas, sans qu'il soit nécessaire de faire des raisonnements spéciaux ; on opère alors comme lorsqu'on fait une multiplication, une extraction de racines, ou tout autre calcul algébrique.

702. Soit $y = A + Bu - Ct \ldots$; $A, B, C \ldots$ étant des constan-

tes; $u, t \dots$ des fonctions de x. Pour obtenir la dérivée, appliquons la première règle. En mettant $x + h$ pour x, A ne change pas, Bu devient $B(u + u'h + \alpha h)$, Ct est changé en $C(t + t'h + \beta h)$; ainsi la fonction variée $f(x + h)$ est ici

$$Y = (A + Bu - Ct\dots) + (Bu' - Ct'\dots)h + B\alpha h - C\beta h\dots$$

Donc, $y' = Bu' - Ct'\dots$ *La dérivée d'un polynôme est la somme des dérivées de tous les termes, en conservant les signes et les coefficients ; les termes constants ont zéro pour dérivée.*

Ainsi, $y = a^2 - x^2$ donne $y' = -2x$.

$$y = 1 + 4x^2 - 5x - 3x^3 \text{ donne } y' = 8x - 5 - 9x^2.$$

703. Pour $y = u \times t$, u et t étant fonctions de x : mettant $x + h$ pour x, il vient $f(x + h)$ ou

$$Y = (u + u'h + \alpha h) \times (t + t'h + \beta h),$$
$$y' = u't + ut'.$$

De même, $y = u.t.v$, en faisant $t.v = z$, devient $y = u.z$; d'où $y' = u'z + uz'$: mais aussi $z' = t'v + tv'$; donc

$$y' = tvu' + tuv' + uvt'.$$

Ainsi *la dérivée d'un produit est la somme des dérivées prises en regardant successivement chaque facteur comme seul variable.* Notre démonstration s'étend à 4, 5.... facteurs.

$y = (a + x)(a - x)$ donne $y' = (a - x)1 - (a + x)1$, puisque $+1$ et -1 sont les dérivées des facteurs; ou $y' = -2x$.

$$y = (a + bx)x^3 \text{ donne } y' = bx^3 + 3x^2(a + bx).$$

704. z et u étant des fonctions identiques de x, changeons x en $x + h$ dans $z = u$; nous aurons

$$z + z'h + \alpha h = u + u'h + \beta h.$$

Donc $z' = u'$ (nº 616); de même, on a $z'' = u''$, $z''' = u'''\dots$. Donc, *deux fonctions identiques ont aussi leurs dérivées identiques pour tous les ordres.*

705. Soit $y = \frac{u}{t}$; on en tire $ty = u$; d'où $y't + yt' = u'$,

puis
$$y' = \frac{u' - yt'}{t}, \text{ ou } y' = \frac{u't - ut'}{t^2}.$$

La dérivée d'une fraction est égale à celle du numérateur, moins le produit de la fraction proposée par la dérivée de son dénominateur, cette différence divisée par ce dénominateur.

706. Ou bien, *est égale au dénominateur multiplié par la dérivée du numérateur, moins le numérateur multiplié par la dérivée du dénominateur, cette différence divisée par le carré du dénominateur.*

On peut encore tirer ces règles en effectuant la division de

$$Y = \frac{u + u'h + \alpha h}{t + t'h + \beta h} = \frac{u}{t} + \frac{tu' - ut'}{t^2} \cdot h + \ldots\ldots;$$

d'où $y' =$ etc.

Ainsi,
$$y = \frac{x}{a} - \frac{x^2}{1 - x}, \text{ donne } y' = \frac{1}{a} - \frac{(2 - x)x}{(1 - x)^2}.$$

$$y = \frac{a + \frac{1}{2}bx^2}{3 - 2x}; \; y' = \frac{(3 - 2x)bx + 2(a + \frac{1}{2}bx^2)}{(3 - 2x)^2} = \frac{(3 - x)bx + 2a}{(3 - 2x)^2}.$$

707. Si le numérateur u est constant, on fera $u' = 0$, et l'on aura $y' = -\frac{ut'}{t^2} = -\frac{yt'}{t}$: *la dérivée d'une fraction dont le numérateur est constant, est moins le produit du numérateur par la dérivée du dénominateur, divisé par le carré de ce dénominateur.*

Par ex.,
$$y = \frac{4}{x^2} \text{ donne } y' = -\frac{4 \cdot 2x}{x^4} = -\frac{8}{x^3},$$

$$y = -\frac{1}{x^3}, \quad y' = \frac{3x^2}{x^6} = \frac{3}{x^4}.$$

708. Cherchons maintenant la dérivée des puissances.

1° *Si* m *est entier et positif dans* $y = x^m$, comme $x^m = x \cdot x^{m-1}$, la dérivée relative au 1er facteur est $1 \cdot x^{m-1}$; d'après la règle des produits, il en faut dire autant de chacun des m facteurs; dont la dérivée est $y' = mx^{m-1}$.

Et s'il s'agit de $y = z^m$, z étant une fonction de x, comme $z^m = z \cdot z^{m-1}$ la dérivée relative au 1[er] facteur est $z' \cdot z^{m-1}$; chacun des m facteurs z donne cette même quantité. Donc la dérivée est

$$y' = mz^{m-1} \cdot z'.$$

Par ex., $y = (a + bx + cx^2)^m = z^m$, en faisant

$$z = a + bx + cx^2;$$

et l'on a

$$z' = b + 2cx,\ y' = mz^{m-1}\, z' = m(a + bx + cx^2)^{m-1} \times (b + 2cx).$$

Pour $y = x^3(a + bx^2)$, en faisant $a + bx^2 = z$, on a $z' = 2bx$: et par la règle n° 703, $y' = 3x^2z + x^3z' = x^2(3a + 5bx^2)$.

Enfin, $y = (a + bx)^2$; on a $y = z^2$ en posant $a + bx = z$,

d'où $$z' = b,\ y' = 2zz' = 2b(a + bx).$$

2° *Quand* m *est entier et négatif*, $m = -n$, et $y = z^m = z^{-n}$, on a $y = \frac{1}{z^n}$; d'où $y' = \frac{-nz^{n-1} \cdot z'}{z^{2n}}$, en vertu de la règle n° 707, et de ce qu'on vient de démontrer, 1°.

Ainsi $$y' = -nz^{-n-1} \cdot z' = mz^{m-1} \cdot z'.$$

Pour $y = \frac{a}{x^p}$, on a $y' = -\frac{pa}{x^{p+1}}$.

3° *Quand* m *est fractionnaire*, $m = \frac{p}{q}$, on a $y = z^{\frac{p}{q}}$, d'où $y^q = z^p$, en élevant à la puissance q : prenons les dérivées des deux membres qui sont des fonctions identiques de x (n° 704); p et q sont ici des *entiers positifs* ou *négatifs*; il suit des deux cas précédents que $qy^{q-1} \cdot y' = pz^{p-1} \cdot z'$; comme $p = qm$, et $y = z^m$, on a (*voy.* n° 710)

$$qz^{mq-m}y' = qmz^{qm-1} \cdot z';\quad \text{d'où } y' = mz^{m-1} \cdot z'.$$

Quel que soit l'exposant m, z *étant une fonction de* x, *la dérivée de* z^m *est donc* $mz^{m-1} \cdot z'$, z' étant une dérivée qu'on tire de $z = fx$. Nous ne disons rien des exposants irrationnels ou imaginaires, qui rentrent dans les précédents (*voy.* p. 15). Au reste voici une démonstration qui embrasse tous les cas.

709. Changeons x en $x + h$ dans $y = x^m$,

$$Y = (x+h)^m = y + y'h + \text{etc.};$$

d'où $$\left(\frac{x+h}{x}\right)^m = \left(1+\frac{h}{x}\right)^m = (1+z)^m = 1 + \frac{y'z}{x^{m-1}} + \text{etc.},$$

en divisant tout par x^m, et faisant $h = xz$. Or, $(1+z)^m$ est indépendant de x, puisque, h étant arbitraire, z est quelconque, même quand on détermine x : il faut donc que notre dernier membre soit aussi sans x, et par conséquent le second terme en particulier; d'où $\frac{y'}{x^{m-1}} =$ constante ; c'est-à-dire que y' doit être composé en x, de manière que divisé par x^{m-1}, le quotient soit une fonction de m, telle que fm, ou $y' = x^{m-1} \,.\, fm$.

Déterminons fm. Nous avons

$$(x+h)^m = x^m + hx^{m-1} \,.\, fm + \text{etc.}$$

Donc $$(x+h)^n = x^n + hx^{n-1} \,.\, fn + \text{etc.}$$

$$(x+h)^{m+n} = x^{m+n} + hx^{m+n-1} \,.\, f(m+n) + \ldots,$$

en changeant m en n et en $m + n$. Mais en multipliant les deux 1[res] équations, on trouve pour produit la 3[e] équation, excepté qu'il y a $fm + fn$, au lieu de $f(m+n)$: donc (note, p. 274)

$$f(m+n) = fm + fn.$$

En considérant n comme un accroissement de m, on a $f(m+n) = fm + nf'm +$ etc. ; partant, $fn = nf'm +$ etc. ; et puisque le 1[er] membre est indépendant de m, le 2[e] doit aussi l'être, savoir, $f'm =$ un nombre inconnu a; d'où $f'' = f''' = \ldots = 0$,

et $$fn = an; \quad \text{d'où } fm = am.$$

Il s'agit de déterminer la constante numérique a. Or, on a

$$(x+h)^m = x^m + hx^{m-1}\, am + h^2 \ldots$$

Faisant $m = 1$, $x + h = x + ha$; d'où $a = 1$,

Ainsi, $fm = m$, et la dérivée est $y' = mx^{m-1}$.

Maintenant pour $y = z^m$, où z est fonction de x, on a

$$f(x+h) = (z + z'h + \ldots)^m = z^m + mz^{m-1}\, z'h + \ldots \text{ et } y' = mz^{m-1} \,.\, z'.$$

710. Pour $y = \sqrt[m]{z} = z^{\frac{1}{m}}$, on a

$$y' = \frac{1}{m} z^{\frac{1}{m} - 1} \cdot z' = \frac{z'}{m\sqrt[m]{z^{m-1}}};$$

c'est la formule des dérivées des fonctions radicales.

Pour $y = \sqrt[4]{(a + bx^2)^5}$, on fait $z = a + bx^2$, et l'on a

$$y = z^{\frac{5}{4}}, \quad y' = \tfrac{5}{4} z^{\frac{1}{4}} \cdot z' = \tfrac{5}{4} \sqrt[4]{(a + bx^2)} \cdot 2bx.$$

De même $y = \sqrt[5]{x^3}$ donne $y' = \frac{3}{5} x^{\frac{3}{5} - 1} = \frac{3}{5\sqrt[5]{x^2}}$.

Comme les radicaux du 2[e] degré se rencontrent plus souvent, on forme une règle pour le cas de $m = 2$; $y = \sqrt{z}$ donne $y' = \frac{z'}{2\sqrt{z}}$: *la dérivée d'un radical carré est le quotient de la dérivée de la fonction affectée de ce radical, divisée par le double de ce même radical.*

Par ex., $y = a + b\sqrt{x} - \frac{c}{x}$, donne $y' = \frac{b}{2\sqrt{x}} + \frac{c}{x^2}$.

Pour $$y = (ax^3 + b)^2 + 2(x - b)\sqrt{(a^2 - x^2)},$$

on a $$y' = 6ax^2(ax^3 + b) + \frac{2a^2 - 4x^2 + 2bx}{\sqrt{(a^2 - x^2)}}.$$

Enfin, $y = \frac{x}{-x + \sqrt{(a^2 + x^2)}}$ donne

$$y' = \frac{a^2}{\sqrt{(a^2 + x^2)} \cdot (2x^2 + a^2 - 2x\sqrt{a^2 + x^2})}.$$

Si l'on eût multiplié haut et bas la fraction proposée par $x + \sqrt{(a^2 + x^2)}$, on aurait eu

$$y = \frac{x^2}{a^2} + \frac{x}{a^2}\sqrt{(a^2 + x^2)}, \quad y' = \frac{2x}{a^2} + \frac{a^2 + 2x^2}{a^2\sqrt{(a^2 + x^2)}},$$

711. Étant donnée une fonction compliquée $y = fx$, supposons qu'en représentant par z une partie de cette fonction, ou $z = Fx$, la proposée devienne plus simple et exprimée en z seul, $y = \varphi z$;

on a ces trois équ., dont la 1[re] résulte de l'élimination des z entre les deux autres :

$$(1)\ y = fx, \quad (2)\ z = Fx, \quad (3)\ y = \varphi z.$$

Nous allons tirer la dérivée y' de ces deux dernières, sans nous servir de la 1[re]. Comme il y a deux variables x et z, notre notation ne suffit plus ; car y' ne désigne pas plus la dérivée de la 1[re] équ. que celle de la 3[e] ; cependant x est variable dans l'une, z dans l'autre, et les fonctions f et φ sont très-différentes. La dérivée de y s'exprime aussi bien par dy que par y' (n° 698) ; et puisque la dérivée de x est $x' = 1$, ou $\mathrm{d}x = 1$, nous écrirons $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$, pour marquer que la dérivée de y est prise relativement à *la variable principale* x, qui reçoit l'accroissement arbitraire h. *On appelle* dy *la différentielle de* y, *expression synonyme de* dérivée, *et qui n'en diffère que par la notation qu'elle suppose* (*voy.* p. 302.)

Changeant x en $x + h$ dans (2), et désignant par k l'accroissement de z, $Z - z = k$, on a $k = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} h + \ldots$; dès lors pour que y devienne, dans l'équ. (3), la même quantité Y, que si l'on eût changé x en $x + h$ dans (1), il faut changer z en $z + k$, savoir,

$$Y = \varphi(z + k) = y + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}z} k + \ldots$$

Le coefficient de k est ici la dérivée de $y = \varphi z$, prise comme si z était seule variable et indépendante de x, ce qu'exprime notre notation.

Substituant pour k sa valeur, on a

$$Y = y + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}z} \cdot \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} h + \text{etc.}$$

Donc *

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}z} \cdot \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}.$$

Le 2[e] membre est le produit des dérivées des équ. (2) et (3),

* Observez que les dz ne s'entre-détruisent pas, parce que le dz qui divise dy indique, non-seulement une division, mais aussi que la dérivée ou différentielle dy est tirée de l'équ. $y = \varphi z$, comme si l'accroissement h était attribué à z, et non pas à x ; alors dz est = 1 : d'un autre côté, le multiplicateur dz indique que la dérivée de z est tirée de l'équ. $z = Fx$, x ayant pris l'accroissement h, ou dx = 1.

c'est-à-dire de φz par rapport à z, et de Fx par rapport à x. *La dérivée d'une fonction de* z, *lorsque* z *est fonction de* x, *est le produit des dérivées de ces deux fonctions.*

Il est inutile de donner des exemples de ce théorème, qui a déjà été appliqué, n° 708, à la dérivée de z^m; il nous sera d'ailleurs très-utile par la suite.

712. Il peut arriver que l'équ. $y = fx$ soit assez composée pour qu'il soit nécessaire d'y introduire deux variables z et u, représentant des fonctions de z; alors l'équation proposée $y = fx \ldots$ (1) résulte de l'élimination de z et u entre ces trois équ. données

$$(2) \ldots z = Fx, \quad (3) \ldots u = \psi x, \quad (4) \ldots y = \varphi(z,u).$$

Il s'agit de tirer de celles-ci la dérivée de la première, comme si l'on eût changé x en $x + h$ dans l'équ. (1). Cette transformation faite dans les équ. (2) et (3), donne pour les accroissements k et i qui reçoivent z et u,

$$k = \frac{dz}{dx} h + \ldots \quad i = \frac{du}{dx} h + \ldots$$

Changeons donc z en $z + k$, et u en $u + i$ dans l'équ. (4); et comme cette partie du calcul est la même, soit que k et i aient une valeur déterminée, soient qu'ils restent arbitraires, z et u y sont traités comme des variables indépendantes. Il est donc permis de changer d'abord z en $z + k$ sans altérer u; puis, dans le résultat, de mettre $u + i$ pour u sans faire varier z. Ce double calcul conduira au même but que si l'on eût fait à la fois les deux changements.

Mettant $z + k$ pour z dans $y = \varphi(z, u)$, u est assimilé aux autres constantes de l'équ., et y devient $y + \frac{dy}{dz} k + \ldots$ Il reste à substituer ici $u + i$ pour u. Le 1er terme y doit alors être considéré comme ne contenant qu'une seule variable u, et devient

$$y + \frac{dy}{du} i + \ldots$$

Le 2e terme $\frac{dy}{dz} k$ est pareillement une fonction de la variable u; mettant $u + i$ pour u, le développement commencera par ce

même premier terme (nº 694), en sorte que la somme est

$$Y = y + \frac{dy}{du}\,i + \frac{dy}{dz}\,k + \ldots$$

Il n'a pas été besoin de considérer les termes subséquents, parce que le but du calcul étant de trouver le coefficient de h, les termes i^2, k^2, ik,... donneraient des h^2, h^3.... Substituons donc ici les valeurs ci-dessus de k et i, nous avons

$$Y = y + \left(\frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} + \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx}\right) h + \ldots$$

Le coefficient de h est la dérivée cherchée, comme si on l'eût tirée directement de l'équ. proposée $y = fx$, savoir,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} + \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx}.$$

La remarque de la note précédente s'applique ici.

713. S'il y avait trois variables dans la fonction transformée $y = \varphi\,(z,u,t)$, il suffirait d'ajouter au 2ᵉ membre un 3ᵉ terme de même forme $\frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx}$; et ainsi de suite.

Donc, *la dérivée d'une fonction composée de différentes fonctions particulières, est la somme des dérivées relatives à chacune, considérée séparément et indépendamment l'une de l'autre, en suivant la règle du* nº 711. Il est visible que les dérivations des produits et des quotients ne sont que des cas particuliers de ce théorème (nºˢ 703 et 707).

Soit $y = \frac{a + bx}{(1-x)^2}$; on a $y = \frac{z'}{u^2}$, en faisant

$$z = a + bx, \quad u = 1 - x; \quad \text{d'où} \quad z' = b, \quad u' = -1.$$

La dérivée de y, u étant constante, est $\frac{z}{u^2}$; on a $\frac{-2zu'}{u^3}$ pour la dérivée relative à u, par les règles nºˢ 707 et 708, 2º. La somme est la dérivée cherchée : donc $y' = \frac{b}{u^2} + \frac{2z}{u^3} = \frac{b + bx + 2a}{(1-x)^3}$.

$$y = \frac{(1 - x^2)^2 - (3 - 2x)x}{4 - 5x} = \frac{z^2 - u}{t}, \text{ en faisant}$$

$$z = 1 - x^2,\ u = 3x - 2x^2,\ t = 4 - 5x,\ z' = -2x,\ u' = 3 - 4x,\ t' = -5;$$

prenant les dérivées successivement, en ne considérant qu'une variable z, u, ou t, et ajoutant, on a

$$y' = \frac{2zz'}{t} - \frac{u'}{t} - \frac{(z^2-u)t'}{t^2} = \frac{16x^3-15x^4-7}{(4-5x)^2}.$$

Lorsque les valeurs qu'on doit égaler à des variables z, u.... ne sont pas très-compliquées, on préfère opérer sans le secours de cette transformation, en la supposant tacitement. C'est ainsi qu'on tire de suite de

$$y = (a-2x+x^3)^3, \quad y' = 3(a-2x+x^3)^2(3x^2-2).$$

714. Après avoir trouvé la dérivée y', en traitant cette fonction de x selon les règles qui viennent d'être posées, on en tirera la dérivée du 2e ordre y'' : celle-ci donnera de même y''', puis y^{IV}, etc.

Par exemple, $y = x^{-1}$ donne $y' = -x^{-2}$, $y'' = 2x^{-3}$, $y''' = -2.3x^{-4}$ etc., $y^{(n)} = \pm 2.3....nx^{-(n+1)}$.

De même $y = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ donne $y' = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$, $y'' = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}$,

$$y''' = \frac{1.3}{2^3}x^{-\frac{5}{2}}, \quad y^{\text{IV}} = -\frac{1.3.5}{2^4}x^{-\frac{7}{2}}, \quad y^{(n)} = \mp\frac{1.3.5....(2n-3)}{2^n\sqrt{x^{2n-1}}},$$

Pour $y = x^m$, on a $y' = mx^{m-1}$, $y'' = m(m-1)x^{m-2}$....,

$$y^{(n)} = m(m-1)(m-2)....(m-n+1)x^{m-n}.$$

715. Il est facile maintenant d'appliquer le théorème de Taylor (*A*, n° 699) à toutes les fonctions algébriques, c'est-à-dire d'en obtenir le développement en série, selon les puissances croissantes de h, lorsqu'on y a changé x en $x+h$.

I. Soit $y = x^{-1}$; nous venons de trouver y', y''.... Donc

$$\frac{1}{x+h} = \frac{1}{x} - \frac{h}{x^2} + \frac{h^2}{x^3} - ....\pm\frac{h^n}{x^{n+1}}.$$

Ce développement est une progression par quotient (p. 214).

II. $y = \dfrac{x^2-a^2}{x} = x - \dfrac{a^2}{x}$, donne de même

$$f(x+h) = \frac{x^2-a^2}{x} + \left(1+\frac{a^2}{x^2}\right)h - \frac{a^2h^2}{x^3} + ...$$

III. Pour $y = \sqrt{x}$; on trouve $y', y''\ldots$, et substituant dans la série de Taylor, on a

$$\sqrt{(x+h)} = \sqrt{x} + \frac{h}{2\sqrt{x}} - \frac{1 \cdot h^2}{2.4\sqrt{x^3}} \cdots \pm \frac{1.3.5\ldots(2n-3)}{2^n\sqrt{x^{2n-1}}} \cdot \frac{h^n}{2.3\ldots n}.$$

IV. En général, $y = x^m$ donne le développement de la formule de Newton, quel que soit l'exposant m.

$$(x+h)^m = x^m + mx^{m-1}h + m\frac{m-1}{2}x^{m-2}h^2 + \ldots$$
$$+ m \cdot \frac{m-1}{2} \cdot \frac{m-2}{3} \ldots \frac{m-n+1}{n} x^{m-n} h^n \ldots$$

Fonctions exponentielles et logarithmiques.

716. Pour avoir la dérivée de $y = fx = a^x$, suivons la règle du nº 700 : il vient

$$f(x+h) = a^{x+h} = a^x \cdot a^h = a^x + y'h + \text{etc. (nº 695)};$$

d'où, en divisant par a^x, $a^h = 1 + \frac{y'}{a^x}h + \text{etc.}$

Le 1er membre de cette équation étant indépendant de x, le 2e, et en particulier le coefficient de h, doit aussi l'être ; donc, y' doit être composé en x, de telle sorte que, divisé par a^x, le quotient soit une constante k, fonction inconnue de la base a, $y' = ka^x$. Ainsi,

$$y' = ka^x; \quad y'' = k^2a^x, \quad y''' = k^3a^x, \ldots \quad y^{(n)} = k^na^x,$$

et $$a^x = 1 + kx + \frac{k^2x^2}{2} + \frac{k^3x^3}{2.3} + \frac{k^4x^4}{2.3.4} \ldots,$$

d'après la formule de Taylor. La constante k se détermine comme au nº 625 : on pose $x = 1$; puis, dans $a = 1 + k + \frac{1}{2}k^2 \ldots$ on fait $k = 1$, et l'on désigne par e la base qui correspond, $e = 2{,}718281828\ldots$ Enfin, on pose $kx = 1$ dans la 1re série ; le 2e membre devient e, et l'on a $a^{\frac{1}{k}} = e$, $a = e^k$; d'où

$$k = \frac{\text{Log } a}{\text{Log } e} = \text{l}\, a = \frac{1}{\log e},$$

selon que le système des log. est quelconque, ou a pour base e, ou enfin a. Les notations convenues p. 222, sont ici employées : $\mathrm{l}\,a$ désigne que la base des log. est e, ou qu'il s'agit des log. népériens, etc. En un mot, le Calcul différentiel reproduit les séries démontrées n° 625, et par suite les conséquences qu'on en avait tirées.

717. Soit $y = a^z$, z étant une fonction de x, $z = fx$: la règle n° 711 donne $y' = ka^z \,.\, z' = a^z \,.\, z'\,\mathrm{l}\,a$; z' se tire de $z = fx$. *La dérivée d'une exponentielle est le produit de cette même quantité par la dérivée de l'exposant, et par la constante* k, *qui est le log. népérien de la base.*

$$y = e^{mz} \quad \text{donne.}\ .\ .\ .\quad y' = e^{mz}\,.\,mz'.$$
$$y = a^{3x+1}\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\quad y' = a^{3x+1}\,.\,3\,\mathrm{l}\,a.$$
$$y = a^{\sqrt{(2x+1)}}.\ .\ .\ .\ .\ .\ .\quad y' = a^{\sqrt{(2x+1)}}\,.\,\frac{\mathrm{l}\,a}{\sqrt{(2x+1)}}.$$

718. Pour $y = \mathrm{Log}\,x$, la règle n° 700 conduit à

$$Y = \mathrm{Log}\,(x+h) = \mathrm{Log}\,x + y'h + \text{etc.}$$

$$\mathrm{Log}\,(x+h) - \mathrm{Log}\,x = \mathrm{Log}\left(\frac{x+h}{x}\right) = \mathrm{Log}\,(1+z) = y'xz + \text{etc.}$$

en posant $h = xz$. Observez, comme n° 709, que z est indépendant de x, puisqu'en changeant convenablement l'arbitraire h, z peut demeurer constant lorsque x varie. Le 2ᵉ membre, et en particulier le terme $y'xz$, doit donc ne pas contenir x ; y' est composé en x de manière que le produit $y'x$ soit une constante M, $y'x = M$. Ainsi (n° 714),

$$y' = \frac{M}{x},\quad y'' = -\frac{M}{x^2},\quad y''' = \frac{2M}{x^3},\quad y^{\text{IV}} = -\frac{2\,.\,3M}{x^4},\ .\ .\ .\ .$$

$$\mathrm{Log}\,(x+h) = \mathrm{Log}\,x + M\left(\frac{h}{x} - \frac{h^2}{2x^2} + \frac{h^3}{3x^3} - .\ .\ .\ .\right),$$

$$\mathrm{Log}\,(1+z) = M\,(z - \tfrac{1}{2}z^2 + \tfrac{1}{3}z^3 - \tfrac{1}{4}z^4 + .\ .\ .\ .).$$

Quant à la valeur inconnue de M, elle dépend de la base a du système. Soit t le log. de $1+z$, $a^t = 1 + z = 1 + kt + \frac{1}{2}k^2t^2 .\ .\ .\ .$; d'où $z = kt\,(1 + \frac{1}{2}kt .\ .\ .\ .)$. Substituant dans la série de $\mathrm{Log}\,(1+z)$, nous avons, en supprimant le facteur commun t,

$$1 = Mk\,(1 + \tfrac{1}{2}kt .\ .\ .\ .) - \tfrac{1}{2}Mk^2t\,(\quad)^2 .\ .\ .\ .$$

Cette relation doit subsister, quel que soit t, k et M conservant leurs valeurs constantes. Soit pris $z=0$, d'où $t=0$, puis $1=Mk$;

d'où $$M=\frac{1}{h}=\log e=\frac{1}{\mathrm{l}\, a},\quad y'=\frac{1}{kx}=\frac{1}{x\,\mathrm{l}\, a}.$$

Il est aisé de voir que M est ce que nous avons nommé le *module* (p. 223), facteur constant dans un système de log., qui sert à traduire ceux-ci en log. népériens, et réciproquement. On retrouve donc ici les mêmes séries et la même théorie que précédemment.

719. Soit $y=\operatorname{Log} z$, z étant une fonction de x; on a (n° 711),

$$y'=\frac{Mz'}{z}=\frac{z'}{kz}=\frac{z'}{z\,\mathrm{l}\, a}.$$

La dérivée du log. d'une fonction est la dérivée de cette fonction, multipliée par le module et divisée par cette même fonction. Le facteur M est 1, quand il s'agit des log. népériens *.

$$y=\mathrm{l}\left(\frac{u}{t}\right)=\mathrm{l}\, u-\mathrm{l}\, t \quad \text{donne} \quad y'=\frac{u'}{u}-\frac{t'}{t}=\frac{tu'-ut'}{ut},$$

$$y=\operatorname{Log} z^n=n\operatorname{Log} z\ldots\quad y'=\frac{Mnz'}{z},$$

$$y=\operatorname{Log}\frac{x}{\sqrt{(1+x)^2}}\ldots\quad y'=\frac{M}{x(1+x)^2},$$

$$y=\operatorname{Log}(x+\sqrt{1+x^2})\ldots\quad y'=\frac{M}{\sqrt{(1+x^2)}},$$

$$y=\mathrm{l}\sqrt{\left(\frac{\sqrt{1+x^2}+x}{\sqrt{1+x^2}-x}\right)},\quad y'=\frac{1}{\sqrt{(1+x^2)}},$$

$$y=\mathrm{l}\,\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}},\quad y'=\frac{-1}{x\sqrt{1-x^2}}.$$

720. Les log. servent souvent à faciliter la recherche des dérivées.

* On aurait pu tirer la dérivée de celle des exponentielles : $y=a^z$ donne $y'=a^z\,.\,z'\mathrm{l}\, a=yz'\,.\,\mathrm{l}\, a$; d'où $z'=\dfrac{y'}{y\,\mathrm{l}\, a}=\dfrac{My'}{y}$. Réciproquement, de cette dernière équ. on peut déduire la précédente, c'est-à-dire la dérivée y' de a^x.

I. Soit $y = utvz\ldots$; on en tire $\mathrm{l}\,y = \mathrm{l}\,u + \mathrm{l}\,t + \mathrm{l}\,v + \ldots$; puis $\frac{y'}{y} = \frac{u'}{u} + \frac{t'}{t} + \frac{v'}{v} \ldots$ Multipliant par la proposée, on a y', ce qui prouve que la règle n° 703 est vraie, quel que soit le nombre des facteurs.

II. $y = z^t$ donne $\mathrm{l}\,y = t\,.\,\mathrm{l}z$, $\frac{y'}{y} = \frac{tz'}{z} + t'\,.\,\mathrm{l}z$.

donc
$$y' = z^t\,.\left(\frac{tz'}{z} + t'\,\mathrm{l}\,z\right).$$

III. De $y = a^{b^z}$, on tire $\mathrm{l}\,y = b^z\,.\,\mathrm{l}\,a$, $y' = a^{b^z}\,.\,b^z\,.\,z'\,\mathrm{l}\,a\,\mathrm{l}\,b$.

IV. $y = z^{t^u}$ donne $\mathrm{l}\,y = t^u\,\mathrm{l}\,z$; donc

$$\frac{y'}{y} = \frac{t^u z'}{z} + \mathrm{l}\,z\,.\,t^u\left(\frac{ut'}{t} + u'\,\mathrm{l}\,t\right),\ y' = z^{t^u}\,.\,t^u\left(\frac{z'}{z} + u'\mathrm{l}t.\mathrm{l}\,z + \frac{ut'.\mathrm{l}z}{t}\right).$$

Fonctions circulaires.

721. Cherchons la dérivée de $y = \sin x$, le rayon étant 1 ; on a $\sin(x \pm h) = \sin x \cos h \pm \cos x\,.\,\sin h = y \pm y'h +$ etc. ; d'où

$$2\cos x\,.\,\sin h = 2y'h + \text{etc.},\ \sin h = \frac{y'}{\cos x}\,h + \text{etc.}$$

Le 2e membre doit ne pas contenir x ; ainsi le coefficient de h est une constante inconnue A, $y' = A\cos x$, $\sin h = Ah +$ etc. ; on en tire $\frac{\sin h}{h} = A +$ etc. ; et faisant décroître h, on voit que A est la limite du rapport du sinus à l'arc h, limite (n° 362) qu'on sait être $= 1$; ainsi $A = 1$, $y' = \cos x$.

De même pour $z = \cos x$,

$$\cos(x \pm h) = \cos x\,.\,\cos h \mp \sin x\,.\,\sin h = z \pm z'h + \text{etc.}$$

En retranchant, on en tire $2\sin x\,.\,\sin h = -2z'h +$ etc. ; puis $\sin h = \frac{-z'}{\sin x}\,h +$ etc. ; mais on a trouvé $\sin h = h +$ etc. ; en comparant, on a $\frac{-z'}{\sin x} = 1$, $z' = -\sin x$.

Une fois connues les dérivées de sin x et cos x, il est aisé de passer aux dérivées d'ordres supérieurs, et l'on trouve qu'elles se reproduisent périodiquement dans l'ordre

$$\sin x, \quad \cos x, \quad -\sin x, \quad -\cos x.$$

Le théorème de Taylor donne par conséquent

$$\sin(x+h) = \sin x \left(1 - \frac{h^2}{2} + \frac{h^4}{2.3.4} \ldots\right)$$
$$+ \cos x \left(h - \frac{h^3}{2.3} + \frac{h^5}{2\ldots5} \ldots\right).$$

Faisons ensuite successivement $x = 0$ et $= 90°$, nous trouvons les mêmes séries que page 229; d'où résultent la formation des tables, le rapport π du diamètre à la circonférence et les formules des nos 628 à 635.

722. Pour $y = \sin z$, on a $y = z' \cdot \cos z$.

Si $y = \cos z$, on a $y' = -z' \cdot \sin z$.

Soit $y = \text{tang}\, z = \dfrac{\sin z}{\cos z}$, on a (n° 706) $y' = \dfrac{z'}{\cos^2 z} = z' \cdot \text{séc}^2 z$.

La dérivée de la tangente d'un arc est le carré de la sécante, multiplié par la dérivée de l'arc fonction de x.

Pour $y = \cot z$, on a $y' = \dfrac{-z'}{\sin^2 z}$.

Puisque $\sqrt{\frac{1}{2}(1+\cos x)} = \cos \frac{1}{2} x$, la dérivée de ce radical est $-\frac{1}{2} \sin \frac{1}{2} x$; c'est en effet ce que le calcul donne.

Soit $y = \cos mz$; on a $y' = -mz' \cdot \sin mz$,

$y = \sin mz \ldots \quad y' = \quad mz' \cdot \cos mz$.

De $y = \cos(\text{l}\, x)$, on tire $y' = -\dfrac{\sin(\text{l}\, x)}{x}$.

Pour $y = \cos x^{\sin x}$, on a $\text{l}\, y = \sin x \cdot \text{l} \cos x$; puis

$$y' = \cos x^{\sin x} \left(\cos x \cdot \text{l} \cos x - \frac{\sin^2 x}{\cos x}\right).$$

$y = \dfrac{1}{\cos z}$, donne $y' = \dfrac{z' \,\text{tang}\, z}{\cos z} = z' \,\text{tang}\, z \cdot \text{séc}\, z$: c'est la dérivée de $y = \text{séc}\, z$.

Pour $y = \mathrm{l} \sin z$, on a $y' = \dfrac{(\sin z)'}{\sin z} = \dfrac{z' \cos z}{\sin z} = z' \cot z$,

$$y = \mathrm{l} \cos z \ldots.\ y' = \frac{(\cos z)'}{\cos z} = - z' \operatorname{tang} z,$$

$$y = \mathrm{l} \operatorname{tang} z \ldots.\ y' = \frac{z'}{\cos^2 z \operatorname{tang} z} = \frac{2z'}{\sin 2z}.$$

M. Legendre a donné dans la *Conn. des Tems* de 1819 des séries propres au calcul des log. de sin., cos. et tang.

Soit $y = \log. \sin x$; appliquant le théorème de Taylor, et désignant par M le module, on a

$$y' = M \cot x, \quad y'' = - \frac{M}{\sin^2 x}, \quad y''' = \frac{2M \cos x}{\sin^3 x} \ldots.$$

$$\log \sin (x + h) = \log \sin x + Mh \cot x - M \frac{h^2 \cot x}{\sin 2x} + \text{etc.}$$

Transposant log sin x, il vient, la diff. Δ entre ce log et celui de sin $(x + h)$,

$$\Delta = Mh \cot x \left(1 - \frac{h}{\sin 2x} + \frac{h^2}{3 \sin^2 x}\right) - \frac{Mh^4}{4 \sin^4 x} (1 - \tfrac{2}{3} \sin^2 x).$$

On trouve de même pour les diff. Δ_1 et Δ_2 entre les log. des cos. ou des tang. de $x + h$ et de x,

$$\Delta_1 = - Mh \operatorname{tang} x \left(1 + \frac{h}{\sin 2x} + \frac{h^2}{3 \cos^2 x}\right) - \frac{Mh^4}{4 \cos^4 x} (1 - \tfrac{2}{3} \cos^2 x),$$

$$\Delta_2 = \frac{2Mh}{\sin 2x} \left(1 - h \cot 2x + \frac{2}{3} h^2 + \frac{4}{3} h^2 \cot^2 2x\right) + \frac{4Mh^4 \cos 2x}{\sin^4 2x} \left(1 - \frac{\sin^2 2x}{6}\right);$$

h représente ici la longueur de l'arc différentiel (*V*. t. I, p. 328). C'est ainsi que pour avoir log sin 27° 33′, connaissant log. sin 27° 30′, on fait h = arc de $3' = 3 \sin 1'$. Voici le calcul :

h.	$\bar{4}.94085$		$\bar{4}.94085-$	1er terme =	$\bar{0}.00072803$
M.	$\bar{1}.63778$		$\bar{4}.86215$	2e . . . . . =	$-$ 0.00000078
cot x. . .	0.28352	sin $2x$. . . —	$\bar{1}.91336$	3e . . . . . =	0.
1er terme	$\bar{4}.86215$	2e.	$\bar{7}.88964-$	Δ . . . . =	0.0007273
Le 3e terme ne produit rien quand on ne prend que 7 décimales.				log sin x. . . . =	$\bar{1}.6644056$
				log sin 27° 33′ =	$\bar{1}.6651329$

Cette méthode est surtout utile lorsqu'on veut calculer les log. avec une grande approximation.

723. Supposons que x soit le sinus d'un arc y; ce qu'on écrit ainsi :

$$y = \text{arc}(\sin = x), \quad \text{ou } x = \sin y.$$

La variable x qui reçoit l'accroissement h, n'est plus l'arc, mais bien le sinus. Or l'équ. $x = \sin y$ donne

$$1 = y' \cos y, \quad y' = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{(1 - x^2)}}.$$

Pour $y = \text{arc}(\sin = z)$, on a donc $y' = \dfrac{z'}{\sqrt{(1 - z^2)}}$.

Pour $y = \text{arc}(\cos = z)$, on aurait $y' = \dfrac{-z'}{\sqrt{(1 - z^2)}}$.

Prenons $y = \text{arc}(\text{tang} = z)$; d'où $z = \text{tang}\, y$, $z' = \dfrac{y'}{\cos^2 y}$,

$y' = z' \,.\, \cos^2 y$; et puisque $\cos^2 y = \dfrac{1}{1 + z^2}$, $y' = \dfrac{z'}{1 + z^2}$.

Ainsi, *la dérivée d'un arc, exprimée par son sinus, est* 1 *divisé par le cosinus; celle d'un arc exprimée par son cosinus, est* — 1 *divisé par le sinus; enfin, celle d'un arc exprimé par sa tangente, est* 1 *divisé par* 1 + *le carré de cette tangente.*

Si le rayon, au lieu d'être 1, était r, on aurait, en rendant les formules homogènes (nº 347, 2º),

$$y = \text{arc}(\sin = z), \quad y = \text{arc}(\text{tang} = z), \quad y = \text{tang}\, z,$$

$$y' = \frac{rz'}{\sqrt{(r^2 - z^2)}}, \quad y' = \frac{r^2 z'}{r^2 + z^2}, \quad y' = \frac{r^2 z'}{\cos^2 z}.$$

Dérivées des Équations.

724. En résolvant l'équ. $F(x,y) = 0$ sous la forme $y = fx$, il serait facile d'en tirer y', y'', y'''.... : mais cette résolution, qui est rarement possible, n'est nullement nécessaire; car mettons, pour y, sa valeur fx dans la proposée; il en résultera une fonction de x

identiquement nulle, que nous désignerons par $z = F(x, fx) = 0$; les dérivées z', z'', z'''.... seront nulles (n° 704). Or, pour obtenir z', il convient, d'après ce qu'on a vu n° 712, de simplifier l'expression compliquée $F(x, fx)$, en égalant à y le groupe de termes fx, et d'appliquer la règle de ce n° à l'équ. $z = F(x,y) = 0$, qui est la proposée même. Donc,

$$z' = \frac{dz}{dx} + \frac{dz}{dy} \cdot y' = 0, \quad y' = -\frac{dz}{dx} : \frac{dz}{dy}.$$

Ces deux termes sont des fonctions connues de x et y, qu'on nomme *Différentielles partielles*. Par ex., de l'équ. $y^2 + x^2 - r^2 = z = 0$,

on tire $$\frac{dz}{dx} = 2x, \quad \frac{dz}{dy} = 2y, \quad x + yy' = 0, \quad y' = -\frac{x}{y}.$$

De même $x^2 + y^2 - 2rx = r^2$ donne $yy' + x - r = 0$, $y' = \dfrac{r - x}{y}$.

$$x^4 + 2ax^2 y = ay^3 ; \quad (2ax^2 - 3ay^2)y' + 4x^3 + 4axy = 0.$$

725. Il est vrai que y' est exprimé en x et y, et non en x seul, comme cela serait arrivé si l'on eût résolu l'équation $F(x,y) = 0$. Si l'on veut déduire y' en x seul, il reste à éliminer y entre l'équation $z = 0$, et sa dérivée $z' = 0$.

C'est ainsi que, dans le premier exemple, on a $x^2 + y^2 = r^2$,

$x + yy' = 0$; d'où chassant y, $x^2 = y'^2 (r^2 - x^2)$, $y' = \dfrac{x}{\sqrt{(r^2 - x^2)}}$.

Cette élimination, qui est rarement utile, élève y' au degré même où se trouvait y dans la proposée $z = 0$; car quand il y a n valeurs de $y = fx$, comme le calcul de la dérivation laisse dans y' les mêmes radicaux que dans fx (n° 710), y' a aussi n valeurs. Si y' n'est qu'au 1er degré dans $z' = 0$, cela vient de ce que y s'y trouve aussi, et comporte les mêmes radicaux que l'élimination de y doit reproduire.

726. L'équ. $z' = 0$ renferme x, y' et y, qui sont des fonctions de x. Le raisonnement du n° 724 prouve qu'on peut en tirer l'équ. $z'' = 0$, en regardant y et y' comme contenant x, et appliquant la règle n° 712. La notation dont on s'est servi devient alors plus étendue. Par ex., $\dfrac{d^2y}{dxdy}$, $\dfrac{d^3y}{dx^2dy}$, signifieront que dans la pre-

mière, la dérivée est prise d'abord en considérant x comme variable, et qu'on a pris ensuite la dérivée du résultat relativement à y ; dans la deuxième, on prend les dérivées trois fois successives : deux fois par rapport à x, et une fois pour y. Du reste, il suit de ce qu'on a dit (n° 712), que ces dérivées peuvent être prises dans tel ordre qu'on veut : dans le 2[e] cas, on pourrait, par ex., les prendre par rapport à y, puis deux fois pour x, ou bien une fois pour x, une fois pour y, et enfin une pour x (*voy.* n° 743).

D'après cela, l'équ. $z' = \frac{dz}{dx} + \frac{dz}{dy} \cdot y' = 0$ donne

$$\frac{d^2z}{dx^2} + 2y' \cdot \frac{d^2z}{dx \cdot dy} + \frac{dz}{dy} y'' + \frac{d^2z}{dy^2} y'^2 = 0.$$

Cette équ. du 1[er] degré en y'' donnera y'' exprimée en x, y et y' ; on pourra éliminer y' à l'aide de l'équ. $z' = 0$; et si l'on veut chasser y par l'équ. $z = 0$, alors le degré de y'' s'élèvera.

Le dernier ex. n° 724 $(2ax^2 - 3ay^2)\, y' + 4x^3 + 4axy = 0$, en prenant les dérivées relativement à x, y et y', comme variables indépendantes, donne

$$(2ax^2 - 3ay^2)\, y'' + 12x^2 + 4ay + 8axy' - 6ayy'^2 = 0.$$

727. Si la proposée $z = 0$ renferme un terme constant, il disparaît de la dérivée $z' = 0$, comme on l'a vu n° 702. Ainsi, $x^2 + y^2 = r^2$ donne $x + yy' = 0$, qui est indépendant de r, et exprime une propriété commune à tous les cercles dont le centre est à l'origine. Il est même permis de chasser telle constante qu'on veut, en l'éliminant à l'aide des équ. $z = 0$, $z' = 0$, sauf à faire reparaître celle qu'on aurait chassée d'abord. $y = ax + b$ donne $y' = a$, qui ne contient pas b; et chassant a, on a $y = y'x + b$, qui est indépendante de a.

La dérivée du 2[e] ordre perd une 2[e] constante ; celle du 3[e] ordre, une 3[e] constante, etc., et le résultat exprime ainsi une propriété de l'équ. proposée, quelles que soient ces constantes. $y^2 = a - bx^2$ donne $yy' = -bx$, $yy'' + y'^2 = -b$; et chassant b, il vient cette équ. dégagée de a et b, $yy' = (yy'' + y'^2)x$.

On peut encore chasser une constante c, en résolvant la proposée $z = 0$, sous la forme $c = f(x, y)$, et différentiant. Comme les deux procédés doivent conduire à des résultats équivalents, et que celui-ci

introduit des radicaux dépendants du degré de c, il est visible que si l'on préfère éliminer c entre les équ. $z=0$, $z'=0$, le degré de y' doit s'élever. Par ex.,

$$y^2 - 2cy + x^2 = c^2, \quad (y-c)\,y' + x = 0$$

donnent $$(x^2 - 2y^2)\,y'^2 - 4xyy' - x^2 = 0.$$

728. On voit donc que toute dérivée de l'ordre n, de l'équation $z = F(x, y) = 0$, ne doit contenir $y^{(n)}$ qu'au 1er degré; quand il en est autrement, l'équ. ne provient pas d'une dérivation immédiate, mais de ce qu'on a éliminé quelque constante, ou x, ou y, à l'aide de l'équ. proposée.

Changement de la Variable indépendante.

729. Toute question générale, traitée par le Calcul différentiel, conduit à une expression en $x, y, y', y''\ldots$, telle que

$$\psi[x, y, (y'), (y'')\ldots].$$

Lorsqu'on veut l'appliquer ensuite à un ex. proposé $y = Fx$, il faut tirer (y'), $(y'')\ldots$, substituer dans ψ, et cette fonction n'est plus exprimée qu'en x. Les crochets ( ) sont mis pour indiquer que x est *variable principale*, et reçoit l'accroissement h. Mais il peut arriver qu'au lieu de $y = Fx$, on donne deux équ. qui lient y et x à une 3e variable t.

$$y = \varphi t, \quad x = ft \quad \ldots\ldots \quad (a)$$

Il faudrait donc éliminer t entre ces deux équ. pour obtenir $y = Fx$, en tirer (y'), (y''),.... et substituer dans ψ. Ce calcul, ordinairement long, ou même impossible à effectuer, n'est pas nécessaire; il suffit d'exprimer la fonction ψ en t, à l'aide des équ. (a) et de leurs dérivées φ', f'.... : celles-ci ne sont plus prises par rapport à x, mais bien à t, devenue *variable indépendante*. Proposons-nous donc de modifier la fonction donnée ψ, pour l'amener à renfermer $t, \varphi', f'\ldots$, au lieu de x, y, (y').... Soient h, k, i les accroissements que prennent ensemble les variables x, y, t :

$$y = Fx \text{ donne } k = (y')\,h + \tfrac{1}{2}(y'')\,h^2 + \ldots \quad (1)$$
$$y = \varphi t \ldots\ldots k = y'i + \tfrac{1}{2}(y''i^2 + \ldots \quad (2)$$
$$x = ft \ldots\ldots h = x'i + \tfrac{1}{2}x''i^2 + \ldots \quad (3)$$

Ces dérivées se rapportent aux fonctions respectives F, φ, f; (y') est la dérivée de Fx relative à x; y' et x' sont celles des équ. (a) par rapport à t, ou

$$(y') = \frac{dy}{dx}, \quad y' = \frac{dy}{dt} = \varphi' t, \quad x' = \frac{dx}{dt} = f't.$$

La fonction ψ est donnée en (y'), (y'')...., et l'on veut la traduire en x', y', x'', y''...., qui sont des fonctions connues de t.

Égalant les valeurs de k, puis mettant pour h la série (3), en se bornant aux deux premières puissances de h, on a

$$(y')\,x'i + [(y')\,x'' + (y'')\,x'^2]\,.\,\tfrac{1}{2}\,i^2 .... = y'i + \tfrac{1}{2}\,y''i^2 .... ;$$

et comme i est quelconque (n° 616),

$$(y')\,x' = y', \quad (y')\,x'' + (y'')\,x'^2 = y'', \text{ etc.}$$

Donc, pour exprimer ψ en t seul, il faut y substituer à x, y, (y), (y'').... les valeurs $x = ft$, $y = \varphi t$,

$$(y') = \frac{y'}{x'}, \quad (y'') = \frac{x'y'' - y'x''}{x'^3}. \quad . \quad . \quad . \qquad (D)$$

On peut tirer (y''), (y''').... de la valeur de (y') qui est le quotient des dérivées relatives à t, tirées des équations (a);

$$(y') = \frac{y'}{x'} = \frac{\varphi' t}{f' t} = \frac{dy}{dt} : \frac{dx}{dt}.$$

Car (y') représente une fonction de x, $(y') = F'x$, qu'on peut à son tour regarder comme une fonction de t, telle que $(y') = \varphi_1 t$, puisque $x = ft$.

Qu'on raisonne de même pour ces trois dernières équ., on en conclura que (y'') doit être le quotient des dérivées de $\varphi_1 t$ et ft relatives à t. Or, celle de $\varphi_1\, t = \frac{y'}{x'}$, est $\frac{x'y'' - y'x''}{x'^2}$; donc, en divisant par x' dérivée de ft, on retrouve l'expression D ci-dessus de (y''). Pareillement, la dérivée de cette valeur de (y'') étant divisée par x', donne

$$(y''') = \frac{y'''}{x'^3} - \frac{3x''y''}{x'^4} - y'\left(\frac{x'''}{x'^4} - \frac{3x''^2}{x'^5}\right). \quad . \quad . \quad . \qquad (E)$$

et ainsi des autres. On peut donc employer ψ de trois manières :

1° En éliminant t entre les équ. (a), tirant (y'), (y'') .... de l'équ. résultante $y = Fx$; enfin, substituant dans ψ;

2° En mettant dans ψ pour (y'), (y'')...., leurs valeurs (D), (E)...., ce qui exprime ψ en x, y, y', y''...., et par suite en t, à l'aide des équ. (a) et de leurs dérivées;

3° Enfin, en formant en fonction de t la fraction $(y') = \frac{y'}{x'}$, puis prenant les dérivées relatives à t, divisant chaque fois par x' ou $f't$, et enfin substituant dans ψ les valeurs ainsi obtenues pour (y'), (y'') ....

730. Soit r une fonction donnée de t, $r = ft$; supposons que les équations (a) soient $x = \cos t$, $y = r \sin t$ *; d'où

$$x' = r' \cos t - r \sin t \qquad y' = r' \sin t + r \cos t.$$

$$x'' = r'' \cos t - 2r' \sin t - r' \cos t, \; y'' = r'' \sin t + 2r' \cos t - r \sin t,$$

etc....

Substituant, dans ψ, d'abord les expressions (D) qui y introduiront y', x', y''...., au lieu de (y'), (y'')...., puis celles que nous venons d'obtenir, il n'y entrera plus que t et r, r', r''...., qui sont connues en t, par l'équ. $r = ft$. Par ex., si

$$\psi = \frac{x(y') - y}{y(y') + x}, \quad \text{on a } \psi = \frac{y'x - x'y}{yy' + xx'},$$

d'après la valeur (D) de (y') : et comme celles de x' et y' donnent $y'x - x'y = r^2$, $yy' + xx' = rr'$ (cette équation est la dérivée de $x^2 + y^2 = r^2$), on trouve en $\psi = \frac{r}{r'}$.

$$\text{Pareillement, soit } \psi = \frac{[1 + (y')^2]^{\frac{3}{2}}}{(y'')} = \frac{(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{x'y'' - y'x''}:$$

on a $\quad x'^2 + y'^2 = r^2 + r'^2, \quad x'y'' - y'x'' = r^2 + 2r'^2 - rr'';$

donc $$\psi = \frac{(r'^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}}{r^2 + 2r'^2 - rr''}.$$

* Ces équ. sont celles qui transforment les coordonnées de rectangulaires en polaires (n° 385) : lorsqu'une formule différentielle ψ aura été trouvée pour le 1er système, le

ψ est donc connu pour chaque valeur de t, puisque les formules seront exprimées en t seul, lorsqu'on aura $r = ft$.

731. Quand ψ a été ainsi transformé, t est variable indépendante; et si l'on veut que x soit remis dans son état primitif, il suffira de poser $x' = 1$, d'où $0 = x'' = x''' = \ldots$; car y' redevient (y'), et par suite y'' se change en (y''), etc. C'est ce qu'on peut vérifier sur nos exemples.

Une fois que ψ est généralisé et convient à la variable principale t, il est indifférent que x l'ait été originairement, et l'on peut supposer que c'était quelque autre variable u qui était indépendante. Or, en faisant $x' = 1$, on exprime que la variable principale est x; donc $t' = 1$ établit la même chose pour t : *la condition qui exprime que* t *est variable principale, est* $t' = 1$; d'où $0 = t'' = t'''\ldots$ on dit alors que *la différentielle de* t *est constante*. Lorsque ψ a été généralisé pour convenir à toute variable principale, *aucune différentielle n'y est constante*.

Puisque la série (3) p. 324, dérive de l'éq. $x = ft$, x' désigne $\frac{dx}{dt}$, et $x' = 1$ montre que la différentielle de x relative à une 3e variable t quelconque, est constante. De même, si l'on pose $t' = 1$, pour que t devienne variable principale, il faut entendre que *la dérivée de* t, *relative à une autre variable* u, *est constante*. Voici l'usage de cette proposition.

732. S'il arrive que ψ ne contienne pas x, $\psi = [y, (y'), (y'')\ldots]$, l'équ. $x = ft$ n'est plus nécessaire, et il suffit d'en avoir la dérivée $x' = f't$; car les relations (D) n'introduisent pas x dans ψ, mais seulement x', y',.... et les calculs précédents sont faciles. Or, si cette équ. dérivée donnée contenait t, au lieu de x, pour variable dépendante, qu'on ait, par ex., $F(t, t', x) = 0$, il faudrait d'abord généraliser cette équation, pour qu'aucune différentielle n'y soit constante, en mettant $\frac{t'}{x'}$ pour t'; puis faire $t' = 1$, pour rendre t variable principale; ce qui revient à remplacer de suite t' par $\frac{1}{x'}$.

calcul suivant la réduira à être propre au 2e. C'est ce qui a lieu pour les valeurs suivantes de ψ : l'une exprime la tang. de l'angle β, que fait un rayon vecteur avec la tang. à une courbe quelconque, l'autre en est le rayon de courbure (n°s 724, 733). Ces expressions sont donc, par notre calcul, traduites en coordonnées polaires.

Supposons, par ex., que les équ. (a) soient $y=\varphi t$, $y=t'$, la dérivée étant ici relative à x; pour qu'elle le devienne à t, on fera

$$y=\frac{1}{x'};\ \text{d'où}\ x'=\frac{1}{y},\ \ x''=-\frac{y'}{y^2},\ \text{etc.}$$

Quand ψ aura été généralisé par les relations (D), on y introduira ces valeurs, et ψ se trouvera exprimé en t, et en dérivées relatives à t, si x n'y entre pas. C'est ainsi que

$$\psi=\frac{[1+(y')^2]^{\frac{3}{2}}}{(y'')}\ \text{devient}\ \frac{(x'^2+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{x'y''-y'x''},\ \text{puis}\ \frac{(\ +y^2y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y(yy''+y'^2)}.$$

On voit que ψ sera exprimé en fonction de t, puisque y', y'' ont des dérivées relatives à t, qu'on tire de $y=\varphi t$; ψ sera donc connu pour chaque valeur de t.

De même, si les équ. (a) sont $y=\varphi t$, $t'^2=1+(y')^2$, les dérivées étant relatives à x, on change celle-ci en $t'^2=x'^2+y'^2$; posant $t'=1$, la variable indépendante est t, et l'on a $x'^2+y'^2=1$; d'où $x'x''+y'y''=0$. Notre valeur de ψ généralisée devient donc, en éliminant x'' ou y'', $\psi=\frac{x'}{y''}=-\frac{y'}{x''}$. Pour obtenir ψ en fonction de t, il ne reste plus qu'à tirer de $y=\varphi t$, les dérivées y', y'', relatives à t, puis $x'=\sqrt{(1-y'^2)}$, et substituer dans $\psi=x':y''$. Si au lieu de $y=\varphi t$, on eût donné $x=ft$, on aurait opéré de même sur la 2e valeur de ψ.

Prenons encore $\psi=\frac{(y''')}{x(y'')}$, x étant variable principale, et où l'on veut que t le soit à son tour, et que $t'^2=1+(y')^2$; les formules D, E donnent, après avoir multiplié haut et bas par x'^5,

$$\psi=\frac{y'''x'^2-3x'x''y''-y'x'x'''+3y'x''^2}{xx'^2(x'y''-y'x'')};$$

de $x'^2+y'^2=1$, on tire $x'x''+y'y''=0$, $x'x'''+x''^2+y'y'''+y''^2=0$.

Éliminant de cette dernière x'', puis y'^2, à l'aide des deux précédentes, on trouve $x'''=-\frac{y'y'''}{x'}-\frac{y''^2}{x'^3}$. Par là l'expression ψ devient enfin

$$\psi=\frac{y'''}{xx'y''}+\frac{4y'y''}{xx'^3}.$$

733. Quelques démonstrations peuvent être simplifiées par ces principes. Si l'on a l'équ. $y = fx$ *, et ses dérivées (y), (y'), relatives à x, et qu'on veuille trouver les dérivées de $x = \varphi y$ relatives à y, sans résoudre la première équ., on fera $y' = 1$, $0 = y'' = y'''$... dans les équ. (D), c'est-à-dire qu'il suffira de poser

$$(y') = \frac{1}{x'},\ (y'') = -\frac{x''}{x'^3}\cdots$$

Par ex., $y = a^x$ donne $(y') = ka^x$: on en tire $\frac{1}{x'} = ka^x = ky$; d'où $x' = \frac{1}{ky}$, lorsque y est variable indépendante. Il est visible qu'on a ainsi la dérivée de $x = \text{Log } y$.

Pour $y = \sin x$, on a $(y') = \cos x$; donc, on trouve $\frac{1}{x'} = \cos x$, $x' = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\sqrt{(1 - y^2)}}$, dérivée de l'équ. $x = \text{arc } (\sin = y)$ p. 321.

Enfin, de $y = \text{tang } x$ on tire la dérivée de $x = \text{arc } (\text{tang} = y)$:

$$(y') = \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{1}{x'},\quad x' = \cos^2 x = \frac{1}{1 + y^2}.$$

734. Pour généraliser une fonction ψ du 1er ordre, on change

$$(y') \text{ en } \frac{y'}{x'},\quad \text{ou } \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} : \frac{dx}{dt},\quad \text{ou } \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dx},$$

en supprimant le diviseur commun de dt; mais en conservant le

* Ceci peut se démontrer directement; car soient k et h les accroissements que prennent ensemble y et x;

$$y = fx \text{ donne } k = y'h + \frac{1}{2} y''h^2 + \ldots,$$

$$x = \varphi y \text{ donne } h = x'k + \frac{1}{2} x''k^2 + \ldots,$$

d'où $$h = x'y'h + (x'y'' + x''y'^2) \cdot \frac{1}{2} h^2 + \ldots;$$

puis $$1 = x'y',\quad x'y'' + x''y'^2 = 0, \text{ etc.} \ldots$$

Enfin, on a les valeurs de y', y''. . . .

souvenir que dans le 2e membre, dy et dx désignent des différentielles prises relativement à t. Donc, *quand une fonction dérivée* ψ *est du* 1er *ordre, et qu'on l'a exprimée par la notation différentielle* d, *elle ne devra éprouver aucune altération lorsqu'on voudra changer de variable indépendante; seulement les* dy, dx.... *qui y entrent désigneront les différentielles relatives à cette nouvelle variable.* C'est ce qui rend la notation différentielle très-commode dans le Calcul intégral, et dans toute opération où l'on est conduit à changer de variable principale, pourvu qu'il n'y entre que des dérivées de 1er ordre.

Soit $y = \sin z$; $y' = \cos z \,.\, z'$, revient à $\mathrm{d}y = \cos z \,.\, \mathrm{d}z$; d'où $\mathrm{d}z = \dfrac{\mathrm{d}y}{\cos z} = \dfrac{\mathrm{d}y}{\sqrt{1-y^2}}$; ce calcul est préférable à celui du n° 733, pour obtenir la dérivée de l'équ. $z = \text{arc}\,(\sin = y)$.

Au reste, l'avantage dont nous parlons n'a plus lieu pour le 2e ordre, car la 2e formule (D) devient

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = \frac{\mathrm{d}x \,.\, \mathrm{d}^2y - \mathrm{d}y \,.\, \mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}x^3}.$$

Ici les dérivées sont relatives à une troisième variable t, dont on suppose que x et y sont des fonctions données. Il suit des principes d'où nous sommes partis, que le 1er membre n'est autre chose que la dérivée de $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$, qu'on divise ensuite par dx; et qu'en considérant ces dy et dx comme des fonctions de t, on peut poser (n° 729, 3°)

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = \frac{\mathrm{d}\left(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)}{\mathrm{d}x}, \quad \frac{\mathrm{d}^3y}{\mathrm{d}x^3} = \frac{\mathrm{d}\left(\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right)}{\mathrm{d}x} \ldots$$

en sorte qu'il est bien facile de retrouver les équ. (D), (E)...., et même de les conserver dans la mémoire.

Des cas où la Série de Taylor est en défaut.

735. La formule (A, n° 699) peut ne pas être vraie, quand on mettra pour x un nombre a; car $y = fx$, devenant $f(a + h)$ lorsqu'on change x en $a + h$, il se pourra que, x étant engagé sous des radicaux, la valeur $a + k$, qu'on mettra pour x, laisse h sous quelque radical, parce que les constantes de la fonction f auraient dé-

truit a : ainsi h aurait des puissances fractionnaires. On sent d'ailleurs que $f(a+h)$ ne contenant d'autre variable que h, n'est pas toujours développable suivant les puissances entières et positives de h. C'est ainsi que cot h, log h.... ont des exposants négatifs pour h, puisque $h=0$ les rend infinis.

Soit $y=\sqrt{x}+\sqrt[3]{(x-a)^4}$; pour $x=a+h$ on a

$$Y=\sqrt{(a+h)}+\sqrt[3]{h^4}=\sqrt{a}+\frac{h}{2\sqrt{a}}+h^{\frac{4}{3}}-\frac{h^2}{8\sqrt{a^3}}\cdots$$

De même, $\frac{1}{(x-a)^2}+\sqrt{x}$, donne $\frac{1}{h^2}+\sqrt{(a+h)}\ldots$ ou $h^{-2}+\sqrt{a}\ldots$

Enfin, $\frac{1}{\sqrt{(x-a)}}+\sqrt{x}$ devient $h^{-\frac{1}{2}}+\sqrt{a}+\frac{h}{2\sqrt{a}}\cdots$

Jusqu'ici nos règles ont été sans exception, parce que x a conservé sa valeur générale ; mais quand nous voudrons appliquer ces règles à des cas particuliers où x sera un nombre donné, il se pourra qu'accidentellement on tombe sur une exception du théorème de Taylor ; il convient de trouver des caractères qui annoncent cette circonstance, et d'apprendre ce qu'on doit faire alors pour trouver la vraie série de $f(a+h)$.

736. Ordonnons, suivant h, le développement de $f(a+h)$; m étant la moindre puissance fractionnaire de h, comprise entre les entiers l et $l+1$; on a

$$f(a+h)=A+Bh+Ch^2+Dh^2\ldots+Lh^l+Mh^m\ldots$$

Si m est négatif, Mh^m est le 1er terme de la série. A, B, C.... sont, en général, des constantes finies et inconnues.

Puisque cette équ. a lieu, quel que soit h, prenons les dérivées relatives à cette variable :

$$f'(a+h)=B+2Ch+3Dh^2\ldots+lLh^{l-1}+mMh^{m-1}\ldots$$
$$f''(a+h)=2C+2.3Dh\ldots+l(l-1)Lh^{l-2}+m(m-1)Mh^{m-2}\ldots$$
$$f'''(a+h)=2.3D\ldots+l(l-1)(l-2)Lh^{l-3}+m(m-1)(m-2)Mh^{m-3}\ldots$$
etc....

En faisant $h=0$, on trouve

$$A=fa,\ B=f'a,\ C=\tfrac{1}{2}f''a,\ D=\tfrac{1}{6}f'''a\ldots$$

Les coefficients A, B.... L sont donc les valeurs que prend fx et ses dérivées, lorsqu'on y fait $x = a$, précisément comme dans la série de Taylor. Mais à chaque dérivation, le 1er terme disparaît, parce qu'il est constant; à la l^e dérivation, on obtient L; à la $(l+1)^e$, on a $\quad f^{(l+1)}(a+h) = m(m-1)\ldots . Mh^{m-l-1} + \ldots .;$

et comme m est une fraction $< l+1$, ce 1er terme a un exposant négatif, et $h=0$ donne $f^{(l+1)}a = \infty$. A partir de $y^{(l+1)}$, toutes les dérivées sont de même infinies, parce que cet exposant reste sans cesse négatif (n° 708, 2°).

Donc, 1° si la valeur $x = a$ ne rend infinie aucune des fonctions y, y', y''...., le développement de Taylor n'est pas fautif (n° 699).

2° *Si l'une des fonctions* y, y', y''.... *devient infinie pour* x = a, *toutes les suivantes le sont aussi; le théorème de Taylor n'est fautif qu'à partir du terme qui contient la première dérivée infinie;* h *reçoit en ce lieu un exposant fractionnaire.*

3° Si y est infini, y', y''.... le sont aussi, et h a des puissances négatives.

4° Pour $y = x^m$, comme la dérivée de l'ordre n est de la forme Ax^{m-n}, qu'aucune valeur de x ne rend infinie, si ce n'est $x=0$, quand m n'est pas entier et positif, on reconnaît que la formule du binôme $(x+h)^m$ n'est jamais fautive (ce cas excepté). On en dira autant des séries de a^x, $\text{Log}(1+x)$, $\sin x$ et $\cos x$.

737. Il reste à trouver le développement qui doit remplacer la partie fautive, quand ce cas existe : à cet effet, changez x en $a+h$ dans fx, et faites le développement de $f(a+h)$ à l'aide des séries connues. Par ex.,

$$y = c + (x-b)\sqrt{(x-a)} \text{ donne } y' = \frac{3x-2a-b}{2\sqrt{(x-a)}}.$$

$x=a$ rend y' infini; donc y'', y'''.... le sont aussi, et h doit avoir un exposant entre 0 et 1 dans le développement de $Y = f(a+h)$: le 1er terme est $y = c$. Qu'on change en effet x en $a+h$ dans la proposée, on a $Y = c + (a-b)h^{\frac{1}{2}} + h^{\frac{3}{2}}$.

Soit encore $y = c + x + (x-b)(x-a)^{\frac{3}{2}}$;

d'où $$y' = 1 + (x-a)^{\frac{3}{2}} + \tfrac{3}{2}(x-b)\sqrt{(x-a)},$$

$$y'' = 3\sqrt{(x-a)} + \frac{3(x-b)}{4\sqrt{(x-a)}};$$

$x = a$ donne $y = c + a$, $y' = 1$; les autres dérivées sont infinies. Le développement de $f(a + h)$ commence par $(c + a) + h$, les autres termes ne procèdent plus selon h^2, h^3.... En effet, mettons $a + h$ pour x, y devient

$$Y = (c + a) + h + (a - b)h^{\frac{3}{2}} + h^{\frac{5}{2}}.$$

738. Lorsqu'on a trouvé les divers termes non fautifs de la série Y, pour obtenir les suivants, retranchez de $f(a + h)$ la partie connue, le reste étant réduit, sera une fonction S de h, qu'il s'agira de développer en une série qui ne procède plus selon les puissances entières de h.

Soit A la valeur de S pour $h = 0$; on a $S = A + Mh^m$, m étant la plus haute puissance de h qui divise $S - A$, afin que le quotient $M = \frac{S - A}{h^m}$ ne soit nul, ni infini, pour $h = 0$. Cette condition fera connaître le nombre m, et la fonction M de h. De même on fera $h = 0$ dans M; et B étant la valeur que prend alors M, on posera $M = B + Nh^n$, et l'on trouvera n et N; et ainsi de suite. Donc,

$$S = A + Bh^m + Ch^{m+n} + Dh^{m+n+p} \ldots$$

sera le développement demandé. Si S doit avoir des puissances négatives de h, on fera $h = h'^{-1}$, et l'on développera selon h'; on changera ensuite les signes des exposants de h' (*voyez* les *fonct. analyt.*, nos 11 et 120).

739. Examinons ce qui arrive, lorsque $x = a$ chasse un terme P de la fonction fx; P a pour facteur quelque puissance m de $x - a$ (n° 520), ou $P = Q\,(x - a)^m$.

1° Si m est entier et positif, la dérivée m^e contient un terme dégagé du facteur $x - a$, puisque l'exposant s'abaisse successivement jusqu'à.... 2, 1, 0; ainsi le facteur Q, qui a disparu de toutes les dérivées, reparaît dans la m^e et les suivantes : le théorème de Taylor n'est pas fautif, et il ne se présente ici rien de particulier. Soit $y = (x - a)^2 \,.\, (x - b) - ax^2$; on a

$$Y = -a^3 - 2a^2 \,.\, h - bh^2 + h^3.$$

2° Quand m est une fraction comprise entre l et $l + 1$, l est $=$ ou > 1. $x = a$ fait disparaître Q de toutes les dérivées; celle de l'ordre $l + 1$ prenant le facteur $(x - a)^{m-l-1}$, l'exposant

est négatif, la dérivée infinie, et la série de Taylor fautive à partir de ce terme; et en effet, puisque le radical indiqué par $(x - a)^m$ disparaît de toute la série, et reste cependant dans $f(a+h)$, les deux membres n'auraient pas autant de valeurs l'un que l'autre, si h ne prenait ce même radical.

Ainsi $\quad y = x^3 + (x-b)(x-a)^{\frac{5}{2}}$.

donne $\quad Y = a^3 + 3a^2h + 3ah^2 + (a-b)h^{\frac{5}{2}} + h^3 + h^{\frac{7}{2}}$.

Voyez aussi les exemples, nos 735 et 737.

3° Si m est négatif, P et toutes ses dérivées, ayant $x - a$ au dénominateur, sont infinis pour $x = a$, et le développement de Taylor étant fautif dès le 1er terme, h a des puissances negatives. C'est ce qui arrive pour

$$y = \frac{x^2}{x-a}; \quad \text{d'où} \quad Y = a^2h^{-1} + 2a + h,$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{(x^2 - ax)}}, \quad Y = \frac{1}{a}\left(\frac{h}{a}\right)^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2a}\left(\frac{h}{a}\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{3}{8a}\left(\frac{h}{a}\right)^{\frac{3}{2}} \ldots$$

740. Supposons que $x = a$ fasse disparaître de y un radical qui subsiste dans y', c'est-à-dire que la 1re puissance de $x - a$ soit facteur de ce radical : pour $x = a$, y' se trouve avoir plus de valeurs que y, à cause du radical, qui n'existe que dans y'. En élevant l'équ. $y = fx$ à la puissance convenable, on pourra détruire ce radical, qui n'entrera plus dans l'équ. $z = F(x,y) = 0$. Prenons la dérivée (n° 724) $\frac{dz}{dx} + \frac{dz}{dy} \cdot y' = 0$, et substituons a pour x, et pour y la valeur unique dont il s'agit; les coefficients deviendront des nombres A et B, savoir, $A + By' = 0$. Mais par supposition, y' a au moins deux valeurs correspondantes α et β, savoir, $A + B\alpha = 0$, $A + B\beta = 0$; donc $B(\alpha - \beta) = 0$, ou $B = 0$ et $A = 0$, puisque α est différent de β. Donc notre équ. dérivée de $z = 0$ est satisfaite d'elle-même et indépendante de toute valeur de y' :

$$\frac{dz}{dx} = 0, \quad \frac{dz}{dy} = 0, \quad y' = \frac{0}{0}.$$

Passons à l'équ. dérivée du 2e ordre (n° 726), qui a la forme

$$\frac{dz}{dy} \cdot y'' + My'^2 + 2Ny' + L = 0;$$

le 1[er] terme disparaît ; et comme M, N et L sont des fonctions de x et y sans radicaux, l'équ. $My'^2 + 2Ny' + L = 0$ fera connaître les deux valeurs de y', attendu que M, N et L sont des constantes connues : à moins qu'il ne dût y avoir plus de deux valeurs de y', contre une de y, pour $x = a$; car M, N et L devraient se trouver nuls ensemble, et il faudrait recourir à l'équ. du 3[e] ordre. y'' et y''' s'en iraient, parce que leurs coefficients étant $3(My' + N)$ et $\frac{dz}{dy}$ qui sont nuls, y' entrerait alors au cube.

En général, on doit remonter à une dérivée de l'ordre du radical que $x = a$ chasse de y.

Soit, par ex., $$y = x + (x - a)\sqrt{(x - b)},$$

$$y' = 1 + \sqrt{(x - b)} + \frac{x - a}{2\sqrt{(x - b)}}.$$

$x = a$ donne $y = a$, et $y' = 1 \pm \sqrt{(a - b)}$. Mais la proposée revient à

$$(y - x)^2 = (x - a)^2 \cdot (x - b);$$

d'où $$2(y - x)y' = 2(y - x) + (x - a)(3x - 2b - a).$$

Chaque membre devient nul quand $x = y = a$. La dérivée du 2[e] ordre est

$$(y - x)y'' + (y' - 1)^2 = 3x - 2a - b,$$

qui donne $(y' - 1)^2 = a - b$, et la même valeur de y' que ci-dessus.

De même, $y = (x - a) \cdot (x - b)^{\frac{1}{3}}$, donne $y = 0$, $y' = \sqrt[3]{(a - b)}$, quand $x = a$. Mais si l'on chasse le radical, et qu'on prenne les dérivées des trois premiers ordres,

$$\begin{aligned} y^3 &= (x - a)^3 (x - b), \\ 3y^2y' &= (x - a)^2 (4x - 3b - a), \\ y^2y'' + 2yy'^2 &= (2x - a)(x - a - b), \\ y^2y''' + 6yy'y'' + 2y'^3 &= 8x - 6a - 2b. \end{aligned}$$

$x = a$ et $y = 0$ satisfont aux trois premières équ., et la 4[e] donne $y' = \sqrt[3]{a - b}$, comme ci-devant.

Si le radical disparaît de y et y', mais reste dans y'', $(x - a)^2$ est facteur de y et y', qui ont un égal nombre de valeurs, tandis que y'' en a davantage, pour $x = a$. Si donc on fait évanouir le radical de la proposée $y = fx$, et qu'on cherche y'' à l'aide de la dérivée du 2e ordre de l'équ. implicite $z = 0$, elle devra donner $y'' = \frac{0}{0}$, comme se trouvant satisfaite d'elle-même. On passera aux dérivées 3e, 4e..., qui seules peuvent faire connaître y''.

On raisonne de même quand $(x - a)^3$ est facteur d'un radical dans $y = fx$, etc.

Par exemple, $y = x + (x - a)^2 \sqrt{x}$, quand $x = a$, donne $y = a$, $y' = 1$, $y'' = \pm 2\sqrt{a}$: mais la proposée revient à

$$(y - x)^2 = (x - a)^4 x;$$

d'où

$$2(y' - 1)(y - x) = (x - a)^3 (5x - a),$$

$$(y' - 1)^2 + y''(y - x) = 2(x - a)^2 (5x - 2a),$$

$$3y''(y' - 1) + y'''(y - x) = 6(x - a)(5x - 3a),$$

$$3y''^2 + 4y'''(y' - 1) + y^{\text{IV}}(y - x) = 12(5x - 4a).$$

Quand $x = a$, on trouve $y = a$; tout se détruit dans l'équ. du 1er ordre; celle du 2e donne $y' = 1$; la suivante est $0 = 0$, et enfin la dernière donne $y'' = \pm 2\sqrt{a}$.

Limites de la Série de Taylor.

741. Prenons un terme Ah^α de la série $f(a + h)$, α étant positif; ce terme et tous ceux qui suivent ont une somme de la forme $h^\alpha(A + Bh^\beta)$ (n° 738). Or, $A + Bh^\beta$ se réduit à A lorsque h est nul, et croît par degrés insensibles avec le facteur h : si h est très-petit, A l'emporte donc sur Bh^β. Ainsi, *on peut prendre* h *assez petit pour qu'un terme quelconque de la série* f$(a + h)$ *surpasse la somme de tous ceux qui le suivent.*

742. Quand a croît et devient $a + h$, fa peut être de nature à augmenter ou à diminuer, h étant positif. Dans la serie

$$f(a + h) = fa + hf'a\ldots.$$

comme on peut prendre h très-petit, le signe de $f'a$ détermine celui du développement de $f(a + h) - fa$; si $f'a$ est positif, fa est donc croissant; le contraire arrive quand $f'a$ a le signe —. C'est ainsi que

sin a croît jusqu'à 90°, pour décroître ensuite, parce que la dérivée cos a est positive dans le 1er quadrans, négative dans le 2e. Donc, *si* f'x *reste positif depuis* x = a *jusqu'à* x = a + b, *sans devenir infini*, fx *va croissant dans toute cette étendue.*

Que dans $f'(a+h)$ on fasse croître h de zéro à b, et que $a+h=p$ et $a+h=q$ soient les valeurs qui donnent le moindre et le plus grand résultat :

$$f'(a+h)-f'p,\quad f'q-f'(a+h)$$

seront positifs : or, ce sont les dérivées, relatives à h, de *

$$f(a+h)-fa-hf'p,\quad fa+hf'q-f(a+h).$$

Ces fonctions doivent donc croître depuis $h=0$ jusqu'à $h=b$; et comme $h=0$ les rend nulles, elles sont positives dans cette étendue, ou

$$f(a+h)>fa+hf'p \quad \text{et} \quad <fa+hf'q;$$

ce serait le contraire si h était négatif : donc $f(a+h)=fa+$ un nombre compris entre $hf'p'$ et $hf'q$, c'est-à-dire que *si l'on borne la série* f(a + h) *au seul premier terme* fa, *l'erreur est* > hf'p *et* < hf'q.

Admettons maintenant que la série de Taylor ne soit pas fautive dans ses trois 1ers termes $f(a+h)=fa+hf'a+\frac{1}{2}h^2f''a\ldots.$ Soient p et q les valeurs moindre et plus grande que reçoit $f''(a+h)$, depuis $h=0$ jusqu'à $h=b$; dans cette étendue, les quantités

$$f''(a+h)-f''p,\quad f''q-f''(a+h)$$

sont positives, ainsi que leurs primitives

$$f'(a+h)-f'a-hf''p,\quad f'a+hf''q-f'(a+h),$$

puisque $h=0$ les rend nulles. Il faut en dire autant des primitives de ces dernières, qui sont

$$f(a+h)-fa-hf'a-\tfrac{1}{2}h^2f''p,\quad fa+hf'a+\tfrac{1}{2}hf''q-f(a+h);$$

donc $$f(a+h)=fa+hf'a+\tfrac{1}{2}h^2A,$$

* $F(x+h)$ devient Fz, quand on pose $x+h=z$; prenons la dérivée relative soit à x, soit à h, comme $z'=1$, elle sera également $F'z$ (n° 712). On peut donc supposer $F'(x+h)$ provenue indifféremment de la variation de x ou de h dans $F(x+h)$. Ainsi, quoique nous considérions ici des dérivées relatives à h, elles se trouvent être les mêmes que si on les eût prises pour x, et fait ensuite $x=a$.

A étant un nombre compris entre $f''p$ et $f''q$. *En bornant la série de Taylor aux deux premiers termes, l'erreur est donc comprise entre les limites* $\frac{1}{2}h^2f''p$ *et* $\frac{1}{2}h^2f''q$.

En général, si l'on arrête la série de $f(a+h)$ au terme qui précède h^n, l'erreur sera comprise entre les produits de $\frac{h^n}{1.2.3\ldots n}$ par $f^{(n)}p$ et $f^{(n)}q$, ou par des nombres, l'un plus grand que la 1re, l'autre inférieur à la 2e de ces quantités : p et q sont les valeurs de $x+h$, qui rendent $f''(x+h)$ le plus petit et le plus grand dans l'étendue comprise de $h=0$ à h quelconque. Mais il faut qu'aucune des fonctions $fx, f'x, \ldots f^{(n)}x$ ne devienne infinie depuis $x=a$ jusqu'à $x=a+h$.

Et puisque p et q sont des valeurs intermédiaires entre a et $a+h$, l'erreur est $\frac{h^n \,.\, f^{(n)}\,(a+j)}{1.2.3\ldots n}$, j étant un nombre convenablement choisi et inconnu. On peut donc poser exactement, pourvu qu'aucune des dérivées ne soit infinie,

$$f(x+h) = fx + hf'x + \frac{h^2}{2}.f''x\ldots. + \frac{h^{n-1}.f^{(n-1)}x}{1.2.3\ldots.n-1} + \frac{h^n f^{(n)}(x+j)}{1.2.3\ldots n}.$$

Nous avons ainsi une nouvelle démonstration de la série de Taylor, et nous savons mesurer l'erreur qu'on commet en l'arrêtant à un terme désigné, ou obtenir une expression finie qui en soit la valeur.

Par ex., $y=a^x$ donne $y^{(n)}=k^n\,.\,a^x$; $f^{(n)}\,(x+h)=k^n\,.\,a^{x+h}$: la plus petite et la plus grande valeur répondent à $h=0$ et h quelconque. Les limites de l'erreur sont les produits de $\frac{k^n\,h^n}{2.3\ldots.n}$ par a^x et a^{x+h}. Pour a^h, ces derniers facteurs sont 1 et a^h.

Pour $\log\,(x+h)$, les limites sont $\pm\frac{h^n}{n}\times\left(\frac{1}{x^n}\text{ et }\frac{1}{(x+h)^n}\right)$.

Enfin, $y=x^m$ donne $y^{(n)}=[mPn]x^{m-n}$ (n° 475) : l'erreur est donc entre ces limites

$$\frac{h^n[mPn]}{1.2.3\ldots.n}\times[x^{m-n}\text{ et }(x+h)^{m-n}],\text{ ou }[mCn]h^n(x^{m-n}, x+h)^{m-n}.$$

Développement des fonctions de plusieurs Variables.

743. Soit z une fonction de deux variables indépendantes x et y, $z=f(x,y)$; proposons-nous de changer x en $x+h$, y en $y+k$, et de développer selon les puissances de ces accroissements arbitraires h et k. Opérons comme nous l'avons fait nº 712 ; au lieu de faire à la fois ces deux changements, mettons d'abord $x+h$ pour x, sans faire varier y; z, considérée comme fonction d'une seule variable x, deviendra

$$f(x+h,y)=z+\frac{dz}{dx}h+\frac{d^2z}{dx^2}\cdot\frac{h^2}{2}+\frac{d^3z}{dx^3}\cdot\frac{h^3}{2.3}+\text{etc.}$$

Dans ce résultat, mettons partout $y+k$ pour y, sans changer x. D'abord le 1er terme z deviendra

$$f(x,y+k)=z+\frac{dz}{dy}\cdot k+\frac{d^2z}{dy^2}\cdot\frac{k^2}{2}+\frac{d^3z}{dy^3}\cdot\frac{k^3}{2.3}+\text{etc.}$$

De même, représentons par u, la fonction de x et y désignée par $\frac{dz}{dx}$; en mettant $y+k$ pour y, u se changera en . . . .

$u+\frac{du}{dy}k+\frac{d^2u}{dy^2}\cdot\frac{k^2}{2}+$ etc. Ainsi, remettant pour u sa valeur,

$$\frac{dz}{dx}h \text{ deviendra } \frac{dz}{dx}h+\frac{d^2z}{dxdy}hk+\frac{d^3z}{dxdy^2}\frac{k^2h}{2}+\ldots,$$

$$\frac{d^2z}{dx^2}\cdot\frac{h^2}{2} \text{ deviendra } \frac{d^2z}{dx^2}\cdot\frac{h^2}{2}+\frac{d^3z}{dx^2dy}\cdot\frac{h^2k}{2}+\ldots;$$

ainsi de suite. En réunissant ces diverses parties, on a

$$\begin{aligned}f(x+h,y+k)=z&+\frac{dz}{dy}k+\frac{d^2z}{dy^2}\frac{k^2}{2}+\frac{d^3z}{dy^3}\cdot\frac{k^3}{2.3}+\ldots\\&+\frac{dz}{dx}h+\frac{d^2z}{dxdy}\cdot kh+\frac{d^3z}{dxdy^2}\cdot\frac{k^2h}{2}+\ldots\\&+\frac{d^2z}{dx^2}\frac{h^2}{2}+\frac{d^3z}{dx^2dy}\cdot\frac{h^2k}{2}+\ldots\\&+\frac{d^3z}{dx^3}\cdot\frac{k^3}{2.3}+\ldots\end{aligned}$$

Le terme général est $\frac{d^{m+n}z}{dy^mdx^n}\times\frac{k^m\,.\,h^n}{(2.3\ldots m)(2.3\ldots n)}$.

Il est visible qu'on aurait pu changer d'abord y en $y+k$, puis dans le résultat x en $x+h$. Mais par là on aurait obtenu une série de forme différente de la première, qui aurait dû lui être identique : toutes les dérivées relatives à x auraient précédé celles de y. Il suffit, pour y parvenir, de changer ci-dessus y en x, et k en h, et réciproquement. L'identité de ce nouveau résultat avec le précédent, donne, en comparant terme à terme,

$$\frac{d^2z}{dydx}=\frac{d^2z}{dxdy},\quad \frac{d^3z}{dy^2dx}=\frac{d^3z}{dxdy^2},\quad \frac{d^3z}{dydx^2}=\frac{d^3z}{dx^2dy},$$

et en général $\dfrac{d^{m+n}z}{dy^mdx^n}=\dfrac{d^{m+n}z}{dx^ndy^m}$.

Concluons de là que *lorsqu'on doit prendre les dérivées successives d'une fonction* z *relativement à deux variables, il est indifférent dans quel ordre on fera cette double opération.*

Par ex., $z=\dfrac{x^3}{y^2}$ donne $\dfrac{dz}{dx}=\dfrac{3x^2}{y^2}$, $\dfrac{dz}{dy}=-\dfrac{2x^3}{y^3}$;

la dérivée de la 1re, par rapport à y, ainsi que celle de la 2e, relativement à x, sont également $-\dfrac{6x^2}{y^3}$.

Les dérivées du 2e ordre sont

$$\frac{d^2z}{dx^2}=\frac{6x}{y^2},\quad \frac{d^2z}{dy^2}=\frac{6x^3}{y^4};$$

donc $-\dfrac{12x}{y^3}$ est à la fois la dérivée de la 1re, relativement à y, et la dérivée du 2e ordre de $\dfrac{dz}{dy}$ relativement à x; $\dfrac{18x^2}{y^4}$ est la dérivée de $\dfrac{d^2z}{dy^2}$ par rapport à x, et aussi celle du 2e ordre de $\dfrac{dz}{dx}$ par rapport à y; et ainsi des autres.

744. Puisque x et y sont indépendants dans l'équ. $z=f(x,y)$, on peut en prendre la dérivée relativement à x seul, ou à y; désignons par p et q les fonctions connues de x et y, qu'on trouve pour ces dérivées respectives, $\dfrac{dz}{dx}=p$, $\dfrac{dz}{dy}=q$. Mais s'il y avait une dépendance établie entre y et x, telle que $y=\varphi x$, ces différences

partielles ne pourraient plus être prises à part, puisque la variation de x entraînerait celle de y. Pour renfermer ces deux cas en un seul, on a coutume de supposer que cette relation $y = \varphi x$ existe, et la dérivée se met sous la forme $\mathrm{d}z = p\mathrm{d}x + q\mathrm{d}y$ (nº 724) ; mais comme on laisse cette fonction φ arbitraire, il faudra y avoir égard dans les usages auxquels cette équ. sera réservée. Si la question exige que la dépendance soit établie, de $y = \varphi x$ on tirera $\mathrm{d}y = y'\mathrm{d}x$, et substituant on aura $\mathrm{d}z = (p + qy')\,\mathrm{d}x$. Si la dépendance n'existe pas, l'équ. différentielle se partagera d'elle-même en deux autres : car $\mathrm{d}z$ représente la différentielle de z prise relativement à x et y ensemble, ou $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x + \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}\mathrm{d}y$; et, comme l'équ. subsiste quel que soit φx, ou sa dérivée y', on aura

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}y' = p + qy', \quad \text{d'où } \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = p, \ \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y} = q.$$

$$z = \frac{ay}{\sqrt{(x^2 + y^2)}} \quad \text{donne} \quad \mathrm{d}z = \frac{-axy\mathrm{d}x + ax^2\mathrm{d}y}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}},$$

équ. qu'on partage en deux autres

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = -\frac{axy}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} \quad \frac{y\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y}{y^2 + x^2}, \quad \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y} = \frac{ax^2}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$z = \text{arc}\left(\text{tang} = \frac{x}{y}\right) \quad \text{donne} \quad \mathrm{d}z = \frac{y\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y}{y^2 + x^2},$$

l'où l'on tire $\quad \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = \frac{y}{y^2 + x^2}, \quad \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y} = \frac{-x}{y^2 + x^2}.$

Soit en général $u = 0$, une équ. entre les trois variables x, y et ; si l'on a en outre une autre relation $z = F(x, y)$, on ne doit lus considérer dans la proposée qu'une seule variable indépenlante ; ainsi l'on a (nº 713)

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x + \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}\mathrm{d}y + \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}z}\mathrm{d}z = 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

'où $\quad \left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} + p\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}z}\right)\mathrm{d}x + \left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y} + q\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}z}\right)\mathrm{d}y = 0,$

arce que $z = F(x, y)$ donne $\mathrm{d}z = p\mathrm{d}x + q\mathrm{d}y$. On tirera donc

aisément la valeur de $\frac{dy}{dx}$, qui est la dérivée qu'on aurait obtenue en éliminant z de l'équ. $u=0$.

Mais s'il n'y a aucune autre relation que $u=0$, on en pourra supposer une, pourvu qu'elle demeure arbitraire; en sorte que notre équ. se partagera en deux autres, à cause que y' est quelconque,

$$\frac{du}{dx}+p\frac{du}{dz}=0,\quad \frac{du}{dy}+q\frac{du}{dz}=0,$$

où p et q sont les dérivées où différentielles partielles de z relatives à x et y. C'est, en effet, ce qu'aurait donné l'équ. $u=0$, si l'on y eût regardé tour à tour y et x comme constants, ainsi qu'au n° 724 ; l'équ. (1) est donc la dérivée de $u=0$, qu'il y ait ou non une autre dépendance entre les variables x, y et z.

Il est inutile d'insister sur les dérivées des ordres supérieurs, et il est évident qu'on pourra différentier chaque équ. du 1[er] ordre, soit par rapport à x, soit relativement à y, ce qui en donnera trois du 2[e] ordre : et ainsi des autres ordres.

On pourra aisément trouver le développement des fonctions de 3, 4,.... variables suivant les puissances de leurs accroissements, puisqu'il ne s'agira que de répéter les mêmes opérations séparément pour chaque variable.

745. Nous avons dit que la dérivée d'une équ. entre deux variables peut servir à l'élimination d'une constante. Il se présente quelque chose de plus étendu dans le cas de trois variables : c'est ici le germe du calcul aux différences partielles, devenu si célèbre par ses applications à la Mécanique, à l'Astronomie, etc.

Soit $z=ft$, t désignant ici une fonction connue de deux variables, $t=F(x,y)$. Les dérivées relatives à x et y séparément sont (n° 711)

$$\frac{dz}{dx}\text{ ou } p=f't\times\frac{dt}{dx},\qquad \frac{dz}{dy}\text{ ou } q=f't\times\frac{dt}{dy}:$$

la fonction $f't$ est la même de part et d'autre, et les dérivées $\frac{dt}{dx}$, $\frac{dt}{dy}$, sont supposées connues en x et y. En divisant, $f't$ disparaît, et l'on trouve $p\cdot\frac{dt}{dy}=q\cdot\frac{dt}{dx}$, relation qui exprime que

z est une fonction de t, $z = ft$, quelle que soit d'ailleurs la forme de cette fonction f.

Par exemple, $z = f(x^2 + y^2)$ donne

$$p = f'(x^2 + y^2) \times 2x, \quad q = f'(x^2 + y^2) \times 2y;$$

d'où

$$py - qx = 0.$$

Or, de quelque manière que $x^2 + y^2$ entre dans la valeur de z, cette dernière équ. demeurera la même; elle s'accordera avec

$$z = \log(x^2 + y^2), \quad z = \sqrt{(x^2 + y^2)}, \quad z = \frac{x^2 + y^2}{\sin(x^2 + y^2)}, \text{ etc. . . .}$$

D'où il suit que toute fonction de $x^2 + y^2$ doit être un cas particulier de *l'équation aux différentielles partielles* $py - qx = 0$.

De même, $y - bz = f(x - az)$, lorsqu'on différentie séparément par rapport à z et x, puis à z et y, donne

$$-bp = (1 - ap) \times f', \quad (1 - bq) = -aq \times f'.$$

Éliminant f', on a $ap + bq = 1$ pour l'équ. aux différentielles partielles de la proposée, quelque forme qu'ait d'ailleurs la fonction f.

En traitant de même $\frac{y - b}{z - c} = f\left(\frac{x - a}{z - c}\right)$, on trouve

$$z - c = p(x - a) + q(y - b).$$

Nous aurons par la suite occasion de faire sentir l'importance de cette théorie ; nous nous bornerons ici à dire que les trois équ. du 2e ordre peuvent servir à éliminer deux fonctions arbitraires ft, φt, qui existeraient dans l'équ. proposée, etc.

CHAPITRE II.

APPLICATIONS DU CALCUL DIFFÉRENTIEL.

Développement en séries des fonctions d'une seule Variable.

746. Faisons $x = 0$ dans la série de Taylor (page 304), et désignons par $f, f' f''. \ldots$ les valeurs constantes que prennent $fx, f'x, f''x, \ldots$ lorsqu'on y met zéro pour x, on a

$$fh = f + hf' + \tfrac{1}{2} h^2 f'' + \tfrac{1}{6} h^3 f''' + \ldots$$

Il est vrai que cette formule n'a lieu qu'autant que $x = 0$ ne rend infinie aucune des quantités fx, $f'x$.... (p. 332). Changeant ici h en x, f', f''.... sont indépendants de h, il vient

$$y = fx = f + xf' + \frac{x^2}{2} f'' + \frac{x^3}{2.3} f''' + \frac{x^4}{2.3.4} f^{\text{iv}} + \ldots$$

Telle est la formule, due à Maclaurin, qui sert à développer toute fonction de x en série suivant les puissances entières et positives de x, lorsqu'elle en est susceptible.

Par exemple, $y = (a + x)^m$ donne

$$y' = m(a + x)^{m-1}, \quad y'' = m(m - 1)(a + x)^{m-2} \ldots;$$

d'où $f = a^m$, $f' = ma^{m-1}$, $f'' = m(m - 1)a^{m-2}$....,

ce qui reproduit la série de Newton (p. 11).

De $y = \sin x$, on tire $y' = \cos x$, $y'' = -\sin x$, $y''' = -\cos x$; d'où 0, 1, 0 et -1 pour les valeurs alternatives de f, f', f''.... jusqu'à l'infini. En substituant ci-dessus, on trouve la série de $\sin x$ (p. 228).

On appliquera aisément les mêmes calculs à $\cos x$, a^x, $\log(1 + x)$...., et, en général, à toute fonction de x. Si l'on prend $y = \text{arc}(\tan g = x)$, on retrouvera la série N (p. 233) (*voy.* n° 840).

747. Si l'une des fonctions f, f', f''.... est infinie, la formule de Maclaurin ne peut plus être employée, parce que la fonction proposée ne procède pas suivant les puissances entières et positives de la variable. Il faut alors, ou la soumettre aux procédés du n° 738, ou plutôt lui faire subir une transformation qui la rende propre à notre calcul : la supposition de $y = x^k z$ remplit souvent ce but, en déterminant la constante k, de sorte que $x = 0$ ne rende infinie aucune des fonctions z, z', z''....

Par ex., la série de $\cot x$ ne peut procéder suivant les puissances positives de x, puisque $\cot 0 = \infty$. Faisons $y = \frac{z}{x} = \cot x$; d'où $z = \frac{x \cos x}{\sin x}$, ou, à cause des formules G et H, p. 228,

$$z = \frac{1 - \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{24} x^4 - \ldots}{1 - \frac{1}{6} x^2 + \frac{1}{120} x^4 - \ldots},$$

fonction dont on aura aisément les dérivées successives, qui ne

sont pas infinies lorsque x est nul. On trouve $f = 1$, $f' = 0$, $f'' = -\frac{2}{3}$, $f''' = 0 \ldots$; d'où

$$z = 1 - \frac{x^2}{3} - \frac{x^4}{3^2 . 5} - \ldots,$$

$$\text{et } \frac{z}{x} \text{ ou } \cot x = x^{-1} - \frac{x}{3} - \frac{x^3}{3^2 . 5} - \frac{2x^5}{3^3 . 5 . 7} - \frac{x^7}{3^3 . 5^2 . 7} \ldots$$

Ce procédé a d'ailleurs l'inconvénient de ne pas faire connaître la loi de la série, quoiqu'elle soit mise ici en évidence.

Nous enseignerons bientôt les moyens d'employer le Calcul différentiel au développement de y en une fraction continue fonction de x (*voy.* n° 875). On en tire même y sous la forme de série, d'après le procédé de la note p. 162.

748. On peut appliquer aussi le théorème de Maclaurin aux équ. à deux variables. Ainsi, pour $mz^3 - xz = m$, on prendra z', z''.... (n° 724), on fera $x = 0$, et l'on aura

$$f = 1, \quad f' = \frac{1}{3m}, \quad f'' = 0, \quad f''' = \frac{-2}{27m^3} \ldots ;$$

$$\text{d'où} \qquad z = 1 + \frac{x}{3m} - \frac{x^3}{81m^3} + \frac{x^4}{243m^4} - \ldots$$

On peut même développer suivant les puissances descendantes de x. On mettra t^{-1} pour x; et après avoir obtenu la série selon les exposants croissants de t, on remettra x^{-1} pour t, et l'on aura celle qu'on demande. Par exemple, pour $my^3 - x^3y - mx^3 = 0$, on fera $x^3 = t^{-1}$; d'où $my^3t^3 - y = m$; on prendra les dérivées y', y''...., relatives à t, puis on fera partout $t = 0$; enfin, on mettra les résultats pour $f, f', f'' \ldots$ dans la série de Maclaurin, où t tiendra lieu de x. Ce calcul donnera, en remettant x^{-3} pour t,

$$y = -m - m^4x^{-3} - 3m^7x^{-6} - 12m^{10}x^{-9} + 55m^{13}x^{-12} \ldots$$

749. On propose de développer $u = fy$ suivant les puissances de x, y étant lié à x par l'équation

$$y = t + x . \varphi y, \quad \ldots \ldots \quad (1)$$

les fonctions fy et φy sont données. Observons que si, à l'aide de l'équ. (1), on éliminait y, u ne contiendrait plus que x, et la formule de Maclaurin deviendrait applicable. On chercherait alors

$u, u', u''\ldots$; puis $f, f', f''\ldots$, en faisant $x = 0$. Or, le calcul différentiel sert à trouver les dérivées $u', u''\ldots$ sans recourir à l'élimination. En effet, les dérivées (n° 711) relatives à x et t de l'équ. $u = fy$, sont

$$\frac{du}{dx} = \frac{dy}{dx} \cdot f'y, \quad \frac{du}{dt} = \frac{dy}{dt} \cdot f'y, \quad \ldots \quad (2)$$

d'où
$$\frac{du}{dt} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} \cdot \frac{dy}{dt},$$

en éliminant $f't$. Or les dérivées de l'équ. (1) relatives à t et à x sont $\frac{dy}{dx} = 1$, $\frac{dy}{dx} = \varphi y$, et l'équ. précédente devient

$$\frac{du}{dx} = \frac{du}{dt} \cdot \varphi y. \quad \ldots \quad (3)$$

Nous pouvons tirer de là toutes les dérivées successives de u par rapport à x; car prenons-en les dérivées relativement à x et à t, nous aurons

$$\frac{d^2u}{dx^2} = \frac{d^2u}{dxdt}\,\varphi y + \frac{du}{dt} \cdot \frac{dy}{dx} \cdot \varphi' y,$$

$$\frac{d^2u}{dxdt} = \frac{d^2u}{dt^2}\,\varphi y + \frac{du}{dt} \cdot \frac{dy}{dt}\,\varphi' y,$$

d'où
$$\frac{d^2u}{dx^2} = \frac{d^2u}{dt^2}\,\varphi^2 y + \frac{du}{dt} \left(\frac{dy}{dt}\,\varphi y + \frac{dy}{dx}\right) \varphi' y;$$

mais $\frac{dy}{dt} = 1$ et $\frac{dy}{dx} = \varphi y$; donc la parenthèse se réduit à $2\varphi y$, et le produit par $\varphi' y$, à $2\varphi y \cdot \varphi' y$ = dérivée de $\varphi^2 y$ relative à t; ainsi

$$\frac{d^2u}{dx^2} = \frac{d^2u}{dt^2}\,\varphi^2 y + \frac{du}{dt}\;\frac{d\,(\varphi^2 y)}{dt} = \frac{d\left(\frac{du}{dt} \cdot \varphi^2 y\right)}{dt}; \quad \ldots \quad (4)$$

Donc, en multipliant une dérivée $\frac{du}{dt}$ par $\varphi^2 y$, et prenant de nouveau la dérivée de ce produit par rapport à t, on passe à la dérivée de l'ordre suivant. Maintenant représentons $\frac{du}{dt} \cdot \varphi^2 y$ par v, nous

avons $\frac{d^2u}{dx^2}=\frac{dv}{dt}$, et d'après la règle qu'on vient de trouver,

$$\frac{dv}{dx}=\frac{d\left(\frac{du}{dt}\cdot\varphi^3y\right)}{dt^2},\quad\text{puis}\quad\frac{d^3u}{dx^3}=\frac{d^2v}{dxdt};$$

donc $$\frac{d^3u}{dx^3}=\frac{d^2\left(\frac{du}{dt}\cdot\varphi^3y\right)}{dt^2}; \quad \ldots \ldots \ldots \quad (5)$$

de même $$\frac{d^4u}{dx^4}=\frac{d^3\left(\frac{du}{dt}\cdot\varphi^4y\right)}{dt^3}; \quad \ldots \ldots \ldots \quad (6)$$

et ainsi de suite ; la loi est manifeste.

Faisons maintenant $x=0$ dans la fonction fy qu'on veut développer, et dans ses dérivées successives, pour obtenir les expressions qui ont été désignées par $f, f', f''\ldots$ dans la série de Maclaurin (nº 746) ; l'équ. (1) se réduit à $y=t$, d'où $fy=ft$, $\frac{du}{dt}$ (équ. 2) devient $f'y$ ou $f't$; ainsi $\frac{du}{dx}=f't\,.\,\varphi t$ (équ. 3) ; $\frac{d^2u}{dx^2}$ devient $\frac{d(f't\,.\,\varphi^2t)}{dt}$ (équ. 4), $\frac{d^3u}{dx^3}=\frac{d^2(f't\,.\,\varphi^3t)}{dt^2}$ (équ. 4) ; etc., et on a enfin, les accents désignant des dérivées prises par rapport à t,

$$fy=ft+x\varphi t\,.\,f't+\frac{x^2}{2}(\varphi^2t\,.\,f't)'+\frac{x^3}{2\,.\,3}(\varphi^3t\,.\,f't)''+\text{etc.}$$

Telle est la *formule de Lagrange* (voy. *Méc. cél.*, t. I, p. 177).

Si fy est $=y$, d'où $f'y=1=f't$, on a simplement

$$y=t+x\varphi t+\frac{x^2}{2}(\varphi^2t)'+\frac{x^3}{2\,.\,3}(\varphi^3t)''+\text{etc.}$$

Soit demandée la valeur développée de $u=y^m$, en supposant $y=t+xy^n$. Comparant à l'équation (1), on a

$$ft=t^m,\quad f't=mt^{m-1},\quad \varphi t=t^n,\quad \varphi tf't=mt^{m+n-1};$$
$$\varphi^2t\,.\,f't=mt^{m+2n-1},\quad \varphi^3t\,.\,f't=mt^{m+3n-1}\ldots;$$

d'où $$y^m=t^m+mxt^{m+n-1}+m\,.\,\frac{m+2n-1}{2}x^2t^{m+2n-2}+\ldots$$

On aurait aussi la valeur de y^n, dans le cas où l'équ. (1) serait

remplacée par $\alpha + \beta y + \gamma y^m = 0$; il suffirait de faire ici

$$t = -\frac{\alpha}{\beta}, \quad x = -\frac{\gamma}{\beta}.$$

750. En faisant ci-devant $x = 1$, on trouve le développement de fy, lorsque $y = t + \varphi y$,

$$fy = ft + \varphi t f't + \tfrac{1}{2}(\varphi^2 t \cdot f't)' + \tfrac{1}{6}(\varphi^3 t \cdot f't)'' + \ldots$$

On tire de là la puissance n de la moindre racine y de l'équation $y = t + \varphi y$, en faisant $fy = y^n$, $ft = t^n$, $f't = nt^{n-1}$;

$$y^n = t^n + n\left[\varphi t \cdot t^{n-1} + \tfrac{1}{2}(\varphi^2 t \cdot t^{n-1})' + \tfrac{1}{6}(\varphi^3 t \cdot t^{n-1})'' \ldots\right].$$

Les traits indiquent des dérivées relatives à t ; on ne met pour t sa valeur numérique, qu'après les calculs (voyez *Résol. numér.*, note XI.)

Par ex., l'équation $\gamma y^2 - \beta y + \alpha = 0$ est ramenée à la forme $y = t + \varphi y$ en posant

$$t = \frac{\alpha}{\beta}, \ \varphi t = \frac{\gamma}{\beta} t^2, \ \varphi t \cdot t^{n-1} = \frac{\gamma}{\beta} t^{n+1}, \ \varphi^2 t \cdot t^{n-1} = \frac{\gamma^2}{\beta^2} t^{n+3} \ldots ;$$

prenant les dérivées convenables, on trouve enfin

$$y^n = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^n \left[1 + n\left(\frac{\alpha\gamma}{\beta^2}\right) + n\frac{n+3}{2}\left(\frac{\alpha\gamma}{\beta^2}\right)^2 + n\frac{n+4}{2} \cdot \frac{n+5}{3}\left(\frac{\alpha\gamma}{\beta^2}\right)^3 \ldots\right],$$

terme général $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^n \cdot \frac{n}{i} \times [(2i + n - 1)\ C\ (i-1)] \times \left(\frac{\alpha\gamma}{\beta^2}\right)^i$.

Pour avoir la puissance n de la plus grande racine y, il faudrait changer y en y^{-1}, c'est-à-dire remplacer, dans le résultat, α par γ, γ par α, et y^n par y^{-n}.

751. Lorsqu'on veut la 1re puissance de y, l'équation étant $y = t + \varphi y$, on fait ci-dessus $n = 1$,

$$y = t + \varphi y = t + \varphi t + \tfrac{1}{2}(\varphi^2 t)' + \tfrac{1}{6}(\varphi^3 t)'' + \ldots$$

Cette suite s'applique surtout à la *méthode inverse des séries*, qui consiste à tirer la valeur de y de l'équ. $\alpha + \beta y + \gamma y^2 + \ldots = 0$, qu'on réduit à la forme $y = t + \varphi y$, en posant

$$t = -\frac{\alpha}{\beta}, \quad \varphi t = -\frac{\gamma t^2 + \delta t^3 \ldots}{\beta}, \quad \varphi^2 t = \frac{\gamma^2 t^4 + 2\gamma\delta t^5 \ldots}{\beta^2} \ldots,$$

il vient enfin

$$y = -\frac{\alpha}{\beta} - \frac{\alpha^2\gamma}{\beta^3} + \frac{\alpha^3\delta}{\beta^4} - \frac{\alpha^4\varepsilon}{\beta^5} \ldots - \frac{2\alpha^3\gamma^2}{\beta^5} + \frac{5\alpha^4\gamma\delta}{\beta^6} \ldots - \frac{5\alpha^4\gamma^3}{\beta^7} \ldots$$

Sur la Résolution des Équations.

752. Démontrons de nouveau plusieurs théorèmes sur les équations.

I. Soit y une fonction de x, qui admet les facteurs $(x-a)^m$, $(x-b)^n\ldots$, en sorte qu'on ait

$$y=(x-a)^m\,.\,(x-b)^n\ldots\times P,$$

P ne contenant que des facteurs du 1er degré inégaux; prenant les log. des deux membres et leurs dérivées, on trouve

$$y'=(x-a)^{m-1}(x-b)^{n-1}\ldots[mP(x-b)\ldots+nP(x-a)\ldots\text{etc.}]$$

Ainsi, la fonction de x proposée a $(x-a)^{m-1}(x-b)^{n-1}\ldots$ pour plus grand commun diviseur, avec sa dérivée, ce qui reproduit le théorème des racines égales (p. 55).

II. La dérivée de $\mathrm{l}\,(\cos x\pm\sin x\,.\,\sqrt{-1})$, est (nº 719) $\dfrac{-\sin x\pm\cos x\,.\,\sqrt{-1}}{\cos x\pm\sin x\,.\,\sqrt{-1}}$, qui se réduit à $\pm\sqrt{-1}$. Or, $\sqrt{-1}$ est aussi la dérivée de $x\sqrt{-1}$, donc (nº 808)

$$\mathrm{l}\,(\cos x\pm\sin x\,.\,\sqrt{-1})=\pm x\sqrt{-1}.$$

Comme cette équ. doit avoir lieu quel que soit x, on n'ajoute pas de constante arbitraire A, puisque $x=0$ donnerait $A=0$. On en conclut le théorème (I, p. 232), d'où il sera aisé de tirer les formules K, L, M, et par suite les facteurs de $x^m\pm a^m$ (p. 128).

III. L'équ. $x^m+px^{m-1}+\ldots+u=0$, étant décomposée en ses facteurs simples $(x-a)(x-b)(x-c)\ldots$, les log. de ces deux fonctions de x sont identiques ; d'où

$$\mathrm{l}\,(x^m+px^{m-1}+\ldots)=\mathrm{l}\,(x-a)+\mathrm{l}\,(x-b)+\ldots;$$

et prenant les dérivées de part et d'autre, on retrouve l'équ. de la page 148, et par suite le théorème de Newton sur les sommes des puissances des racines, qui forment une série récurrente dont l'échelle de relation est $-p,\ -q\ldots,\ -u$.

IV. Fx désignant une fonction rationnelle et entière de x, soit k la partie approchée d'une des racines de l'équ. $Fx=0$, et y la correction qu'elle doit subir ; d'où $x=k+y$, et

$$F(k+y)=Fk+yF'k+\tfrac{1}{2}y^2F''k+\ldots=0.$$

Lorsqu'on néglige y^2, y^3...., attendu que y est une petite quantité, on trouve la méthode de Newton (p. 77).

En ne négligeant aucun terme, on peut tirer la valeur de y de cette équ., à l'aide de la série n° 751. On y fera $\alpha = Fk$, $\beta = F'k$....,

et posant, pour abréger, $z = \frac{Fk}{F'k}$, qui est la première correction en signe contraire, il vient

$$y = -z - \frac{z^2}{2} \cdot \frac{F''k}{F'k} + \frac{z^3}{2 \cdot 3} \cdots$$

La racine cherchée, ou $k + y$, est donc

$$x = k - z - \frac{z^2}{2} \cdot \frac{F''k}{F'k} + \frac{z^3}{2 \cdot 3}\left[\frac{F'''k}{F'k} - 3\left(\frac{F''k}{F'k}\right)^2\right] + \cdots$$

C'est ainsi que de l'équ. $x^3 - 2x = 5$, on tire $k = 2,1$ pour valeur approchée de l'une de ses racines (p. 78); or

$$Fk = k^3 - 2k - 5 = 0,061,\ F'k = 3k^2 - 2 = 11,23,\ F''k = 6k = 12,6;$$

donc $\qquad z = \frac{Fk}{F'k} = \frac{61}{11230}, \qquad \frac{F''k}{F'k} = \frac{1260}{1123},$

et $\qquad x = 2,1 - 0,00543188 - 0,00001655 = 2,09455157.$

Sur les Valeurs 0, $\frac{0}{0}$, $0 \times \infty$, etc.

753. Nous avons dit (p. 39, 2°) que quand $x = a$ change une fraction proposée en $\frac{0}{0}$, $x - a$ est facteur commun des deux termes, et qu'il faut la dégager de ce facteur, qui peut y entrer à des puissances différentes. Le calcul différentiel donne un moyen facile d'atteindre ce but, et d'avoir la valeur de cette fraction, dans le cas de $x = a$, *valeur qui est nulle, ou finie, ou infinie*. Changeons x en $x + h$; la fraction proposée

$$\frac{P}{Q} \text{ deviendra } \frac{P + hP' + \frac{1}{2}h^2P'' + \cdots}{Q + hQ' + \frac{1}{2}h^2Q'' + \cdots}; \ldots (A)$$

faisons ensuite $x = a$: P et Q sont nuls; on divise ensuite haut et bas par h, et l'on a

$$\frac{P' + \frac{1}{2}hP'' + \cdots}{Q' + \frac{1}{2}hQ'' + \cdots} = \frac{P'}{Q'},$$

quand $h = 0$; les suppositions de $x = a$ et $h = 0$ reviennent à avoir changé x en a. Ainsi, lorsque $x = a$, $\frac{P}{Q} = \frac{P'}{Q'}$. S'il arrive que P' ou Q' soit encore $= 0$, la fraction est donc nulle ou infinie ; et si P' et Q' disparaissent ensemble des développements (A), il faudra les diviser par $\frac{1}{2}h^2$ et faire $h = 0$; on aura, pour $x = a$, $\frac{P}{Q} = \frac{P''}{Q''}$; et ainsi de suite.

Donc, *pour avoir la valeur d'une fraction qui devient* $\frac{0}{0}$ *lorsque* x = a, *on différentiera le numérateur et le dénominateur un même nombre de fois, jusqu'à ce que l'un ou l'autre ne devienne plus zéro lorsqu'on mettra* a *pour* x. Il ne faut pas craindre que toutes les dérivées P', Q', P'', Q''.... soient nulles, car alors, quel que soit h, on aurait $f(a + h) = 0$, ce qui est impossible.

754. Voici quelques exemples de cette théorie :

I. La somme des n premiers termes de la progression

$\div 1 : x : x^2 : x^3 \ldots$, est $\frac{x^n - 1}{x - 1}$ (n° 144); si $x = 1$, cette fraction devient $\frac{0}{0}$; prenant les dérivées des deux termes, qui sont nx^{n-1} et 1, puis faisant $x = 1$, il vient n pour la somme cherchée, ce qui est évident.

II. Soit $\frac{ax^2 + ac^2 - 2acx}{bx^2 - 2bcx + bc^2}$, qui devient $\frac{0}{0}$ pour $x = c$; les dérivées du 1er ordre donnent encore $\frac{ax - ac}{bx - bc} = \frac{0}{0}$; il faut procéder à une nouvelle dérivation, et l'on a $\frac{a}{b}$. Il a fallu deux opérations successives, parce que $(x - c)^2$ était facteur commun.

III. De même $\frac{x^3 - ax^2 - a^2x + a^3}{x^2 - a^2}$ donne $\frac{0}{0}$ pour $x = a$; les dérivées des deux termes sont $3x^2 - 2ax - a^2$, et $2x$; la 1re est nulle quand $x = a$; zéro est donc la valeur cherchée, ce qui vient de ce que le facteur du numérateur est $(x - a)^2$, et que celui du dénominateur est $(x - a)$. Pour la même fraction renversée, on aurait trouvé l'infini, par une raison semblable. C'est ce qui arrive pour $x = a$ dans

$$\frac{ax - x^2}{a^4 - 2a^3x + 2ax^3 - x^4}.$$

IV. $x=0$ rend $\frac{a^x-b^x}{x}=\frac{0}{0}$; les dérivées donnent

$$\frac{a^x\,\mathrm{l}\,a-b^x\,\mathrm{l}\,b}{1}=\mathrm{l}\,a-\mathrm{l}\,b=\mathrm{l}\left(\frac{a}{b}\right).$$

V. Pour $y=\frac{1-\sin x+\cos x}{\sin x+\cos x-1}$, dans le cas où l'arc x est le quadrans, on a

$$y=\frac{-\cos x-\sin x}{\cos x-\sin x}=1.$$

VI. Quand $x=a$, $\frac{\sqrt{(2a^3x-x^4)}-a\sqrt[3]{(a^2x)}}{a-\sqrt[4]{(ax^3)}}$ devient $\frac{0}{0}$: les dérivées des deux termes donnent

$$\frac{a^3-2x^3}{\sqrt{(2a^3x-x^4)}}-\frac{a^2}{3\sqrt[3]{(ax^2)}}:-\frac{3a}{4\sqrt[4]{(a^3x)}}=\frac{16a}{9}.$$

VII. On verra de même que $x=1$ donne $\frac{0}{0}$ pour

$$\frac{1-x+\mathrm{l}\,x}{1-\sqrt{(2x-x^2)}}=-1,\quad \text{et}\quad \frac{x^x-x}{1-x+\mathrm{l}x}=-2.$$

755. La méthode que nous venons d'exposer cessera d'être applicable si le théorème de Taylor est *fautif dans l'ordre des termes qu'on est obligé de conserver :* ce qu'on reconnaîtra aisément, puisque l'une des dérivées auxquelles on sera conduit deviendra infinie. Alors il faudra changer x en $a+h$ dans P et Q, et effectuer les développements (n° 738), en se bornant au 1[er] terme de chacun. On aura $\frac{P}{Q}=\frac{Ah^m+\ldots}{Bh^n+\ldots}$, m ou n étant fractionnaire ou négatif. On divisera les deux termes par la puissance la plus basse de h, et l'on fera $h=0$. Si $m=n$, on a la valeur finie $\frac{A}{B}$; la proposée est nulle ou infinie, suivant que m est $>$ ou $<n$.

I. Soit $\frac{(x^2-a^2)^{\frac{3}{2}}}{(x-a)^{\frac{3}{2}}}$; $x=a$ donne $\frac{0}{0}$, et il est inutile de recourir aux dérivées des deux termes, puisqu'elles deviennent infinies

(n° 739, 2°). Faisant $x = a + h$, on trouve pour $h = 0$,

$$\frac{(2ah + h^2)^{\frac{3}{2}}}{h^{\frac{3}{2}}} = \frac{(2a + h)^{\frac{3}{2}}}{1} = (2a)^{\frac{3}{2}}.$$

II. $\frac{\sqrt{x} - \sqrt{a} + \sqrt{(x-a)}}{\sqrt{(x^2 - a^2)}}$ devient $\frac{0}{0}$ pour $x = a$; faisons $x = a + h$; nous avons

$$\frac{(a+h)^{\frac{1}{2}} - a^{\frac{1}{2}} + h^{\frac{1}{2}}}{(2ah + h^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{h^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} a^{-\frac{1}{2}} h + \ldots}{h^{\frac{1}{2}} (2a + h)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{(2a)}},$$

en développant par la formule du binôme, divisant haut et bas par $h^{\frac{1}{2}}$, et faisant ensuite $h = 0$.

III. Pour $x = c$ dans $\frac{(x-c)\sqrt{(x-b)} + \sqrt{(x-c)}}{\sqrt{2c} - \sqrt{(x+c)} + \sqrt{(x-c)}}$, on mettra $c + h$ pour x; on pourra même employer la formule de Taylor à la recherche des termes provenus de $(x - c)\sqrt{(x-b)}$ et $\sqrt{(x+c)}$, pour lesquels elle n'est pas fautive (n° 739); on aura $\frac{\sqrt{h} + h\sqrt{(c-b)} + \ldots}{\sqrt{h} - \frac{1}{2} h (2c)^{-\frac{1}{2}} + \ldots}$; divisant par $\sqrt{h}$ et faisant ensuite $h = 0$, on trouve 1 pour la valeur cherchée.

IV. $\frac{(x^2 - a^2)^{\frac{3}{2}} + x - a}{(1 + x - a)^3 - 1} = \frac{h + (2ah)^{\frac{3}{2}} \ldots}{3h + 3h^2 \ldots}$, en changeant x en $a + h$, et développant; divisant ensuite haut et bas par h, et faisant $h = 0$, on a $\frac{1}{3}$ pour valeur de la proposée quand $x = a$.

756. Lorsque $x = a$ donne à un produit $P \times Q$ la forme $0 \times \infty$, on met pour Q une valeur $\frac{1}{R}$, telle que R soit nul pour $x = a$; alors on a la fraction $\frac{P}{R}$ qui devient $\frac{0}{0}$. Par ex.,

$$y = (1 - x) \,.\, \text{tang}\,(\tfrac{1}{2}\pi x),$$

est dans ce cas quand $x = 1$; comme tang $= \frac{1}{\text{cot}}$, on a

$y = \frac{1 - x}{\cot(\frac{1}{2}\pi x)} = \frac{2}{\pi}$, en traitant cette fraction par les règles prescrites.

Quand $\frac{P}{Q}$ devient $\frac{\infty}{\infty}$, P et Q ont la forme $\frac{1}{R}$, R devenant nul pour $x = a$; ainsi la proposée rentre dans le cas de $\frac{0}{0}$.

Soit, par ex., $P = \text{tang}\left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{x}{a}\right)$, et $Q = \frac{x^2}{a(x^2 - a^2)}$; la fraction $\frac{P}{Q}$ devient $\frac{\infty}{\infty}$ lorsque $x = a$; mais elle se change en

$$\frac{P}{Q} = \frac{a(x^2 - a^2)}{x^2 \cot\left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{x}{a}\right)}, \quad \text{d'où} \quad \frac{2a^2}{-\frac{1}{2}\pi a} = -\frac{4a}{\pi}.$$

Enfin, si l'on a $\infty - \infty$ pour $x = a$, on transformera l'expression en $\frac{1}{P} - \frac{1}{Q}$, P et Q étant nuls, ou $\frac{Q - P}{PQ}$, qui rentre dans ce qu'on vient de dire. C'est ainsi que $x \text{ tang } x - \frac{1}{2}\pi \text{ séc } x$, dans le cas où $x = 90°$, devient

$$\frac{x \sin x - \frac{1}{2}\pi}{\cos x} = \frac{0}{0}, \quad \text{d'où} \quad \frac{x \cos x + \sin x}{-\sin x} = -1.$$

Des Maxima et Minima.

757. Lorsqu'en attribuant à x différentes valeurs successives dans une fonction $y = fx$, elle croît d'abord pour diminuer ensuite, on donne le nom de *maximum* à l'état de la fonction qui sépare les accroissements des décroissements; et si fx diminue d'abord pour croître ensuite, le *minimum* est la valeur qui sépare ces deux états. On dit donc qu'*une fonction* fx *est rendue un* maximum *ou un* minimum *par la supposition de* x = a, *lorsqu'elle est plus grande dans le* 1er *cas, et plus petite dans le* 2e, *que les valeurs qu'elle aurait en prenant pour* x *deux nombres, l'un* > a, *l'autre* < a, IMMÉDIATEMENT.

Ainsi, pour juger si fa est un *maximum* ou un *minimum*, il faut que $f(a + h)$ et $f(a - h)$ soient tous deux $> fa$, ou tous deux $< fa$, quelque petit que soit h. Mais

$$f(a \pm h) = fa \pm hf'a + \frac{h^2}{2}f''a \pm \text{etc.}$$

Dans ces développements, on pourra toujours prendre h assez petit pour que le terme $hf'a$ l'emporte sur la somme de ceux qui le suivent (nº 741), en sorte que le signe de $hf'a$ sera celui de toute la suite à partir de ce terme. On aura donc $f(a \pm h) = fa \pm ah$; fa ne pouvant pas être compris entre ces deux valeurs, n'est ni *maximum* ni *minimum* : ainsi, il faut que $f'a = 0$. *Pour trouver les valeurs de* x, *qui sont seules capables de rendre* fx *un maximum ou un minimum, il faut donc résoudre l'équation* $y' = f'x = 0$.

Alors nos développements sont

$$f(a \pm h) = fa + \tfrac{1}{2} h^2 f''a \pm \tfrac{1}{6} h^3 f'''a + \ldots.$$

Si $f''a$ est positif, on voit que $f(a \pm h) = fa + ah^2$; d'où il suit qu'il y a *minimum*; on a un *maximum* quand $f''a$ est négatif.

Mais si $f''a = 0$,

$$f(a \pm h) = fa \pm \tfrac{1}{6} h^3 f'''a + \tfrac{1}{24} h^4 f^{\text{IV}}a \pm \ldots,$$

et l'on retombe sur un développement semblable à celui du 1er cas, d'où il résulte qu'il n'y a ni *maximum*, ni *minimum*, quand $f'''a$ n'est pas nul : et si $f'''a = 0$, $f^{\text{IV}}a$ est négatif pour le 1er de ces états, et positif pour le 2e ; et ainsi de suite.

Après avoir trouvé les racines de l'équation $f'x = 0$, *on substituera chacune dans* $f''x$, $f'''x \ldots$, *jusqu'à la première dérivée qui n'est pas nulle : la racine* a *correspondra à un* maximum *si cette dérivée est de signe contraire à celui de* fa, *et à un minimum si les signes sont les mêmes; mais il faut que cette dérivée soit d'ordre pair, car sans cela la racine* a *ne répondrait ni à un maximum, ni à un minimum.*

758. Présentons quelques exemples.

I. Pour $y = \sqrt{(2px)}$, on a $y' = \dfrac{p}{\sqrt{(2px)}}$; cette quantité ne pouvant être rendue nulle, la fonction $\sqrt{(2px)}$ n'est susceptible, ni de *maximum*, ni de *minimum*.

II. $y = b - (x - a)^2$ donne $y' = -2(x - a) = 0$, d'où $x = a$, $y'' = -2$; ainsi $x = a$ donne le *maximum* $y = b$, puisque y'' est négatif; c'est ce qui est d'ailleurs visible.

$y' = b + (x - a)^2$ a au contraire un *minimum*.

En général $y' = X(x - a)^n = 0$ donne $x = a$,

$$y'' = [X'(x - a) + nX](x - a)^{n-1}, \; y''' = \text{etc.}$$

Il sera facile de voir que $x = a$ donne un *maximum* ou un *mini-*

mum, suivant que X devient par là négatif ou positif, pourvu que n soit impair,

III. Soit $y = \frac{x}{1+x^2}$; on en tire (nos 706 et 705),

$$y' = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}, \quad y'' = -2x\,\frac{1+2y'(1+x^2)}{(1+x^2)^2},$$

$y'=0$ donne $x=\pm 1$; mais alors $y=\pm\frac{1}{2}$ et $y''=\mp\frac{1}{2}$; donc $x=1$ répond au *maximum* $\frac{1}{2}$; et $x=-1$ au *minimum* $-\frac{1}{2}$; ou plutôt au *maximum* négatif, puisque nous sommes convenus de regarder les quantités comme plus petites quand elles sont plus avancées vers l'infini négatif.

IV. Pour $y^2-2mxy+x^2=a^2$, on trouve (nos 724 et 705)

$$y' = \frac{my-x}{ymx}, \quad y'' = \frac{2my'-y'^2-1}{y-mx} \ldots\ldots$$

$y'=0$ donne $my=x$; éliminant x et y à l'aide de la proposée, on trouve

$$x = \frac{\pm ma}{\sqrt{(1-m^2)}}, \quad y = \frac{\pm a}{\sqrt{(1-m^2)}}, \quad y'' = \frac{\mp 1}{a\sqrt{(1-m^2)}};$$

on a donc un *maximum* et un *minimum*.

V. Pareillement $x^3-3axy+y^3=0$ donne

$$y' = \frac{ay-x^2}{y^2-ax}, \quad y'' = \frac{2(ay'-x-yy'^2)}{y^2-ax} \ldots;$$

on voit que $x=0$ répond au *minimum* $y=0$, et $x=a\sqrt[3]{2}$ au *maximum* $y=a\sqrt[3]{4}$ (*voyez* p. 382 et fig. 47).

VI. Partager un nombre a en deux parties, de sorte que le produit de la puissance m de l'une, par la puissance n de l'autre, soit le plus grand possible. En prenant x pour l'une des parties, il faudra rendre un *maximum* la quantité

$$y = x^m(a-x)^n;$$

d'où $y' = x^{m-1}(a-x)^{n-1}[ma-x(m+n)]$,

$$y'' = x^{m-2}(a-x)^{n-2}[(m+n-1)(m+n)x^2 - \text{etc.}].$$

$y'=0$, donne $x=0$, $x=a$ et $x=\frac{ma}{m+n}$; cette dernière racine

convient au *maximum* qui est $m^m n^n \left(\frac{a}{m+n}\right)^{m+n}$; les deux autres répondent à des *minima* quand m et n sont pairs.

Pour partager un nombre a en deux parties dont le produit soit le plus grand possible, il faut en prendre la moitié (nº 97, 3º). C'est ce qu'on voit quand $m = n = 1$.

VII. Quel est le nombre x dont la racine x^e est un *maximum?* On a (nº 720)

$$y = \sqrt[x]{x},\ \ y' = y.\frac{1 - 1x}{x^2} = 0 \text{ et } 1x = 1\,;$$

le nombre cherché est donc la base des logarithmes népériens, ou

$$x = e = 2{,}71828\ldots.$$

VIII. De toutes les fractions quelle est celle qui surpasse sa puissance m^e du plus grand nombre possible? Soit x cette fraction; on a $y = x - x^m$,

$$y' = 1 - mx^{m-1} = 0,\quad \text{d'où } x = \sqrt[m-1]{\frac{1}{m}}.$$

IX. De toutes les cordes supplémentaires d'une ellipse, quelles sont celles qui forment le plus grand angle? En désignant par a et b les demi-axes, α la tangente de l'angle que l'une de ces cordes fait avec les x, l'angle des cordes (nº 409) a pour tangente $\frac{a^2\alpha^2 + b^2}{\alpha(a^2 - b^2)}$; c'est cette quantité qu'il s'agit de rendre un *maximum* par une valeur convenable de α, ou plutôt (en négligeant le diviseur constant $a^2 - b^2$)

$$y = a^2\alpha + \frac{b^2}{\alpha},\quad \text{d'où } y' = a^2 - \frac{b^2}{\alpha^2} = 0,\ \alpha = \pm\frac{b}{a};$$

donc les cordes dont il s'agit sont dirigées à l'une des extrémités du petit axe : leurs parallèles, menées par le centre, sont les diamètres conjugués qui forment le plus grand angle possible : ces diamètres sont égaux (*voy.* p. 405 du 1er vol.).

X. De tous les triangles construits sur une même base a, et *Isopérimètres,* c'est-à-dire de même contour $2p$, quel est celui dont l'aire est la plus grande? On a (nº 318, III)

$$y^2 = p\,(p - a)\,(p - x)\,(a + x - p),$$

en désignant l'aire par y, et l'un des côtés inconnus par x; car le 3e côté est $2p - a - x$. Pour rendre y^2 un *maximum*, prenons les log. et la dérivée, nous aurons

$$\frac{-1}{p-x}+\frac{1}{a+x-p}=0, \text{ d'où } 2x=2p-a;$$

ainsi le triangle cherché est isocèle.

En général, de tous les polygones isopérimètres, celui dont l'aire est la plus grande est équilatéral; car soit $ABCDE$ (fig. 41) le polynôme *maximum*, si AB n'est pas $=BC$, faisons le triangle isocèle AIC, tel que $AI+IC=AB+BC$; nous aurons le triangle $AIC > ABC$, d'où $AICDE > ABCDE$, ce qui est contraire à l'hypothèse.

XI. Sur une base donnée $AC=a$ (fig. 42), quel est le plus petit des triangles circonscrits au cercle OF? Soit le rayon $OF=r$, $AF=AD=x$, le périmètre $2p$, CF sera $=CE=a-x$; $BE=BD$ sera $=p-a$. Les trois côtés étant a, $p-x$ et $p-a+x$, on a pour l'aire y du triangle (nº 318, III)

$$y^2 = px(p-a)(a-x),$$

d'où

$$yr^2 = x(y-ar)(a-x);$$

à cause de $y=pr$ (nº 318, IV) : prenant la dérivée, et faisant $y'=0$, on trouvera $(y-ar)(a-2x)=0$; d'où $x=\frac{1}{2}a$; F est le milieu de AC; les deux autres côtés sont égaux, et le triangle est isocèle.

XII. Sur les côtés d'un carré $ABCD$ (fig. 35), prenons les parties égales quelconques Aa, Bb, Cc, Dd; la figure $abcd$ sera un carré; car, 1º $aB=bC$...., le triangle $dAa=aBb=$ ...., d'où

$$ab=bc=cd=ad;$$

2º a est le sommet de deux angles compléments, et de l'angle dab; donc celui-ci est droit; de même pour l'angle abc, etc....

Cela posé, de tous les carrés inscrits dans un carré donné, on demande quel est le plus petit? Soit $AB=a$, $Aa=x$, d'où $aB=a-x$; puis le triangle Aad donne

$$ad^2=2x^2-2ax+a^2,\quad 4x-2a=0;$$

donc $x=\frac{1}{2}a$; ainsi le point a est au milieu de AB.

XIII. De tous les parallélipipèdes rectangles égaux à un cube donné a^3, et dont la ligne b est une arête, quel est celui dont la

surface est la plus petite? Soient x et z les autres arêtes, bxz sera le volume $= a^3$: donc, les dimensions du parallélipipède sont b, x et $\frac{a^3}{bx}$; $\frac{a^3}{b}$, bx et $\frac{a^3}{x}$ sont donc les aires des faces ; le double de leur somme est l'aire totale,

$$y = \frac{2a^3}{b} + 2bx + \frac{2a^3}{x},\ y' = 2b - \frac{2a^3}{x^2} = 0, \quad x = \sqrt{\frac{a^3}{b}} = z;$$

donc les deux autres dimensions x et z doivent être égales.

Si le côté b n'est pas donné, x étant toujours l'un d'eux, les autres doivent être $\sqrt{\frac{a^3}{b}}$; $\frac{2a^3}{b} + 4\sqrt{a^3x}$ est donc l'aire totale,

d'où
$$\frac{a^3}{b^2} = \sqrt{\frac{a^3}{b}}, \quad \text{et } b = a;$$

le cube proposé est donc le parallélipipède rectangle de moindre surface.

759. Lorsqu'on veut appliquer cette théorie aux courbes, on forme (n° 724) la dérivée de leur équ. : les racines réelles de x et y, qui satisfont à la proposée et à sa dérivée, s'obtiennent par l'élimination ; elles peuvent seules répondre à des *maxima* ou *minima* d'ordonnées. On prendra la dérivée du 2e ordre, et faisant $y' = 0$, puis mettant pour x et y l'une des couples de racines obtenues, si $x = Ap$ et $y = pO$ (fig. 1) rendent y'' négatif, le point O sera un *maximum* : si les coordonnées Ap'', $p''o''$ rendent y'' positif, o'' sera au contraire un *minimum*.

Quand les développements de $f(a \pm h)$ sont fautifs dans les termes auxquels on est forcé de recourir pour reconnaître les *maxima* ou *minima*, il faut chercher ces développements tels qu'ils doivent être (n° 738), et voir s'ils sont en effet l'un et l'autre $>$ ou $<$ fa. Ainsi $y = b + (x - a)^{\frac{5}{3}}$ donne

$$y' = \tfrac{5}{3}(x - a)^{\frac{2}{3}},\ y'' = \tfrac{10}{9}(x - a)^{-\frac{1}{3}},$$

$y' = 0$ donne $x = a$, qui rend $y'' = \infty$; ainsi la formule de Taylor est fautive. Mais $f(a \pm h) = b \pm h^{\frac{5}{3}}$, donc il n'y a ni *maximum* ni

minimum. Au contraire de $y = b + (x - a)^{\frac{4}{3}}$, on tire

$$f(a+h) = b + h^{\frac{4}{3}} = f(a-h);$$

donc $x = a$ et $y = b$ répondent à un *minimum*. On aurait un *maximum* pour $y = b - (x - a)^{\frac{4}{3}}$.

760. Quant aux fonctions de deux variables, $z = f(x, y)$, imitons les raisonnements du n° 757. Changeons x en $x + h$, et y en $y + k$, et devéloppons comme n° 743; en faisant $k = \alpha h$, nous aurons

$$Z = z + h\left(\frac{dz}{dx} + \alpha\frac{dz}{dy}\right) + \frac{h^2}{2}\left(\frac{d^2z}{dx^2} + 2\alpha\frac{d^2z}{dy\,dx} + \alpha^2\frac{d^2z}{dy^2}\right)\ldots$$

Or, pour qu'on ait toujours $Z < z$, ou $Z > z$, quelque petits que soient h et k, il faut que le second terme soit nul indépendamment de α, d'où

$$\frac{dz}{dy} = 0, \quad \text{et } \frac{dz}{dx} = 0 \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

mais en outre, le terme suivant doit être positif dans le cas du *minimum*, et négatif pour le *maximum*. On éliminera donc x et y entre les équations (1), et leurs racines pourront seules convenir au but proposé : il faudra substituer ces racines dans le terme suivant $\frac{h^2}{2}\left(\frac{d^2z}{dx^2}\ldots\right)$, qui devra être perpétuellement de même signe, quelque valeur qu'on attribue à α, et quel qu'en soit le signe. Or, une quantité $A + 2\alpha B + C\alpha^2$ ne peut conserver son signe quel que soit α, à moins que ses facteurs ne soient imaginaires (n° 139, 9°), ce qui exige que $AC - B^2$ soit > 0. Il faut donc qu'on ait

$$\frac{d^2z}{dx^2} \cdot \frac{d^2z}{dy^2} - \left(\frac{d^2z}{dx\,dy}\right)^2 > 0 \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

$\frac{d^2z}{dx^2}$ et $\frac{d^2z}{dy^2}$ devront donc être de même signe : s'il est négatif, pour $k = 0$, ou $\alpha = 0$, notre trinôme devenant $\frac{d^2z}{dx^2}$, c'est-à-dire négatif, le trinôme conserve toujours ce signe; il y a donc *maximum*; il y a *minimum* quand $\frac{d^2z}{dx^2}$ et $\frac{d^2z}{dy^2}$ sont positifs. Et si la

condition (2) n'est pas remplie, il n'y a ni *maximum*, ni *minimum*.

Quand les racines des équ. (1) rendent nuls les termes de notre trinôme, il faut recourir au 4[e] terme du développement qui doit aussi être nul, puis au 5[e], et ainsi de suite.

761. Quelle est, par ex., la plus courte distance entre deux droites données? Nous prendrons l'une de ces lignes pour axe des x, et l'autre aura pour équation

$$z = ax + \alpha, \quad y = bx + \beta.$$

Prenons sur la 1[re] un point, dont x' soit l'abscisse : sa distance à un point quelconque de la seconde sera R, savoir (n° 654),

$$R^2 = (x - x')^2 + y^2 + z^2,$$

ou $$R^2 = (x - x')^2 + (bx + \beta)^2 + (ax + \alpha)^2.$$

Désignons ce 2[e] membre par t, nous aurons

$$\frac{dt}{dx} = 2\,(x - x') + 2\,(bx + \beta)\,b + 2\,(ax + \alpha)\,a = 0,$$

$$\frac{dt}{dx'} = -2\,(x - x') = 0\,;\ \text{d'où } x = x' = -\frac{a\alpha + b\beta}{a^2 + b^2}.$$

Puisque $x = x'$, la ligne cherchée est perpend. à l'axe des x, et par conséquent elle l'est aussi à la 2[e] droite qu'on aurait pu prendre pour cet axe : c'est ce qu'on sait déjà (n° 274). Du reste

$$\frac{d^2t}{dx^2} = 2\,(1 + a^2 + b^2),\quad \frac{d^2t}{dx'^2} = 2,\quad \frac{d^2t}{dx\,dx'} = -2\,;$$

la condition (2) est satisfaite, puisque $4\,(a^2 + b^2) > 0$; il y a *minimum*. La longueur de la ligne cherchée est $R = \dfrac{a\beta - b\alpha}{\sqrt{(a^2 + b^2)}}$. L'équ. de sa projection sur le plan yz étant $y = Az$, comme elle passe par un point (x, y, z) de la 2[e] droite,

$$A = \frac{y}{z} = \frac{bx + \beta}{ax + \alpha} = -\frac{a}{b}\,;$$

donc ces lignes satisfont à la condition (n° 673, 6°), et sont perpend. entre elles : ce qu'on avait déjà prouvé.

Méthode des tangentes.

762. Soit proposé de mener une tangente TM (fig. 40) au point $M(x, y)$ de la courbe BMM', dont l'équation est donnée $y = fx$: celle de la droite TMH est

$$Y - y = \operatorname{tang} \alpha (X - x),$$

X et Y étant les coordonnées variables de la droite, x et y celles du point de contact M, α l'angle T. Il a été prouvé, n° 695, que la dérivée $y' = f'x$ est la tangente de l'angle T, la limite du rapport des accroissements MQ et $M'Q$ des coordonnées x et y. C'est même sur ce principe que nous avons établi l'existence des dérivées pour toute fonction de x, et par suite le Calcul différentiel entier. Donc (n° 346

$$\operatorname{tang} \alpha = y', \quad \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{(1 + y'^2)}}, \quad \sin \alpha = \frac{y'}{\sqrt{(1 + y'^2)}},$$

$$Y - y = y'(X - x).$$

1° La normale MN fait avec l'axe des x un angle (n° 370) dont la tangente est $-\frac{1}{y'}$; son équation est donc

$$y'(Y - y) + X - x = 0.$$

2° En faisant $Y = 0$, on a les abscisses AT, AN, des pieds de la tangente et de la normale ; d'où l'on tire $x - X$, ou

$$\text{sous-tangente } TP = \frac{y}{y'}, \quad \text{sous-normale } PN = yy'.$$

Lorsque ces valeurs ont un signe négatif, cela indique que ces lignes tombent en sens opposé à celui de notre figure ; il suffit alors d'examiner si c'est y ou y' qui est négatif, pour reconnaître la situation de ces lignes (*voy.* n° 339).

3° Les hypoténuses TM et MN donnent les longueurs

$$\text{tangente } TM = \frac{y}{y'} \sqrt{(1 + y'^2)},$$

$$\text{normale } MN = y \sqrt{(1 + y'^2)}.$$

4° En appliquant le raisonnement ci-dessus (*voyez* n° 420) au cas où l'angle des coordonnées est quelconque, on trouvera que l'équation de la tangente et la valeur de la sous-tangente restent les mêmes.

763. Voici quelques exemples de ces formules :

I. Dans la parabole $y^2 = 2px$, d'où $yy' = p$, $\frac{y}{y'} = 2x$; la normale $MN = \sqrt{(2px + p^2)}$ (n° 404).

II. Pour l'ellipse et l'hyperbole $a^2y^2 \pm b^2x^2 = \pm a^2b^2$; d'où $y' = \mp \frac{b^2x}{a^2y}$; on tire de là les sous-tangentes, etc. (*voyez* n°s 408 et 414). Par ex., on trouve pour la longueur de la normale, en faisant $c^2 = a^2 \mp b^2$,

$$N = \frac{b\sqrt{\pm (a^4 - c^2x^2)}}{a^2}.$$

III. Pour l'équ. $y^m = x^m a^{n-m}$, on trouve $\frac{y}{y'} = \frac{mx}{n}$. La parabole en est un cas particulier : c'est ce qui a fait donner aux courbes renfermées dans cette équ. le nom de *paraboles*, m et n étant positifs. $y^3 = a^2x$ s'appelle la *première parabole cubique*; $y^3 = ax^2$ est la *seconde*.

De même, on donne le nom d'*hyperboles* aux courbes dont l'équ. est $x^ny^m = a^{m+n}$; leur sous-tangente est $\frac{y}{y'} = -\frac{mx}{n}$; elle est la même, prise en signe contraire, que dans le cas précédent.

IV. Pour la courbe dont l'équ. est $x^3 - 3axy + y^3 = 0$, on a

$$y' = \frac{ay - x^2}{y^2 - ax}, \quad \text{sous-tangente} = \frac{y^3 - axy}{ay - x^2}, \text{ etc.}$$

V. Dans la logarithmique (n° 469), $y = a^x$ donne $\frac{y}{y'} = \frac{1}{\mathrm{l}\, a}$; la sous-tangente est égale au module (n° 625).

VI. Soient $AP = x$, $PM = y$, $MQ = z = \sqrt{(2ry - y^2)}$ (fig. 43), l'équ. de la cycloïde AMF est $x = \text{arc}\,(\sin = z) - z$, (n° 472); l'arc est ici pris dans le cercle générateur MGD, dont le rayon $= r$. La dérivée est donc (n° 723)

$$1 = \frac{rz'}{\sqrt{(r^2 - z^2)}} - z', \text{ équ. où } z' = \frac{(r - y)\,y'}{\sqrt{(2ry - y^2)}}.$$

Donc, chassant z et z', la cycloïde a pour équation dérivée

$$yy' = \sqrt{(2ry - y^2)}, \quad \text{ou} \quad y' = \sqrt{\left(\frac{2r - y}{y}\right)},$$

l'origine étant au point de rebroussement A.

Pour mener une tangente TM, on remarquera que

$$\text{sous-normale} = yy' = \sqrt{(2ry - y^2)} = z = MQ.$$

Ainsi, la ligne MD menée au point de contact D du cercle générateur avec l'axe AE, est la normale. La corde MD en est la longueur; on obtient, en effet, $y\sqrt{(1 + y'^2)} = \sqrt{(2ry)}$. La corde supplémentaire MG est la tangente. On voit donc que pour mener une tang. en M, on décrira MN parallèle à l'axe AE, puis la corde KF, et enfin MG parallèle à KF.

Si l'origine est située au point le plus élevé F, en sorte qu'on prenne $FS = x$; $SM = y$, l'équation de la cycloïde est . . . . . . $x = \text{arc}\,(\sin = z) + z$ (nº 472); la dérivée est

$$y' = \sqrt{\left(\frac{y}{2r - y}\right)}.$$

On aurait aussi trouvé cette équ. en transportant l'origine en F (changeant x en $\pi r - x$, et y en $2r - y$).

764. On peut résoudre un grand nombre de problèmes relatifs aux tangentes, tels que de les tracer par un point extérieur, ou parallèlement à une droite donnée, ou etc. (*voy.* nºˢ 407 et 413). Cherchons, par ex., l'angle β formé par la tang. TM (fig. 44), et le *rayon vecteur* AM mené de l'origine au point de contact $M(x, y)$. L'angle θ que ce rayon vecteur fait avec les x est donné par $\tan\theta = \frac{y}{x}$; d'ailleurs $\tan\alpha = y'$; donc

$$\text{tang}\,(\alpha - \theta) \quad \text{ou} \quad \text{tang}\,\beta = \frac{y'x - y}{x + yy'}.$$

Dans les applications, il faut avoir attention au signe que prend cette fraction.

Pour l'équ. $y^2 + x^2 = r^2$, qui appartient au cercle, on trouve $\text{tang}\,\beta = \infty$, ce qui est d'ailleurs évident.

765. Lorsqu'une courbe BM (fig. 44) est rapportée à des coordonnées polaires $AM = r$, $MAP = \theta$, les formules précédentes ne

peuvent servir qu'autant qu'on traduit préalablement l'équ. $r = f\theta$ de la courbe, en x et y, à l'aide des relations (n° 385)

$$x = r\cos\theta,\quad y = r\sin\theta,\quad x^2 + y^2 = r^2.$$

Transformons, au contraire, en r et θ les formules de tang., etc. Prenons donc θ pour variable indépendante au lieu de x; et ce calcul, qu'on a déjà fait page 326, donne

$$\text{tang}\,\beta = \frac{r}{r'}.$$

766. On pourrait de même traduire en r, r' et θ les valeurs $yy', \frac{y}{y'}$, etc.; mais, à cause de leur complication, on préfère le procédé suivant. On nomme *sous-tangente* la longueur de la partie AT, prise sur la perpend. à AM; le point T étant ainsi déterminé, la tangente TM s'ensuit. Or, le triangle TAM donne . . . . . $AT = AM$ tang. β, ou

$$\text{sous-tang} = AT = \frac{r^2}{r'}.$$

Pour la spirale d'Archimède (n° 473, fig. 45), on a

$$r = \frac{a\theta}{2\pi},\quad \frac{r^2}{r'} = \theta r,\quad \frac{r}{r'} = \theta.$$

Ainsi la sous-tangente AT est égale en longueur à l'arc de cercle décrit du rayon $AM = r$, et qui mesure l'angle $MAx = \theta$. Quant à l'angle β, il croît sans cesse avec l'arc θ; et comme ce n'est qu'après une infinité de révolutions du rayon vecteur que θ devient infini, l'angle droit est la limite de β.

Dans la spirale hyperbolique (n° 474)

$$r = \frac{a}{\theta},\quad \text{sous-tang} = -a,\quad \text{tang}\,\beta = -\theta;$$

la sous-tangente est constante; l'asymptote est la limite de toutes les tangentes; enfin, l'angle du rayon vecteur avec la tangente est obtus et décroît à mesure que θ augmente (*voyez* dans le 1er volume, la figure 287).

Pour la spirale logarithmique (n° 474)

$$r = a^\theta,\quad \text{tang}\,\beta = \frac{1}{\text{l}\,a},\quad \text{sous-tang.} = \frac{r}{\text{l}\,a}.$$

La courbe coupe tous ses rayons vecteurs sous le même angle, qui est de 45°, quand a est la base des log. népériens : la sous-tang. croît proportionnellement au rayon vecteur.

Des Rectifications et Quadratures.

767. Lorsque l'équ. $y=fx$ d'une courbe BMM' (fig. 40) est donnée, la longueur $BM=s$ d'un arc développé est déterminée quand ses extrémités B et M sont connues : cherchons cette longueur. Pour cela, remarquons que B restant fixe, s varie avec le point M; ainsi s est une fonction de $x=AP$, qu'il s'agit de trouver, $s=Fx$. Si x croît de $h=PP'$, y croîtra de $M'Q=k$, et s de $MM'=l$; donc

$$y=fx \text{ donne } f(x+h)=y+y'h+\tfrac{1}{2}y''h^2+\ldots;$$
$$s=Fx, \qquad F(x+h)=s+s'h+\tfrac{1}{2}s''h^2+\ldots;$$
d'où $k=y'h+\frac{1}{2}y''h^2+\ldots, \qquad l=s'h+\frac{1}{2}s''h^2+\ldots;$

corde $MM'=\sqrt{(h^2+k^2)}=h\sqrt{(1+y'^2+y'y''h+\ldots)}$.

D'un autre côté, la tangente MH donne (n° 762)

$$QH=y'h, \quad MH=h\sqrt{(1+y'^2)}, \quad M'H=-\tfrac{1}{2}y''h^2\ldots;$$

donc $$\frac{\text{corde } MM'}{MH+M'H}=\frac{\sqrt{(1+y'^2+y'y''h+\ldots.)}}{\sqrt{(1+y'^2)}-\frac{1}{2}y''h\ldots}.$$

Plus h décroît, plus ce rapport approche de l'unité; 1 est donc aussi la limite du 1er membre ; et puisque l'arc MM' est compris entre sa corde et la ligne brisée $MH+M'H$, 1 est aussi la limite du rapport de la corde à l'arc, ou de

$$\frac{\text{corde}}{\text{arc}}=\frac{\sqrt{(1+y'^2+y'y''h\ldots.)}}{s'+\frac{1}{2}s''h\ldots.}; \quad \text{d'où} \quad 1=\frac{\sqrt{(1+y'^2)}}{s'},$$
$$s'=\sqrt{(1+y'^2)} \quad \text{ou} \quad ds=\sqrt{(dx^2+dy^2)}.$$

Cette formule sert à rectifier tous les arcs de courbe. On y met pour y' sa valeur $f'x$, tirée de l'équ. donnée $y=fx$ de la courbe, et l'on obtient la dérivée s' de l'équ. $s=Fx$; il faut ensuite *intégrer* $F'x$, c'est-à-dire remonter de cette dérivée à sa fonction primitive Fx. Nous donnerons bientôt (n° 849) les moyens de faire ce calcul.

L'équ. du cercle, dont le centre est à l'origine, est

$$y^2 + x^2 = r^2, \quad \text{d'où} \quad yy' + x = 0;$$

$$s' = \sqrt{\left(1 + \frac{x^2}{y^2}\right)} = \pm \frac{r}{y} = \frac{\pm r}{\sqrt{(r^2 - x^2)}};$$

c'est la dérivée de l'arc de cercle s, exprimée en fonction de son sinus ou cosinus (qui est x, *voyez* n° 723). Pour rectifier l'arc de cercle, il faudrait donc intégrer cette fonction (n° 849, III).

D'après notre valeur de s', on peut simplifier les formules de la page 362; qui deviennent

$$\text{tang}\ \alpha = y' = \frac{dy}{dx}, \quad \cos\ \alpha = \frac{1}{s'} = \frac{dx}{ds}, \quad \sin \alpha = \frac{y'}{s'} = \frac{dy}{ds},$$

$$\text{tangente} = \frac{ys'}{y'} = \frac{yds}{dy}, \quad \text{normale} = ys' = \frac{yds}{dx}.$$

768. Pour obtenir l'aire $BCPM = t$ (fig. 40), imitons les raisonnements précédents; nous verrons que t est fonction de x, ou $t = \varphi x$; que les accroissements k et i de l'ordonnée et de l'aire pour l'abscisse $x + h$, sont

$$k = M'Q = y'h + \ldots, \quad i = MPP'M' = t'h + \ldots$$

On a rectangle $MPP'Q = yh$, $LPP'M' = (y+k)h$; l'unité est la limite de leur rapport $\frac{y}{y+k}$, 1 est donc aussi la limite du rapport entre le rectangle $MPP'Q = yh$ et l'accroissement $MPP'M' = i$ de l'aire t. Ce rapport est

$$\frac{yh}{i} = \frac{y}{t' + \frac{1}{2} t''h + \ldots}; \quad \text{donc} \ \frac{y}{t'} = 1, \quad \text{ou} \quad t' = y.$$

Il faudra mettre ici fx pour y, et intégrer l'équation $t' = fx$. Si les coordonnées faisaient l'angle α, on trouverait

$$t' = y \sin \alpha.$$

769. Cherchons l'aire $AKM = \sigma$ (fig. 44), comprise entre deux rayons vecteurs AM, AK, dont le dernier demeure fixe, l'autre variant avec M. On a l'aire AKM ou

$$\tau = ABMK - ABM;$$

mais

$$ABM = ABCD + DCMP - AMP = ABCD + t - \tfrac{1}{2} xy\,;$$

donc $$\tau = ABMK - ABCD - t + \tfrac{1}{2} xy.$$

Or, la variation du point M ne change pas les points B, C et K : prenant la dérivée, en regardant $ABMK$ et $ABCD$ comme constants,

$$\tau' = -t' + \tfrac{1}{2}(xy' + y) = \tfrac{1}{2}(xy' - y).$$

Traduisons les valeurs de s', y' et τ' en coordonnées polaires r et θ; en mettant $\frac{s'}{x'}$, $\frac{y'}{x'}$, $\frac{\tau'}{x'}$, pour s', y' et τ' (nº 729),

$$s'^2 = x'^2 + y'^2, \quad \tau' = \tfrac{1}{2}(xy' - yx')\,:$$

la variable principale est devenue quelconque ; pour qu'elle soit θ, il suffit de mettre ici, pour x, y, x' et y', les valeurs du nº 730, et il viendra

$$s' = \sqrt{(r^2 + r'^2)}, \quad \tau' = \tfrac{1}{2} r^2,$$

qui sont les formules des rectifications et des quadratures de courbes rapportées à des coordonnées polaires, l'équ. étant $r = f\theta$: on aurait d'ailleurs pu les obtenir directement par la méthode des limites.

Des Osculations.

770. Si l'on prend un point M (fig. 46) sur une courbe BMZ, et qu'on mène une tangente TM et une normale MN; puis, des différents centres a, b.... pris sur la normale, si l'on décrit des cercles qui passent en M, TM sera leur tangente commune. Or, il est clair que, par la disposition de ces cercles, les uns sont en dedans, les autres en dehors de la courbe ; en sorte qu'il en est un qui approche plus que tout autre de la courbe BMZ, de part et d'autre du point M. C'est ce qu'on nomme le *Cercle osculateur*; son centre D et son rayon DM sont appelés *Centre* et *Rayon de courbure*; et comme en changeant le point M, le cercle change aussi de centre et de rayon, on nomme *Développée* la courbe IOD, qui passe par tous les centres courbure : la ligne donnée BMZ est la *Développante* de IOD.

Pour trouver le cercle osculateur d'une courbe, en un point donné M, il faudra exprimer en analyse les conditions qui le déterminent : généralisons ces considérations. Concevons deux courbes qui se coupent; leurs équ. $y = fx$, $Y = FX$ donnent $y = Y$ pour la même abscisse $x = X$, qui est celle du point commun : jusqu'ici il n'y a qu'une simple intersection. Comparons le cours des deux lignes de part et d'autre de ce point et pour cela, mettons $x + h$ pour x et X, dans y et Y; les ordonnées correspondantes sont

$$y + y'h + \tfrac{1}{2}y''h^2 \ldots, \quad Y + Y'h + \tfrac{1}{2}Y''h^2 + \ldots;$$

d'où $$\delta = h(y' - Y') + \tfrac{1}{2}h^2(y'' - Y'') + \ldots,$$

pour la distance entre les deux points de nos courbes dont l'abscisse est $x + h$: il faut dans Y', $Y''\ldots$, remplacer X par x. Plus δ sera petit pour une valeur donnée de h, plus les points correspondants seront voisins, de sorte que le degré de rapprochement de nos courbes dépend de la petitesse de δ, dans une étendue déterminée h.

Or, s'il arrive que la valeur de x, pour laquelle $y = Y$, rend aussi $y' = Y'$, on a

$$\delta = \tfrac{1}{2}h^2(y'' - Y'') + \tfrac{1}{6}h^3(y''' - Y''') + \ldots;$$

et nos deux courbes approchent plus l'une de l'autre que ne le ferait une troisième qui, passant par le même point (x, y), ne remplirait pas cette même condition. Car, soit $\gamma = \varphi\xi$ l'équ. de celle-ci, la distance Δ, entre les points de cette courbe et de la première, qui ont pour abscisse $x + h$, est

$$\Delta = h(\gamma' - y') + \tfrac{1}{2}h^2(\gamma'' - y'') + \ldots,$$

en supposant $\varphi x = fx$, pour qu'elles aient le point commun (x, y). Or, les valeurs de δ et Δ ont la forme

$$\delta = bh^2 + ch^3 + \ldots, \quad \Delta = Ah + Bh^2 + Ch^3 \ldots;$$

$$\text{d'où } \Delta - \delta = Ah + (B - b)h^2 + (C - c)h^3 + \ldots$$

Si donc on prend h assez petit (nº 741) pour que le terme Ah donne son signe à cette série, $\Delta - \delta$ ayant le signe de A, on aura $\Delta > \delta$ pour cette valeur de h, et pour toutes celles qui sont moindres, quel que soit le signe de h. Ainsi la courbe $y = Fx$ approche de celle $y = fx$, dans toute cette étendue h, et de part et d'autre du

point commun, plus que ne le fait la 3e courbe $\gamma = \varphi\xi$, quelle qu'en soit la nature.

Si, outre $y' = Y'$, on a aussi $y'' = Y''$, on verra de même que nos deux courbes approchent l'une de l'autre, dans les points voisins de celui qui est commun, plus qu'une troisième qui ne remplirait pas ces deux conditions, et ainsi de suite. Nous dirons de deux lignes qu'elles ont *un Contact* ou *une Osculation du* 1er *ordre*, lorsqu'elles satisfont aux conditions $y = Y, y' = Y'$; pour la même abscisse x. De même, $y = Y$, $y' = Y'$, $y'' = Y''$, seront les conditions *du contact du* 2e *ordre*, etc. ; et il est démontré que ces deux courbes sont plus proches l'une de l'autre vers le point commun, qu'une 3e courbe, à moins que celle-ci ne forme une semblable osculation.

771. Ces principes posés, si quelques-unes des constantes $a, b, c,\ldots$ que renferment les équ. $y = fx$, $Y = FX$, des deux courbes, sont arbitraires, la nature de ces lignes est fixée, mais leur position et certaines dimensions ne le sont pas. On peut donc déterminer $n + 1$ de ces constantes par un nombre égal de conditions $y = Y$, $y' = Y'$, $y'' = Y''\ldots$, et les courbes auront ainsi un contact du n^e ordre : elles approcheront plus près l'une de l'autre que toute autre courbe qui ne formerait pas une osculation du même ordre.

772. Appliquons ceci à la ligne droite : soit $y = fx$ l'équ. donnée d'une courbe. Prenons une droite dont la situation soit indéterminée ; nos équ. sont

$$y = fx, \quad Y = aX + b,$$

a et b étant quelconques. Si l'on pose $y = Y$ et $y' = Y'$, ou

$$y = ax + b, \quad y' = a,$$

il y aura osculation du 1er ordre ; la droite sera tangente : en effet, pour qu'une autre droite approchât plus qu'elle de la courbe, de part et d'autre du point commun, il faudrait que celle-ci remplît les mêmes conditions, c'est-à-dire qu'elle eût les mêmes valeurs pour ses constantes. Ainsi, y' est la tangente de l'angle que fait notre droite avec les axes ; éliminant a et b, l'équation de la tangente est

$$Y - y = y'(X - x),$$

comme n° 762. On tire aisément de là l'équ. de la normale, la valeur de la sous-tangente, etc.

773. Raisonnons de même pour le cercle : les équ. de la courbe donnée, et d'un cercle considéré dans une situation quelconque, sont

$$y = fx, \quad (Y - b)^2 + (X - a)^2 = R^2;$$

a et b sont les coordonnées du centre, R est le rayon. Nous établirons un contact du 2e ordre pour déterminer ces trois constantes. Les dérivées de cette dernière équ. sont

$$(Y - b)\,Y' + X - a = 0, \quad (Y - b)\,Y'' + Y'^2 + 1 = 0;$$

donc

$$(y - b)^2 + (x - a)^2 = R^2, \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

$$(y - b)\,y' + x - a = 0, \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

$$(y - b)\,y'' + y'^2 + 1 = 0 \quad \ldots\ldots \quad (3)$$

Tirant $y - b$ et $x - a$ des deux dernières,

$$y - b = -\frac{(1 + y'^2)}{y''}, \quad x - a = \frac{y'(1 + y'^2)}{y''};$$

la 1re donne $$R = \pm \frac{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''}\,* :$$

$$a = x - \frac{y'}{y''}(1 + y'^2), \quad b = y + \frac{1 + y'^2}{y''}.$$

On a donc ainsi le rayon et le centre de courbure. Tout autre cercle approchera moins de notre courbe que celui-ci, parce qu'il devrait remplir les mêmes conditions, c'est-à-dire coïncider avec lui.

774. On voit que, 1° la tangente à la courbe l'est aussi au cercle osculateur, puisque y' a la même valeur pour l'une et l'autre.

2° L'équ. de la normale est $y'(Y - y) + X - x = 0$; si l'on y met a et b pour X et Y, elle est satisfaite, puisqu'on retrouve la relation (2), qui ne suppose qu'un contact du 1er ordre entre la courbe et le cercle : donc *le centre de courbure est sur la normale*, ainsi que le centre de tout cercle qui a la même tangente TM (fig. 46).

* La valeur de R doit comporter le signe $\pm$; mais comme cette expression n'a de sens que lorsqu'elle est positive (no 336), on devra préférer celui de ces deux signes qui donnera à la valeur de R le signe $+$. Si y'' est positif, ce qui arrive lorsque la courbe tourne sa convexité vers l'axe des x, on prendra le signe $+$; il faudra préférer le signe $-$ dans le cas contraire (*voy.* no 783).

3° Si l'on élimine x et y entre l'équ. $y = fx$ de la courbe, et celles 2 et 3 qui déterminent a et b, on aura une relation entre les coordonnées du centre de courbure, quel que soit le point M; ce sera donc *l'équ. de la développée.*

4° Puisque R, a et b sont des fonctions de x, que le calcul détermine aisément, si on les substituait dans les équ. 1 et 2, elles seraient identiques : on peut donc les différentier en regardant R, a et b comme variables. Opérons d'abord sur l'équ. (2) ; il vient

$$(y - b)\, y'' + y'^2 - b'y' - a' + 1 = 0;$$

d'où
$$b'y' + a' = 0,$$

en retranchant de (3) : c'est, comme on devait s'y attendre, la dérivée de l'équation (2) par rapport à a et b seuls. On a donc $-\frac{1}{y'} = \frac{b'}{a'}$ pour la tangente de l'angle que fait la normale avec l'axe des x. Soit $b = \varphi a$ l'équ. de la développée ; sa tangente au point (a, b) fait avec l'axe des x un angle dont la tang. trigonométrique est $\frac{db}{da} = \frac{b'}{a'} = -\frac{1}{y'}$ (n° 729), puisque, dans notre calcul, nous avons regardé b et a comme des fonctions où x est variable principale. Donc *la normale à la développante est tangente à la développée.*

5° Faisons la même chose pour l'équ. (1), c'est-à-dire prenons-en la dérivée en faisant tout varier, et ôtons le résultat de l'équ. (2) ; ou plutôt prenons la dérivée de (1) relativement à a, b et R seuls. Il vient

$$-(y - b)\, b' - (x - a)\, a' = RR'.$$

Pour en tirer une relation qui appartienne à tous les points de la développée, il faut éliminer x et y. Mettons donc pour $x - a$ et $y - b$ leurs valeurs tirées de (1) et (2); après y avoir substitué $-\frac{a'}{b'}$ pour y', on trouve

$$x - a = -\frac{y'R}{\sqrt{(1 + y'^2)}} = \frac{a'R}{\sqrt{(a'^2 + b'^2)}},$$

$$y - b = \frac{R}{\sqrt{(1 + y'^2)}} = \frac{b'R}{\sqrt{(a'^2 + b'^2)}};$$

donc
$$\frac{a'^2R + b'^2R}{\sqrt{(a'^2 + b'^2)}} = -RR', \text{ ou } R' = \sqrt{(a'^2 + b'^2)}.$$

Si l'on prend a pour variable principale, $R' = \sqrt{(1+b'^2)}$ est la dérivée du rayon de courbure relativement à a. Mais celle de l'arc s de la développée est aussi $s' = \sqrt{(1+b'^2)}$ (n° 767); donc $R' = s'$, équ. qui est la dérivée de $R = s + A$, A étant une constante arbitraire (n° 808).

Pour un autre arc S de développée, le rayon de courbure est $S + A$, l'origine fixe de cet arc étant la même; ainsi $s - S$ est la différence des deux rayons. Il suit de là que si O et D (fig. 46) sont les centres de courbure des points B et M, l'arc OD de la développée est la différence des rayons de courbure BO, MD. Donc, si l'on courbe un fil sur la développée OD, et si on le tend suivant BO, en le déroulant de dessus OD, l'extrémité B décrira la développante BM : c'est sur cette propriété qu'est fondée la dénomination de ces courbes.

6° Les expressions du rayon de courbure et des coordonnées du centre se présentent sous diverses formes, suivant qu'on y prend telle ou telle variable pour indépendante. C'est ainsi qu'on a vu (n° 732) que

$$R = \frac{(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{x'y'' - y'x''}, \quad R = \frac{x'}{y''} = -\frac{y'}{x''},$$

suivant que la variable principale est arbitraire, ou bien est l'arc s : si cette variable est l'abscisse x, on peut écrire ainsi les valeurs de R, a et b,

$$R = \frac{s'^3}{y''}, \quad a = x - \frac{y's'^2}{y''}, \quad b = y + \frac{s'^2}{y''}.$$

7° Si les coordonnées sont polaires, on exprimera x et y en fonction de ces nouvelles coordonnées $AM = r$, $MAP = \theta$ (fig. 44); puis on substituera pour x, x'.... leurs valeurs dans celle de R où aucune variable n'est principale (*voy.* les formules, n° 730). On a, toutes réductions faites,

$$R = \frac{(r'^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}}{2r'^2 - rr'' + r^2} = \frac{s'^3}{2r'^2 - rr'' + r^2}.$$

775. Appliquons cette théorie à quelques exemples.

I. Pour la parabole $y^2 = 2px$, $y' = \frac{p}{y}$, $y'' = -\frac{p^2}{y^3}$; en substi-

tuant dans nos formules, on trouve

$$s' = \sqrt{\left(\frac{2x + p}{2x}\right)}, \quad R = \frac{(2px + p^2)^{\frac{3}{2}}}{p^2} = \frac{N^3}{p^2},$$

N étant la longueur de la normale (nº 763, I). Donc *le rayon de courbure de la parabole est égal au cube de la normale, divisé par le carré du demi-paramètre*. Au sommet A (fig. 46), où $x = 0$, on a $R = p$; ainsi, la distance AI du sommet à son centre de courbure est le double de celle du foyer. Plus x croît, plus la courbure diminue, et cela indéfiniment. Les coordonnées du centre de courbure sont

$$a = 3x + p, \quad b = -\frac{2xy}{p}.$$

Éliminant x et y de $y^2 = 2px$, on a, pour équ. de la développée, $b^2 = \frac{8}{27p}(a - p)^3$, d'où $b^2 = \frac{8a^3}{27p}$, en transportant l'origine en I: c'est la seconde parabole cubique. Nous apprendrons bientôt à la discuter (p. 384).

II. Pour l'ellipse on a $m^2y^2 + n^2x^2 = m^2n^2$,

$$m^2yy' + n^2x = 0, \quad m^2yy'' + m^2y'^2 + n^2 = 0,$$

$$y' = -\frac{n^2x}{m^2y}, \quad y'' = -\frac{n^4}{m^2y^3}, \quad 1 + y'^2 = \frac{n^2}{m^4} \cdot \frac{m^4 - c^2x^2}{y^2},$$

c étant la distance du foyer au centre, $c^2 = m^2 - n^2$.

$$R = -\frac{(m^4 - c^2x^2)^{\frac{3}{2}}}{m^4n}, \quad a = \frac{c^2x^3}{m^4}, \quad b = -\frac{c^2y^3}{n^4}.$$

Telles sont les valeurs du rayon et des coordonnées du centre de courbure pour l'ellipse. En comparant les valeurs de R, de la normale (p. 363) et du paramètre p, on reconnaît que . . . . $R = \frac{m^2N^3}{n^4} = \frac{N^3}{(\frac{1}{2}p)^2}$: c'est le même théorème que pour la parabole. Puisqu'un arc de la développée est la différence entre les rayons de courbure qui partent de ses extrémités (p. 373), et que ces rayons sont des quantités finies, cet arc est rectifiable. La même chose arrive pour toutes les courbes algébriques; on peut trouver une droite de même longueur qu'un arc donné de la développée.

Comme R décroît quand x augmente, c'est aux quatre extrémités des axes que R est *maximum* ou *minimum* : aux sommets O, O' de l'ellipse (fig. 73) la courbure est la plus grande, $R=\frac{n^2}{m}$, $a=\pm\frac{c^2}{m}$, $b=0$; en D et D', elle y est la moins grande, $R=\frac{m^2}{n}$, $b=\pm\frac{c^2}{n}$, $a=0$; les points h, h', i, i', ainsi déterminés, sont les centres de courbure des extrémités des axes. Pour avoir l'équ. de la développée, tirons les valeurs de x et y de celles de a et b, et substituons dans l'équ. de l'ellipse ; nous avons

$$\sqrt[3]{\left(\frac{b^2n^2}{c^4}\right)}+\sqrt[3]{\left(\frac{a^2m^2}{c^4}\right)}=1,$$

ou
$$\sqrt[3]{\left(\frac{b}{p}\right)^2}+\sqrt[3]{\left(\frac{a}{q}\right)^2}=1,$$

en faisant $Ch=q$, $Ci=p$. D'après ce qui sera dit (p. 385), on trouve que la courbe a des rebroussements aux quatre points h, h', i, i', et qu'elle est formée de quatre arcs convexes vers les deux axes, à l'égard desquels elle est symétrique : la développée est dessinée au ponctué dans la figure 73.

Pour l'hyperbole (n° 397), changez n en $n\sqrt{-1}$.

III. La cycloïde (fig. 43) donne (p. 363)

$$y'=\sqrt{\left(\frac{2r-y}{y}\right)}=\sqrt{\left(\frac{2r}{y}-1\right)},\quad y''=-\frac{r}{y^2},$$

d'où
$$s'^2=\frac{2r}{y},\text{ et } R=2\sqrt{(2ry)}=2N.$$

Le rayon de courbure étant double de la normale, prolongeons MD, et prenons $M'D=MD$, M' sera le centre de courbure ; il serait aisé d'en déduire la figure de la développée, mais nous préférerons suivre la méthode générale, qui donne

$$a=x+2\sqrt{(2ry-y^2)},\quad b=-y,$$

pour éliminer x et y. Comme l'équ. de la cycloïde est une dérivée, nous prendrons celle de a et b, $a'=\frac{2r-y}{y}$, $b'=-y'$. . . . .

Divisant ces valeurs on a

$$\frac{b'}{a'} = \frac{-yy'}{2r-y} = -\sqrt{\frac{y}{2r-y}} = -\sqrt{\frac{-b}{2r+b}},$$

en mettant $-b$ pour y. Or, si l'on prend les ordonnées positives b en sens contraire, il vient $\frac{b'}{a'} = \sqrt{\frac{b}{2r-b}}$, qui est précisément l'équ. de la même cycloïde, lorsque l'origine est en F. Donc la développée LA de la cycloïde est une cycloïde égale; l'arc AL est identique avec FA', le sommet F est porté en A.

IV. Dans la spirale logarithmique (fig. 45), $r = a^\theta$;

d'où $$R = r\sqrt{(1 + \mathrm{l}^2 a)} = r \text{ séc } \eta = \frac{r}{\cos \eta},$$

la tangente de l'angle $AMN = \eta$ du rayon vecteur avec la normale étant $= \mathrm{l}\, a$ (n° 766). La projection du rayon de courbure MN sur le rayon vecteur est $= r$; ainsi, la perpend. AN, élevée sur ce rayon au pôle, rencontre la normale au centre N de courbure. AM est donc la sous-tangente de la développée, et AN son rayon vecteur; AM forme avec la courbe MI, en chaque point, le même angle β que AN fait avec la développée. Donc, la développée est cette même courbe placée en sens différent.

On appliquerait de même la théorie des osculations à des courbes d'un ordre plus élevé (voy. *Fonct. anal.*, n° 117); et il est visible que deux courbes qui ont un contact du 2ᵉ, 3ᵉ, 4ᵉ.... ordre, ont même tangente et même cercle osculateur à ce point.

776. La différence entre les ordonnées des deux courbes étant $\delta = Mh^m + Nh^{m-1} + \ldots$, suivant que Mh^m est positif ou négatif, comme le signe de δ est celui de ce terme quand h est très-petit, l'ordonnée de la courbe est plus grande ou moindre que celle de son osculatrice : ce qui fait juger si la 1ʳᵉ est en-dessus ou en-dessous de l'autre. Mettant $-h$ pour h, le signe de Mh^m changera lorsque m sera impair, et la courbe sera coupée par son osculatrice au point commun. On voit donc qu'*une courbe est toujours coupée par son cercle osculateur.*

Des Asymptotes.

777. Si le développement de $f(x+h)$ est fautif, alors on ne peut

établir une osculation qu'autant que la série de $F(x+h)$ procède suivant la même loi, du moins dans l'ordre des premiers termes qu'on doit comparer : cette condition dépend de la nature des fonctions fx et Fx, et ne peut avoir lieu qu'accidentellement, c'est-à-dire pour de certaines valeurs de x; le même raisonnement exige alors qu'on égale les premiers coefficients pour qu'il y ait osculation (voy. *Fonct. analyt.*, n° 120).

Soient $y=fx$, $y=Fx$ les équ. de deux courbes : supposons qu'on ait développé fx et Fx en séries, suivant les puissances descendantes de x (*voy.* p. 345), en sorte que chacune de ces fonctions soit mise sous la forme

$$Ax^a+Bx^{a-b}+\ldots+Mx^{-m}+Nx^{-m-n}+\ldots$$

Si les exposants de ces deux développements sont les mêmes jusqu'à un certain terme Mx^{-m}, et qu'on puisse disposer de quelques constantes pour rendre aussi les 1ers coefficients égaux sans introduire d'imaginaires, la différence entre deux ordonnées quelconques sera $M'x^{-m}+\ldots$ Il suit de là que l'une de nos courbes ira en s'approchant continuellement de l'autre, à mesure que x croîtra, mais sans jamais l'atteindre : et il y aura un terme, passé lequel aucune autre courbe, qui ne remplirait pas ces conditions, ne pourra en approcher davantage. Nos courbes seront donc des *Asymptotes* l'une de l'autre.

Ainsi, *quand une courbe s'étend indéfiniment, elle a une infinité d'asymptotes,* qu'on trouve en développant $y=fx$ en série descendante, et prenant pour ordonnée de la ligne cherchée la somme des premiers termes, jusqu'à un rang quelconque dont l'exposant soit négatif; ou bien en composant une fonction Fx, dont le développement commence par ces mêmes premiers termes.

I. Par exemple, pour l'hyperbole (n° 416)

$$y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{(x^2-a^2)}=\pm\frac{bx}{a}\mp\tfrac{1}{2}bax^{-1}+\ldots$$

Donc les droites qui ont pour équ. $y=\pm\dfrac{bx}{a}$ sont les asymptotes rectilignes, et jouissent seules de cette propriété.

Il en est de même de $x=0$ et $y=0$, pour $xy=m^2$.

II. La courbe dont l'équ. est $y=\dfrac{k}{\sqrt{(x^2-a^2)}}$ est formée de

quatre branches symétriques par rapport aux axes, et dont nous pourrons bientôt trouver la figure. On a (nº 135)

$$y = kx^{-1} + \text{etc.}, \quad x = a + \tfrac{1}{2} \cdot \frac{k^2}{a} y^{-2} + \ldots$$

selon qu'on forme le développement suivant les puissances de x ou de y. Les droites qui ont pour équ. $y=0$ et $x=a$, sont donc des asymptotes. L'hyperbole qui a pour asymptotes les axes des x et des y, et k pour puissance, l'est aussi ; mais le rapprochement est ici beaucoup plus grand.

III. Soit $y^3 - 3axy + x^3 = 0$, fig. 47 (nº 748) ; on a

$$y = -x - a + \tfrac{1}{3} a^3 x^{-2} - \tfrac{1}{3} a^4 x^{-3} \ldots$$

La droite $y = -x - a$ est donc une asymptote ; elle se construit en prenant $AB = AC = a$, et tirant BC.

IV. Soit enfin $y^4 - 2x^2y^2 - x^4 + 2axy^2 - 5ax^3 = 0$;

$$y = \pm px \pm \frac{a(3\sqrt{2} - 4)}{8p} + Ax^{-1} + \ldots,$$

p désignant $\sqrt{(1 \pm \sqrt{2})}$. Donc, en construisant les droites GF, GH (fig. 48), qui ont pour ordonnées ces deux premiers termes, on aura les asymptotes rectilignes de la courbe proposée.

Des Points multiples et conjugués.

778. Lorsque les branches d'une courbe passent par un même point, soit en se coupant, soit en se touchant, ce point est appelé *double, triple. . . ., multiple,* suivant qu'il est commun à deux, trois...., ou plusieurs branches. Étant donnée l'équ. d'une courbe, proposons-nous de déterminer ces points, si elle en a, et leur nature.

Soient $$V = 0, \quad My' + N = 0,$$

l'équ. en x et y de la courbe, et sa dérivée : on suppose V délivré de radicaux.

1ᵉʳ CAS. Si les branches de la courbe se coupent au point cherché, il y a plusieurs tangentes en ce point : ainsi, pour une valeur de x et celle de y qui y répond, y' doit avoir autant de valeurs qu'il y a

de branches. Or, on a vu (n° 740) que cette condition rend M et N nuls.

2ᵉ cas. Si les branches de la courbe se touchent, il n'y a qu'une valeur de y'; et même quand le contact est du $(n-1)^e$ ordre, il n'y a (n° 771) qu'une valeur de $y', y'' \ldots . y^{(n-1)}$; mais on doit en trouver plusieurs pour $y^{(n)}$. Or, l'équation dérivée de l'ordre n a la forme $My^{(n)} + \ldots = 0$, M étant ici le même coefficient (n° 726) que pour $y', y'' \ldots$, dans les dérivées successives ; et comme cette équation est du 1ᵉʳ degré, et exempte de radicaux ; elle ne peut donner plusieurs valeurs de $y^{(n)}$ pour une seule de x et de y : on a donc encore $M = 0$, et par conséquent $N = 0$, par la même raison qu'au n° 740.

Concluons de là que, *pour trouver les points multiples d'une courbe, on égalera à zéro les dérivées* M *et* N *de son équ.* V = 0, *prises tour à tour par rapport à* y *et à* x. *Puis, éliminant* x *et* y *entre deux de ces équ.*

$$M = 0, \quad N = 0, \quad V = 0 : \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

les valeurs réelles qui satisferont à la 3ᵉ, *pourront seules appartenir aux points multiples.*

Je dis *pourront appartenir,* parce que ces points peuvent aussi ne pas exister avec ces équ., ainsi qu'on va le voir. On passera à la dérivée du 2ᵉ ordre (n° 726), $My'' + Py'^2 +$ etc. $= 0$; et prenant l'une des couples de valeurs de x et y qu'on vient de trouver, on les substituera ici : y'' disparaîtra, et y' sera donné par une équ. du 2ᵉ degré. Si les racines sont réelles, il y aura *un point double;* les deux tangentes à ces branches seront déterminées par ces valeurs de y', et donneront la direction des courbes en ce lieu.

779. Mais si les racines sont imaginaires, il y aura un point sans tangente, et par conséquent tout à fait isolé des branches de la courbe ; c'est ce qu'on nomme *un Point conjugué.* En effet, s'il y a un tel point pour l'abscisse a, les ordonnées voisines doivent être imaginaires ; en supposant l'équ. $V = 0$, mise sous la forme $y = fx$, si l'on y met $a \pm h$ pour x, la valeur correspondante de y, ou $f(a \pm h)$, sera imaginaire pour h très-petit. Soit $y^{(n)}$ le 1ᵉʳ coefficient qui sera imaginaire dans cette série ; comme l'équation $My^{(n)} +$ etc. $= 0$ ne peut présenter $y^{(n)}$ sous cette forme, attendu qu'elle ne contient pas de radicaux, même après en avoir éliminé $y', y'' \ldots . y^{(n-1)}$, il faut donc que l'on ait $M = 0$, et par suite $N = 0$.

Ainsi, les points conjugués sont compris parmi ceux que donnent les équ. (1) ; mais on les distingue en ce que la courbe n'y peut avoir de tangente : y' doit être imaginaire, x et y étant réels.

780. Il pourrait arriver que tous les termes de la dérivée du 2e ordre disparussent : alors il faudrait recourir à celle du 3e, d'où y''' et y'' s'en iraient, et qui contiendrait y' au 3e degré. Il y aurait *un point triple,* si les trois racines étaient réelles, et il n'y aurait pas de point multiple dans le cas contraire.

Quand on est forcé de recourir à l'équ. du 4e ordre, où y' est au 4e degré, la courbe a *un point quadruple, double* ou *conjugué,* suivant que les quatre racines sont réelles, ou que deux sont imaginaires, ou qu'enfin aucune n'est réelle ; et ainsi de suite.

781. Voici quelques exemples :

I. Soit $ay^3 - x^3y - bx^3 = 0$; d'où

$$1^o. \ldots (3ay^2 - x^3)\,y' - 3x^2(y+b) = 0,$$
$$2^o. \ldots 6ayy'^2 - 6x^2y' - 6x\,(y+b) = 0,$$
$$3^o. \ldots 6ay'^3 - 18xy' - 6y - 6b = 0.$$

Nous avons omis les termes en y'', y'''...., qui disparaîtraient par la suite du calcul. De

$$3ay^2 - x^3 = 0, \quad x\,(y+b) = 0.$$

on tire $y = -b$, $x = \sqrt[3]{(3ab^2)}$, qui ne satisfont pas à la proposée ; et $x = 0$, $y = 0$: l'origine peut donc être un point multiple. Mais tous les termes de la dérivée du 2e ordre disparaissent ; celle du 3e devient $ay'^3 = b$, qui ne donne pour y' qu'une seule racine réelle ; donc notre courbe n'a pas de point multiple.

II. Prenons $\quad y^4 - x^5 + x^4 + 3x^2y^2 = 0,$

d'où $\quad 2yy'\,(2y^2 + 3x^2) + 4x^3 - 5x^4 + 6y^2x = 0.$

En posant $y\,(2y^2 + 3x^2) = 0$, $x\,(4x^2 - 5x^3 + 6y^2) = 0$, on trouve que $x = 0$ et $y = 0$ peuvent seules remplir ces conditions et satisfaire à la proposée. Les dérivées des 2e et 3e ordres sont par là nulles d'elles-mêmes ; celle du 4e devient $y'^4 + 3y'^2 + 1 = 0$, dont les racines sont imaginaires ; ainsi, l'origine est un point conjugué.

III. Pour $x^4 - 2ay^3 - 3a^2y^2 - 2a^2x^2 + a^4 = 0$ (fig. 49), on a

$$-6a\,(y+a)\,yy' + 4x\,(x^2 - a^2) = 0,$$
$$-6a\,(2y+a)\,y'^2 + 12x^2 - 4a^2 = 0.$$

Voici comment on trouvera la figure de la courbe, qui d'ailleurs est symétrique par rapport à l'axe des y, puisque x n'entre dans la proposée qu'avec des puissances paires. On fera

$$(y+a)\,y=0,\quad x(x^2-a^2)=0;$$

et combinant ces équ. avec la proposée, on trouvera qu'il ne peut y avoir que trois points multiples, savoir,

$$\text{en } D \text{ et } D',\quad \text{où } y=0 \text{ et } x=\pm a,$$
$$\text{et en } E,\quad \text{où } x=0 \text{ et } y=-a.$$

Ces points sont doubles; les tangentes Ec, Ef, Da, Db,... font, avec Ax, des angles qui ont pour tangentes $y'=\pm\sqrt{\frac{2}{3}}$ pour le point E, et $y'=\pm\sqrt{\frac{4}{3}}$ pour D et D'.

Pour les points où la tangente est parallèle aux x, on fera y' nul, ou $0=x(x^2-a^2)$. 1° $x=0$ répond à $y=-a$, ce qui redonne le point E, pour lequel y est $\frac{0}{0}$, et non pas $=0$; on trouve aussi le *maximum* en F, $y=\frac{1}{2}a$. 2° $x=\pm a$ donne, outre les points D et D', les *minima* O et H pour lesquels $y=-\frac{3}{2}a$.

Enfin, $y'=\infty$, ou $y(y+a)=0$ fait connaître les points I et G, où la courbe a sa tangente parallèle aux y : on trouve $AB=AC=DE$.

IV. Soit encore $x^4+2ax^2y-ay^3=0$ (fig. 50);

d'où $$ay'(2x^2-3y^2)+4x(x^2+ay)=0.$$

Après avoir trouvé que l'origine peut seule être un point multiple, on est conduit à la dérivée du 3e ordre, qui donne $y'=0$ et $y'=\pm\sqrt{2}$. Ainsi, en A il y a un point triple : la courbe a pour tangentes l'axe des x, et les lignes AB, Ac à 45°.

On a les *minima* H et O en faisant $y'=0$; ou $x(x^2+ay)=0$,

d'où $$y=-a \text{ et } x=\pm a.$$

Enfin les limites G et F se trouvent en posant $y'=\infty$, ou $2x^2=3y^2$;

d'où $$x=\pm\tfrac{4}{9}a\sqrt{6},\text{ et } y=-\tfrac{8}{9}a.$$

V. L'équ. $y^4-axy^2+x^4=0$ (fig. 51) donne

1°. . . . $2yy'(2y^2-ax)+4x^3-ay^2=0$,

2°. . . . $2(6y^2-ax)y'^2-4ayy'+12x^2=0$,

3°. . . . $24yy'^3-6ay'^2+24x=0$.

On trouve que l'origine est un point triple ; et comme l'on a $y'=0$ et $y'=\infty$, les axes sont tangents à la courbe.

VI. On pourra s'exercer (fig. 52) sur l'équation

$$y^4+x^4-3ay^3+2bx^2y=0\,;$$

la courbe a aussi un point triple à l'origine (*voy.* encore l'ex. IV, p. 378, fig. 48).

782. Lorsque l'équ. est explicite, la recherche des points multiples est bien plus aisée. On a vu (p. 334) que l'abscisse correspondante doit chasser un radical de la valeur de y, en rendant nul son coefficient. Le degré de ce radical dépend du nombre des branches, et l'exposant du coefficient détermine s'il y a simple intersection ou osculation.

L'équ. $y=(1-x)\sqrt{(2-x)}$ donne $y'=\dfrac{3x-5}{2\sqrt{(2-x)}}$.

y perd un radical pour $x=1$, qui ne disparaît pas de y'. Ainsi, l'origine étant en I (fig. 53), $IC=1$ donne un point double en C, pour lequel les branches se coupent sous un angle droit, puisque $y'=\pm 1$. D'ailleurs, $x=\frac{5}{3}$ donne les *maxima* vers D et D' ; $IA=2$ fixe la limite A de la courbe.

Pour l'équ. $y=(2-x)\sqrt{(1-x)}$, la courbe a un point conjugué dont l'abscisse est $x=2$, parce que y est imaginaire dans les points voisins. L'origine est de même un point conjugué pour la courbe dont l'équ. est $y=x\sqrt{(x-b)}$.

Enfin, $y=(x-a)^2\sqrt{(x-b)}+c$, où $a>b$, est l'équ. de la courbe $EDFG$ (fig. 54) formée de deux branches qui ont en D la même tangente ED. Si $x-a$ eût été au cube, les deux branches auraient eu même cercle osculateur, etc. . . .

Du reste, un point triple, quadruple. . . . est annoncé par un radical du 3e, 4e degré. . . .

On a décrit un cercle du diamètre $AI=2r$ (fig. 53) ; une droite AF tourne en A, tandis que PN, perpend. à AI, glisse parallèlement. On demande quelle est la courbe AMC des points M de section de ces deux droites mobiles, le point N étant sans cesse au milieu de l'arc ANF sous-entendu par AF. L'origine étant en C, les équ. des droites mobiles PN, AF sont $x=\alpha$, $y=\beta\,(x-r)$; les coordonnées du point M sont $CP=\alpha$, $PM=\beta\,(\alpha-r)$: comme PN est une ordonnée au cercle, $PN^2=r^2-\alpha^2$. Or, N

étant le milieu de l'arc ANF, le rayon CN est perpend. sur AF, et les triangles APM, CPN sont semblables : d'où

$$\frac{AP}{PM}=\frac{PN}{PC}, \quad \frac{r-\alpha}{\beta(\alpha-r)}=\frac{\sqrt{(r^2-\alpha^2)}}{\alpha}=\frac{-1}{\beta}:$$

telle est l'équ. de condition entre les constantes α et β (nº 462) ; en les éliminant, à l'aide de $x=\alpha$, $y=\beta(x-r)$, il vient, pour l'équ. de la courbe proposée,

$$y=\pm x\sqrt{\left(\frac{r-x}{r+x}\right)}; \quad \text{d'où } y'=\frac{r^2-x^2-rx}{(r+x\sqrt{(r^2-x^2)}}.$$

Il est aisé de reconnaître la fig. 53. L'origine C a un point double, pour lequel $y'=\pm 1$: les tangentes y sont inclinées à 45 degrés sur AI. La *feuille* AC a un *maximum* vers D, et ne s'étend pas au delà du sommet A, qui est une limite. De même que le point M est donné par le milieu N de l'arc ANF, le milieu N' de l'arc $AN'F$ donne M' : on a ainsi deux branches infinies CO, CO' ; les points O et O' de section avec le cercle ont pour abscisse $-\frac{1}{2}r$. Ces branches ont pour asymptotes, la tangente du cercle au point I.

Concavité, convexité et points singuliers des Courbes.

783. On peut employer les situations diverses de la tangente à la recherche de la figure des courbes (nºs 406, 411). Étant donnée l'équ. $y=fx$, et sa tang. au point (x, y), comparons les ordonnées pour la même abscisse $x+h$ (nº 722), fig. 22.

$$yP'H=y+y'h, \quad f(x+h)=P'M'=y+y'h+\tfrac{1}{2}y''h^2+\ldots.$$

Comme on peut prendre h assez petit pour que le signe de $\frac{1}{2}y''h^2$ soit celui du reste de la série, l'ordonnée de la courbe est plus grande ou plus petite que celle de la tangente, suivant que y'' est positif ou négatif ; en sorte que la courbe tourne vers l'axe des x sa convexité dans le 1er cas, et sa concavité dans le 2e. Si les ordonnées étaient négatives, ce serait visiblement le contraire : donc *une courbe tourne vers l'axe des* x *sa convexité ou sa concavité, suivant que* y *et* y'' *sont de mêmes signes ou de signes contraires* (voy. p. 69).

Il est aisé de voir qu'au point d'*inflexion* M (fig. 59 et 60), où la

courbe change sa concavité en convexité, y'' doit aussi changer de signe, ce qui exige qu'en ce point y'' soit nul ou infini : à moins cependant que y ne change de signe en même temps que y'', le point qu'on considère se trouvant dans ce cas sur l'axe des x. C'est au reste ce qui va être développé.

784. Après avoir pris un point (α, β) sur notre courbe, pour juger s'il présente quelque particularité, c'est-à-dire s'il est *Singulier,* il faut comparer les parties de la courbe de part et d'autre de ce point, pour les ordonnées $f(\alpha \pm h)$. Distinguons deux cas.

1[er] CAS. *Le développement de* f $(\alpha + \text{h})$ *ne contenant pour* h *aucun exposant fractionnaire dont le dénominateur soit pair,*

on a $$f(\alpha + h) = \beta + Ah^a + Bh^b + \ldots.$$

Les coefficients sont réels, puisque, s'ils étaient imaginaires, le point (α, β) serait conjugué (n° 779). De plus (quel que soit le signe de h) h^a, h^b.... sont réels, en sorte que la courbe s'étend de part et d'autre du point (α, β).

1° Si le développement de $f(\alpha + h)$ est fautif dès le deuxième terme Ah^a, ou si a est une fraction > 0 et < 1, y' est infini (n° 736), et au point (α, β) la tangente est perpend. aux x. En prenant les dérivées relatives à h, on a

$$f'(\alpha + h) = aAh^{a-1} + \ldots, \quad f''(\alpha + h) = a(a-1)Ah^{a-2}\ldots.$$

La valeur de $f'(\alpha + h)$ est destinée à donner la direction de la tang. au point de la courbe dont l'abscisse est $\alpha + h$, puisqu'il est indifférent que x ou h ait varié dans $f(x + h)$ (*voyez* la note, p. 337).

Cela posé, le signe de Ah^a et de ses dérivées décide de celui des séries entières, lorsque h est très-petit. Que a soit une fraction $\frac{m}{n}$, où n est impair : si m l'est aussi, l'ordonnée $f(\alpha + h)$ croît d'un côté et décroît de l'autre côté de l'ordonnée tangente, parce que $A\sqrt[n]{h^m}$ change de signe avec h. Il y a donc une *inflexion,* disposée comme le montrent les fig. 55 et 56, suivant que A est positif ou négatif.

En effet, $f''(\alpha + h)$ change aussi de signe avec h, parce que $a - 2$ donne à h, dans le 1[er] terme, un exposant impair $m - 2n$: ainsi, la courbe présente d'un côté sa concavité, et de l'autre sa

convexité à l'axe des x (n° 783). Nous avons construit les équ.

$$y = \beta + (x - \alpha)^{\frac{3}{5}} \ldots \text{(fig. 55)},$$
$$y = \beta - (x - \alpha)^{\frac{3}{5}} \ldots \text{(fig. 56)}.$$

On en dira autant pour $y^3 = a^2x$, et $(y - 1)^3 = 1 - x$.

Mais si m est pair, $A\sqrt[n]{h^m}$ a toujours le même signe que A, quel que soit celui de h, en sorte que les ordonnées, voisines de notre tangente de part et d'autre, croissent lorsque A est positif, et décroissent dans le cas contraire, à peu près comme pour les *maxima*. La courbe prend la forme indiquée fig. 57 et 58, que nous appellerons *Cératoïde* *. Le signe de $f''(\alpha + h)$ est visiblement négatif pour l'un et positif pour l'autre, en sorte que la courbe doit présenter à l'axe des x, des deux côtés de l'ordonnée tangente, sa concavité ou sa convexité, suivant que A a le signe $+$ ou le signe $-$.

Les équ. $y = \beta + (x - a)^{\frac{2}{3}}$ et $y = \beta - (x - a)^{\frac{2}{3}}$ donnent les fig. 57 et 58. On en trouve un autre exemple dans la Cycloïde.

2° Mais si le développement n'est pas fautif dans les deux premiers termes, $a = 1$, $b > 1$, y' n'est plus infini, et l'on a A pour la tang. de l'angle que fait avec l'axe des x la droite qui touche la courbe au point (α, β) : elle est parallèle aux x, si $A = 0$; inclinée à 45°, si $A = 1$, etc.

$$f(\alpha + h) = \beta + Ah + Bh^b + \ldots$$
$$f'(\alpha + h) = A + bBh^{b-1} + \ldots$$
$$f''(\alpha + h) = b(b - 1)Bh^{b-2} + \ldots$$

D'après cela, si l'exposant b est un nombre pair, ou une fraction dont le numérateur soit pair, la courbe ne présente au point (α, β) rien de particulier, puisqu'elle s'étend, de part et d'autre, au-dessus de la tangente si B est positif, et au-dessous si B est négatif; la différence entre les ordonnées de ces deux lignes étant Bh^b + etc. On voit d'ailleurs qu'alors le signe de $f''(\alpha + h)$ est le même que celui de B.

* Nous avons préféré les dénominations de *Cératoïde* et *Ramphoïde* à celles de *rebroussement* de la 1re et de la 2e espèce sous lesquelles ces points sont connus. Ces mots sont dérivés de Κέρας, *corne*, Ῥάμφος, *bec d'oiseau*, Εἶδος, *forme*.

C'est ce qui a lieu pour l'équ. $y = \beta + x^2 + (x - \alpha)^{\frac{4}{3}}$.

Cependant, si $A = 0$, il y a *maximum* ou *minimum* (*voy.* p. 359). Cela arrive pour $y = \beta + k\,(x - \alpha)^{\frac{4}{3}}$.

Quand b est un nombre impair, ou une fraction dont le numérateur m est impair, $b = \frac{m}{n}$; Bh^b, ou $B\sqrt[n]{h^m}$, change de signe avec h, les ordonnées croissent d'un côté et décroissent de l'autre : de plus, $f''(\alpha + h)$ est dans le même cas, puisque l'exposant de son 1er terme est aussi un nombre impair $b - 2$, ou une fraction dont le numérateur $m - 2n$ est impair : donc il y a une *inflexion* au point (α, β), dont la disposition dépend de la direction de la tangente, et du signe de B.

Voici plusieurs exemples :

1° $y = x + (x - \alpha)^3$; 2° $y = \frac{1}{2}x + (x - \alpha)^{\frac{1}{3}}$ (fig. 59);

3° $y = x - (x - \alpha)^3$; 4° $y = -(x - \alpha)^{\frac{5}{3}}$ (fig. 60);

5° $y = -x + (x - \alpha)^{\frac{7}{3}}$ (fig. 63) :

la tangente est inclinée à 45° dans les exemples 1°, et 3°; à 135° dans le 5e; elle est parallèle aux x dans le 4e.

Si b est entier (c'est-à-dire, 3, 5, 7....), y'' est nul; on pourra rapprocher notre théorème de celui des *maxima* (n° 757). Chacune des racines de $y'' = 0$ ne peut répondre à une inflexion, qu'autant que la 1re des dérivées y''', y^{iv}...., qu'elle ne rend pas nulle, est d'ordre impair. Si b n'est pas entier, comme il est > 1, y'' est nul ou infini, suivant que b est $>$ ou < 2.

785. 2e cas. *Le développement de* $f(\alpha + h)$ *contenant un radical pair*, l'une des ordonnées $f(\alpha + h)$ ou $f(\alpha - h)$ est imaginaire; l'autre est double, à cause du radical pair qui y introduit le signe $\pm$. Ainsi, la courbe ne s'étend que d'un côté de l'ordonnée β, et elle a deux branches.

1° Si le développement est fautif dès le 2e terme, a est entre 0 et 1; l'ordonnée β est tangente. Supposons que $a = \frac{m}{n}$, n étant pair, le terme $\pm A\sqrt[n]{h^m}$ montre que le point (α, β) est une *Limite* de la courbe dans le sens des x; elle a la forme NMQ ou $N'MQ'$ (fig. 61), suivant que h doit être pris en $+$ ou en $-$; l'une des ordonnées

est $> \beta$, l'autre est $< \beta$ ou PM : d'ailleurs, pour les points voisins de M, l'une des valeurs de $f''(\alpha + h)$ est positive, l'autre est négative ; ce qui prouve que l'une des branches NM est convexe, et que l'autre QM est concave vers l'axe des x.

Les équ. $y = k + x \pm (x - \alpha)^{\frac{3}{4}}$, et $y = k + x \pm (\alpha - x)^{\frac{3}{4}}$ donnent, l'une QMN, l'autre $Q'MN'$. Nous en avons trouvé plusieurs exemples (n° 781).

Mais si le radical pair affecte un des termes qui suivent Ah^a, pour les ordonnées voisines de celle qui est tangente, β est $< f(\alpha + h)$ quand A est positif ; le contraire a lieu lorsque A est négatif ; en sorte que les branches de courbe ont (fig. 62) la forme QMN dans un cas, $Q'MN'$ dans l'autre. On voit d'ailleurs qu'alors $f''(\alpha + h)$ étant de signe contraire à A, la courbe doit affecter cette figure, que nous nommerons une *Ramphoïde*. C'est ce qui a lieu pour $y = \beta + k(x - \alpha)^{\frac{1}{3}} + l(x - \alpha)^{\frac{1}{4}}$.

Quand h doit être négatif, pour que $f(\alpha + h)$ soit réel, la courbe est à gauche de l'ordonnée tangente PM.

2° Lorsque le développement n'est fautif qu'au delà du 2ᵉ terme, $a = 1$, et la tangente à la courbe au point (α, β) sera facile à construire. Si le terme Bh^b porte le radical pair, il a la forme $\pm B\sqrt[n]{h^m}$; l'une des branches est au-dessus de la tang., l'autre s'abaisse au-dessous, puisque cette droite a pour ordonnée $Y = \beta + Ah$: il y a donc une *Cératoïde*. On a y'' nul ou infini, suivant que b est $>$ ou $<$ 2. Pour l'équ. $y = \beta + x + (x - \alpha)^{\frac{3}{2}}$, (fig. 65) la tangente est inclinée à 45°, quand $x = \alpha$.

Pour $2y = -1 - x + 2(1 - x)^{\frac{5}{2}}$, on a la fig. 64.

Mais si l'exposant, dont le dénominateur est pair, est au delà de Bh^b, le signe de B suffit pour décider quelle est la plus grande, de l'ordonnée de la courbe, ou de celle $\beta + Ah$ de la tangente. On voit donc qu'il y a une *Ramphoïde*. On a (fig. 66) pour l'équation

$y = \beta + x + ax^2 + b\sqrt{x^5}$. . . . la courbe QMN,
$y = \beta + x - ax^2 + b\sqrt{x^5}$. . . . la courbe $Q'MN'$.

786. Concluons de là que, 1° aux limites, dans le sens des x ou dans le sens des y, y' est nul ou infini.

2° Aux inflexions et aux cératoïdes, y'' est nul ou infini.

3° Pour trouver les points singuliers, il faut prendre la dérivée $My' + N = 0$ de l'équ. $\varphi(x, y) = 0$ de la courbe ; faire $M = 0$ ou $N = 0$; en tirer, à l'aide de $\varphi(x, y) = 0$, les racines qui *peuvent* seules appartenir aux limites.

4° On prendra de même la dérivée du 2e ordre, ou celle de $y' = -\frac{M}{N}$, qui donne $y'' = \frac{Q}{N}$ (on suivra la 1re règle du n° 705), puis on posera $Q = 0$, ou $N = 0$: ces équ. feront connaître l'x et l'y des points qui sont des inflexions ou des cératoïdes.

5° Il faudra ensuite chercher le développement de $f(x + h)$ pour chacune des valeurs de x ainsi obtenues, ou plutôt reconnaître le cours de la courbe de part et d'autre du point qu'elles déterminent.

6° Les ramphoïdes et les cératoïdes peuvent être considérées comme des points multiples et soumis à la même analyse : elles ont une tangente commune à leurs deux branches au point de rebroussement.

7° On peut encore, dans la discussion des équations, s'aider du développement de y en série ascendante ou descendante (n° 747) suivant les puissances de x ; on aura aisément les limites de la courbe, si elle en comporte ; et pour les branches infinies, on obtiendra leurs asymptotes courbes ou droites, etc.

Voici encore quelques exemples : on en trouvera beaucoup d'autres dans le Traité de *Cramer*.

$y = x + \sqrt[4]{(x-1)}$, $\quad y = x^2 + \sqrt{(x-2)}$ (fig. 61),

$y = x + \sqrt{(x-1)^3}$, $\quad y = x^3 + \sqrt{x^3}$ (fig. 65),

$y = x^2 + \sqrt{(x-1)^5}$, $\quad y = ax^2 + \sqrt{x^5}$ (fig. 66),

$y = \sqrt[3]{x^8} + ax$, $\quad y = \sqrt[3]{(x-\alpha)^{10}} + x$ (fig. 44),

$y = \sqrt[3]{(x-1)^2}$ (fig. 57), $\quad y = \beta - \sqrt[5]{x^2}$ (fig. 58),

$y = x^2 + \sqrt[3]{(x-1)^5}$ (fig. 59), $\quad y = x^3 + x^2 - \sqrt[5]{x^7}$ (fig. 60).

Des Surfaces et des Courbes dans l'espace.

787. Soient $z = f(x, y)$, $Z = F(X, Y)$ les équations de deux surfaces courbes ; pour qu'elles aient un point commun (x, y, z), il faut que pour les mêmes ordonnées $Z = z$, on ait $x = X$, $y = Y$.

Prenons sur chacune un autre point répondant aux abscisses $x+h$ et $y+k$; nous représenterons, pour abréger, les z correspondants (nº 743) par

$$\begin{array}{llll} z+ph+\frac{1}{2}rh^2+\ldots & & Z+Ph+\frac{1}{2}Rh^2+\ldots \\ \quad +qk+\;\; shk+\ldots & & \quad +Qk+\;\; Shk+\ldots \\ \qquad\quad +\frac{1}{2}tk^2+\ldots & & \qquad\quad +\frac{1}{2}Tk^2+\ldots \end{array}$$

La distance entre les deux points dont il s'agit est

$$(P-p)h+(Q-q)k+\tfrac{1}{2}(R-r)h^2+\ldots\ldots$$

Si $P=p$ et $Q=q$, c'est-à-dire si les différentielles partielles du 1er ordre de nos fonctions f et F sont respectivement égales, les raisonnements du nº 770 feront voir qu'une 3e surface ne pourra approcher des premières autant qu'elles approchent l'une de l'autre, à moins que celle-là ne remplisse les mêmes conditions à leur égard : il y a alors *contact du* 1er *ordre*. Pour le contact du 2e ordre, il faudrait en outre que les différences partielles du 2e ordre fussent aussi égales entre elles, ou

$$R=r,\quad S=s,\quad T=t.$$

Par ex., tout plan a pour équ. (nº 659) $Z=AX+BY+C$; sa position dépend des constantes A, B, C, qu'on peut déterminer en établissant une osculation du 1er ordre. x, y et z étant les coordonnées du point de contact, il vient

$$z=Ax+By+C,\quad p=A,\quad q=B,$$

p et q désignant toujours les fonctions $\frac{dz}{dx}$, $\frac{dz}{dy}$, tirées de l'équ. $z=f(x,y)$ de la surface courbe ; cette équ. ayant par conséquent pour dérivée $dz=pdx+qdy$.

Si l'on élimine A, B, C, on trouve, pour le plan tangent,

$$Z-z=p(X-x)+q(Y-y).\quad\ldots\ldots\quad (A)$$

Une fois l'équ. du plan tangent obtenue, il sera facile de trouver tout ce qui se rapporte à sa position. Par ex., le cos. de l'angle φ qu'il fait avec le plan xy, est $\cos\varphi=\frac{1}{\sqrt{(1+p^2+q^2)}}$.

La normale qui passe par le point (x, y, z) est de plus perpendiculaire au plan tangent; ces conditions, exprimées en analyse (nº 668), donnent, pour les équ. de la normale,

$$X - x + p(Z - z) = 0, \quad Y - y + q(Z - z) = 0 \ldots \quad (B)$$

788. Voici plusieurs exemples de l'usage qu'on peut faire des équ. A et B.

I. Tous les cylindres ont cette propriété distinctive, que le plan qui les touche en un point, touche selon une génératrice; cette droite est parallèle à une autre (nº 680) dont on donne les équ. $x = az$, $y = bz$. Énonçons ce fait en analyse, et nous aurons exprimé que la surface touchée est un cylindre, sans avoir particularisé la courbe directrice; nous aurons donc l'équation de toute espèce de cylindre. On a donné (nº 667) la condition du parallélisme d'un plan avec une droite : elle devient ici (où $A = p$, $B = q$), $ap + bq = 1$, équ. cherchée (*voy.* p. 343).

II. Le plan tangent au cône passe par le sommet. Mettons pour X, Y et Z, dans l'équ. (A), les coordonnées a, b, c de ce point, et l'équ. $z - c = p(x - a) + q(y - b)$, exprimant la propriété qui caractérise toute surface conique, quelle qu'en soit la base, sera l'équ. de cette surface (nº 745).

III. Imaginons qu'une droite coupe sans cesse l'axe des z et demeure horizontale, tandis qu'elle glisse le long d'une courbe : elle engendre une surface nommée *Conoïde*, à cause de sa ressemblance avec un cône dont le sommet aurait une arête. Ce qui caractérise ces surfaces, c'est qu'un plan les touche selon une génératrice horizontale : exprimons analytiquement cette propriété. En faisant $Z = z$, dans l'équation (A), nous avons

$$(X - x)p + (Y - y)q = 0;$$

ce sont les équ. d'une horizontale tracée dans le plan tangent. Pour que cette droite coupe l'axe des z, il faut que sa projection sur le plan xy passe par l'origine, ou bien que $px + qy = 0$: telle est l'équ. de tous les conoïdes.

IV. Toute normale d'une surface quelconque de révolution va couper l'axe; donc, si l'on élimine X, Y, Z, entre les équations (B) de la normale et celles de l'axe de révolution, l'équ. résultante en x, y, z, exprimant la propriété énoncée, sera celle de la surface de révolution, quel qu'en soit le méridien. Par ex., si l'axe est celui des

z, dont les équations sont $X = 0$, $Y = 0$, l'élimination donne $py = qx$, équ. de toute surface de révolution autour de l'axe des z (nº 745).

Lorsqu'on veut particulariser une espèce de surface cylindrique, conique...., il faut introduire, pour p et q, des fonctions de x et y, qui sont déterminées par la nature de la courbe directrice donnée. C'est ce qui sera examiné par la suite (nº 901).

789. Nous avons traité (nº 760) des *maxima* des fonctions de deux variables. Il en résulte que si l'on veut trouver les z *maxima* ou *minima* d'une surface courbe, dont on a l'équation $z = f(x, y)$, il faudra poser $p = 0$; $q = 0$ (le plan tangent parallèle aux xy), et éliminer x, y et z entre ces trois équ. ; mais les coordonnées ainsi obtenues n'appartiendront à des points doués de la propriété dont il s'agit, qu'autant qu'elles satisferont à la condition (2) (p. 360), qui apprendra à distinguer le *maximum* du *minimum*.

790. Pour que le plan tangent soit perpend. au plan yz, il faut que son équ. soit réduite à la forme $Z - z = q(Y - y)$ (nº 655) ; ainsi $p = 0$. Plus généralement, soit

$$Pdx + Qdy + Rdz = 0,$$

la différentielle de l'équ. d'une surface (nº 744) ; $P = 0$ est la condition qui exprime que le plan tangent est perpend. au plan yz. Il faut donc que les coordonnées x, y, z du point de contact satisfassent à l'équ. $P = 0$, et à celle $\varphi(x, y, z) = 0$ de la surface. Telles sont donc les équ. de la courbe qui jouit de la propriété que le plan tangent soit perpend. au plan yz; cette courbe est la limite de la surface dans le sens des yz. Ainsi, en éliminant x, on a la projection de la surface sur le plan des yz. De même, celle sur le plan xy se trouve en éliminant z entre $\varphi = 0$, et $R = 0$. Les deux équ. $P = 0$, $Q = 0$, se rapportent au *maximum* de z, etc.

Pour la sphère, par exemple (nº 654),

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = r^2,$$

la dérivée relative à z seul est $z - c = 0$; éliminant z, on a $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$, pour l'équ. du cercle de projection sur le plan xy ; ce qui est d'ailleurs visible.

791. Projetons sur le plan xy l'arc s de courbe dans l'espace, puis développons (nº 287, 4º) le cylindre formé par le système des perpend. à ce plan : la base est un arc λ, projection de l'arc s. Or,

on peut concevoir cet arc s rapporté aux coordonnées rectangles λ et z, puisque λ est étendu en ligne droite ; l'aire t du cylindre et la longueur de l'arc s seront données (n°s 767 et 768) par les relations $t' = z$, $s'^2 = 1 + z'^2$, dans lesquelles les dérivées se rapportent à λ. Si l'on veut qu'elles soient relatives à x, on aura (n° 734)

$$dt = zd\lambda, \quad ds^2 = d\lambda^2 + dz^2.$$

Mais l'arc λ est rapporté aux variables du plan xy, en sorte que $d\lambda^2 = dx^2 + dy^2$; donc

$$dt = z\sqrt{(dx^2 + dy^2)},$$
$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2.$$

Une courbe dans l'espace est donnée par les équ. de deux surfaces dont elle est l'intersection, telles que $M = 0$, $N = 0$: qu'on en tire les différentielles dy et dz en fonction de x, et qu'on substitue, l'intégration de ces formules donnera, d'une part, l'aire t du cylindre droit, qui a pour base la projection de l'arc, et qui est terminée par cet arc ; et de l'autre la longueur de l'arc rectifié.

792. Supposons que le trapèze curviligne $CBMP$ (fig. 40) tourne autour de l'axe Ax, cherchons le volume v et l'aire u du corps de révolution qu'il engendre, l'équ. de l'arc BM étant donnée, $y = fx$. Soient $v = Fx$, $u = \varphi x$; il s'agit de déterminer les fonctions F et φ. Attribuons à x l'accroissement $PP' = h$; y, v et u deviendront $y + k$, $v + i$, $u + l$; d'où

$$k = y'h + \ldots, \quad i = v'h + \ldots, \quad l = u'h + \ldots$$

Il s'agit maintenant, pour appliquer la méthode des limites, de trouver des grandeurs qui comprennent entre elles les accroissements i et l, quelque petit que soit h.

1° Les rectangles $MPP'Q$, $LPP'M'$, engendrent, dans leur révolution autour de Ax, des cylindres dont les volumes sont $\pi y^2 h$ et $\pi(y + k)^2 h$ (n° 308) : leur rapport ayant l'unité pour limite, et le volume i, engendré par l'aire $MM'P'P$, étant toujours intermédiaire entre ceux-ci, l'unité doit être aussi la limite du rapport

$$\frac{i}{\pi y^2 h} \text{ ou } \frac{v' + \text{etc.}}{\pi y^2}; \quad \text{donc} \ldots\ldots v' = \pi y^2.$$

2° La corde MM' et la tang. MH décrivent des troncs de cône, dont les aires (n° 290, 3°) sont $\pi(2y + k) \cdot MM'$, et $\pi(2y + y'h) \cdot HM$;

le rapport de MM' à MH tend sans cesse vers l'unité (nº 767); la limite du rapport de nos deux aires est donc 1, qui est par conséquent celle du rapport

$$\frac{\pi(2y+k)\,MM'}{l} = \frac{\pi(2y+k)\,.\sqrt{(1+y'^2+y'y''h\ldots.)}}{u'+\frac{1}{2}u''h+\ldots.},$$

attendu que l'aire l décrite par l'arc MM' est intermédiaire entre les premières, quelque petit que soit h. Donc

$$u' = 2\pi y\sqrt{(1+y'^2)} = 2\pi ys'.$$

On mettra fx pour y dans ces valeurs de v' et u', et l'on intégrera; c'est-à-dire qu'on remontera aux fonctions v et u dont elles sont les dérivées (nº 851).

793. Traçons sur un plan APB (fig. 67) un trapèze $CDEF$. Soient $cdef$ sa projection sur un autre plan AQB, et α l'angle de ces deux plans; supposons que les côtés CD, EF soient perpend. à l'intersection AB, on a (nº 354) $cd = CD \times \cos\alpha$, $ef = EF \times \cos\alpha$; donc l'aire du trapèze

$$cdef = \tfrac{1}{2}GH \times (CD+EF)\cos\alpha = CDEF \times \cos\alpha.$$

Cette relation entre notre trapèze et sa projection a également lieu pour un triangle quelconque DIF (fig. 68), puisqu'en menant les perpend. CD, LF sur AB, et CE parallèle à DF, on forme le parallélogramme $CDLF$, dont l'aire est double de celle du triangle DIF. Or, d'une part, toute figure rectiligne est décomposable en triangles; de l'autre, on peut, par la méthode des limites, étendre aussi la proposition à toute aire plane curviligne. Donc *la projection* P *sur un plan d'une aire plane quelconque* A, *est le produit de cette aire par le cosinus de l'angle des deux plans*, $\mathrm{P} = \mathrm{A}\cos\alpha$.

Soient donc α, α', α'', les angles que fait une aire plane A avec les plans coordonnés; P, P', P'', ses trois projections; on a

$$P = A\cos\alpha,\quad P' = A\cos\alpha',\quad P'' = A\cos\alpha'';$$

faisant la somme des carrés, il vient

$$A^2 = P^2 + P'^2 + P''^2,$$

à cause de $\cos^2\alpha + \cos^2\alpha' + \cos^2\alpha'' = 1$ (nº 674, 1º). Donc, *le carré d'une aire plane quelconque est la somme des carrés de ses trois projections sur les plans rectangulaires coordonnés.*

Ces théorèmes servent à trouver l'étendue des surfaces planes situées dans l'espace, en les ramenant à être exprimées à l'aide de deux variables.

794. Soit $z=f(x,y)$ l'équ. d'une surface courbe; menons quatre plans parallèles deux à deux, à ceux des xz et des yz; cherchons le volume V et l'aire U du corps $MNEF$ (fig. 69) renfermé entre ces limites. Attribuons à x et y les accroissements h et k; le point $M(x, y, z)$ sera comparé au point C : le corps aura pris l'accroissement renfermé entre les plans ME, SD, FM, SB; V et U sont donc des fonctions de x et y qu'il s'agit de déterminer. x étant augmenté de h, et y de k, V sera accru (n° 743) de

$$\frac{dV}{dx}h+\frac{dV}{dy}k+\frac{d^2V}{dx^2}\cdot\frac{h^2}{2}+\frac{d^2V}{dxdy}hk+\frac{d^2V}{dy^2}\cdot\frac{k^2}{2}+\ldots.$$

Or, si l'on n'eût fait croître que x de h, ou bien que y de k, le corps aurait reçu l'augmentation

$$MPRBF=\frac{dV}{dx}h+\frac{d^2V}{dx^2}\frac{h^2}{2}+\ldots,$$

$$PEDMQ=\frac{dV}{dy}k+\frac{d^2V}{dy^2}\frac{k^2}{2}+\ldots;$$

donc, en retranchant, on a volume $MCRQ=\dfrac{d^2V}{dxdy}hk+\ldots.$

On verrait de même que l'aire $MC=\dfrac{d^2U}{dxdy}hk+\ldots.$

Pour appliquer ici la méthode des limites, cherchons des grandeurs entre lesquelles ce volume et cette aire soient toujours renfermés, quelque petit que soit h; représentons le corps $MCRSQP$ à part (fig. 70).

1° Le parallélipipède rectangle $MPSs$ a pour volume hkz; celui du parallélipipède construit sur la même base, et dont $SC=z+l$ est la hauteur, est $=hk(z+l)$.

Le rapport $\dfrac{z}{z+l}$ de ces volumes ayant l'unité pour limite, 1 est aussi la limite de

$$hkz : \frac{d^2V}{dxdy}kh+\ldots; \quad \text{d'où } \frac{d^2V}{dxdy}=z.$$

On mettra donc pour z sa valeur $f(x,y)$, puis on intégrera deux

fois, d'abord relativement à x, en regardant y comme constant; enfin, on intégrera de nouveau le résultat par rapport à y seul (*voy.* nº 852).

2° Menons un plan tangent Ms' au point $M(x, y, z)$; l'aire $Mr's'q'$, qui est renfermée entre les plans MR, MQ, Qs', $s'R$, est (nº 793) le quotient de sa base $PQRS$ divisée par le cosinus de l'angle qu'elle fait avec le plan xy, savoir (nº 674, 1°) :

$$hk : \frac{1}{\sqrt{(1+p^2+q^2)}} = hk\sqrt{(1+p^2+q^2)}.$$

Mais il est facile de voir que l'unité est la limite du rapport de $\frac{d^2U}{dxdy}hk + \ldots$ à cette quantité. Donc

$$\frac{d^2U}{dxdy} = \sqrt{(1+p^2+q^2)}.$$

Il faudra donc différentier l'éq. $z = f(x,y)$ de la surface; puis de $dz = pdx + qdy$, tirer les valeurs de p et q en fonction de x et y, et les substituer ici; enfin, intégrer comme on l'a dit ci-dessus. Nous donnerons des applications de ces diverses formules (nº 855).

795. Imitons en trois dimensions ce qui a été dit des osculations des courbes planes. $z = f(x, y)$, $Z = F(X, Y)$ sont les équ. de deux surfaces courbes; si elles ont un point commun (x, y, z), pour en comparer l'écartement dans les parties voisines de ce point, on changera X et x en $x + h$, Y et y en $y + k$, et l'on prendra la différence δ des z. Continuons de supposer

$$\frac{dz}{dx} = p,\quad \frac{dz}{dy} = q,\quad \frac{d^2z}{dx^2} = r,\quad \frac{d^2z}{dxdy} = s,\quad \frac{d^2z}{dy^2} = t;$$

que de même P, Q.... aient de semblables significations pour la 2ᵉ surface. On démontrera précisément, comme nº 770, que si l'on a $P = p$, $Q = q$, la différence δ étant du 2ᵉ ordre en h et k, aucune autre surface, qui ne remplirait pas les mêmes conditions, ne pourrait approcher de la 1ʳᵉ surface autant que le fait la 2ᵉ; et si, en outre, on a $R = r$, $S = s$, $T = t$, l'osculation sera du 2ᵉ ordre, et les deux surfaces auront un plus grand degré de rapprochement dans la région voisine du point commun, et ainsi de suite.

Soit, par ex., un plan $Z = AX + BY + C$; il aura un contact du 1ᵉʳ ordre avec la surface $z = f(x,y)$, si l'on détermine les con-

stantes A, B, C par ces conditions, que le plan passe par le point donné (x, y, z), et qu'on ait $A = p$, $B = q$. De là résulte l'équ. (A) du plan tangent (nº 797).

Pour la sphère, on a l'équation

$$(X - a)^2 + (Y - b)^2 + (Z - c)^2 = n^2.$$

On établit ainsi un simple contact au point x, y, z (nº 744),

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = n^2,$$
$$(x - a) + p(z - c) = 0, \quad y - b + q(z - c) = 0;$$

ces trois équations déterminent les coordonnées du centre, et par conséquent la sphère, dans le cas d'un simple contact, lorsque le rayon n est connu. En posant, pour abréger, $(1 + p^2 + q^2)^{-\frac{1}{2}} = \varphi$, l'élimination donne

$$a = x + np\varphi, \quad b = y + nq\varphi, \quad c = z - n\varphi; \; \ldots \; (1)$$

cette sphère a même plan tangent que la surface; son centre est sur la normale, équation (B) p. 390. Pour que l'osculation fût du 2ᵉ ordre, il faudrait déterminer l'arbitraire n de manière à rendre $R = r, S = s, \; T = t$: puisqu'on n'a qu'une constante à déterminer, on ne peut remplir ces trois conditions; en général toute surface n'a donc pas une sphère osculatrice comme une courbe a un cercle osculateur.

796. Mais rendons la somme des termes du 2ᵉ ordre de la série (nº 787) les mêmes pour la sphère et notre surface, ou

$$r + 2s\alpha + t\alpha^2 = R + 2S\alpha + T\alpha^2,$$

α étant le rapport $k : h$; on trouve pour les dérivées du 2ᵉ ordre de l'équ. de la sphère relatives à x et à y,

$$(z - c)R + 1 + p^2 = 0, \; (z - c)S + pq = 0, \; (z - c)T + 1 + q^2 = 0:$$
$$(z - c)(r + 2\alpha s + t\alpha^2) + 1 + p^2 + 2pq\alpha + (1 + q^2)\alpha^2 = 0 \ldots. \; (2)$$

p, q, r, s, t sont des fonctions de x et y, qu'on tire de l'équation $z = f(x,y)$ de la surface proposée; α est la tangente de l'angle que fait, avec l'axe des x, une droite qui touche au point commun, et est menée dans une direction arbitraire. Cette équ. fait connaître $z - c$ en fonction de x, y et α; les équ. (1) donnent ensuite a, b, et

le rayon n de courbure de la section faite par un plan passant par la normale et la tangente dont il s'agit. On peut donc trouver les courbures de la surface dans toutes les directions imaginables.

Ayons surtout égard aux sections dont la courbure est la plus grande ; faisons varier n par rapport à α seul, et posons $n' = 0$ (n° 757). Mais, d'après l'équ. (1), on a alors $c' = 0$, en prenant z, p, q, constants ; donc la dérivée de l'équ. (2) relative à c et α, en faisant c' nul, donne :

$$\left.\begin{array}{l}(z-c)(s+t\alpha)+pq+(1+q^2)\alpha=0\\ (z-c)\,s\alpha+pq\alpha+(z-c)\,r+1+p^2=0\end{array}\right\}, \quad \ldots \quad (3)$$

d'où (la seconde), en multipliant par α et retranchant de (2). Il est aisé d'éliminer α entre ces deux équ., et d'arriver à cette relation destinée à donner $z-c$,

$$A(z-c)^2+B(z-c)+\varphi^{-2}=0\,; \quad \ldots\ldots \quad (4)$$

ou $\quad A=tr-s^2, \quad B=r(1+q^2)+t(1+p^2)-2pqs.$

On en tire deux valeurs de $z-c$, et par suite (1) donne les rayons n de la plus grande et de la moindre courbure de la surface au point donné (x, y, z) : enfin, l'une des équ. (3) fait connaître α, ou les directions de ces deux courbures.

Concevons nos deux *lignes de courbure* tracées à la surface proposée ; elles sont indépendantes du système d'axes auquel celle-ci est rapportée, et restent constantes lorsqu'on change de plans coordonnés. Prenons le plan tangent pour celui des xy ; il est visible que x, y, z, p et q sont nuls, et les équ. (3) deviennent

$$c(s+t\alpha)=\alpha, \quad c(s\alpha+r)=1\,;$$

d'où

$$s\alpha^2+\alpha(r-t)-s=0.$$

Le produit des deux racines de α étant -1, on en conclut que les deux courbes se coupent à angle droit. Donc, à l'exception des cas très-particuliers où l'équ. (4) serait satisfaite d'elle-même, *sur toute surface, si l'on prend un point quelconque, il y a toujours deux plans, passant par la normale en ce point, qui sont perpend. l'un à l'autre, et donnent la plus grande et la moindre courbure de la surface.* Les équ. précédentes font connaître ces deux directions, et par suite les rayons de ces deux courbures.

797. Étant donnée une courbe dans l'espace, par les équ. de deux surfaces dont elle est l'intersection, en éliminant successivement x et y entre ces équ., on aura remplacé ces surfaces par deux cylindres perpend. aux plans coordonnés des xz et des yz, et les équ. résultantes $z = fx$, $z = Fy$, seront celles des projections de la courbe sur ces plans. Une tang. à la courbe l'est aux cylindres, et par conséquent ses projections sont tang. à celles de la courbe; ainsi les équ. de la tang. sont

$$Z - z = p(X - x), \quad Z - z = q(Y - y).$$

Qu'on mette $f'x$ et $F'x$ pour p et q, et ces équ. seront déterminées. En éliminant x, y, z, entre nos quatre équ., on a une relation entre X, Y, Z, qui est l'équation de la tangente en un point quelconque de la courbe, c'est-à-dire celle de la surface engendrée par une droite mobile sans cesse tangente. Si cette surface est un plan, la courbe est plane, autrement elle a *une double courbure :* on distinguera donc aisément ces deux cas l'un de l'autre.

Au point de contact, il y a une infinité de perpend. à la tangente; cette multitude de normales déterminent le plan *normal,* dont il est facile de trouver l'équ. (n° 668),

$$Z - z + \frac{X - x}{p} + \frac{Y - y}{q} = 0.$$

798. On peut appliquer la théorie des contacts des surfaces aux courbes à double courbure, mais nous n'entrerons pas ici dans ces détails [voyez *Fonct. analyt.* (n° 141), et l'*Anal. appl.* de Monge]. Bornons-nous à la recherche du *plan osculateur.* Soient $z = fx$, $y = \psi x$ les équ. de la courbe; celle du plan qui passe par le point (x, y, z), est

$$Z - z = A(X - x) + B(Y - y).$$

Déterminons A et B en établissant un contact du 2e ordre. Si l'on change x en $x + h$, y et z recevront, pour la courbe, les accroissements

$$l = hf' + \tfrac{1}{2}h^2f'' \ldots \quad k = h\psi' + \tfrac{1}{2}h^2\psi'' \ldots$$

Mettons donc $x + h$, $y + k$, $z + l$ pour X, Y, Z, dans l'équ. du plan : il vient $l = Ah + Bk$, ou

$$hf' + \tfrac{1}{2}h^2f'' + \ldots = (A + B\psi')h + \tfrac{1}{2}Bh^2\psi'' + \ldots$$

Les arbitraires A et B seront déterminées par ces deux conditions $A + B\psi' = f'$, $B\psi'' = f''$; donc l'*équation du plan osculateur* est

$$\psi''(Z - f) = (f'\psi'' - f''\psi')(X - x) + f'' . (Y - \psi).$$

De la méthode infinitésimale.

799. Nous avons déjà remarqué (tome I, note, page 268), en appliquant la méthode des limites (n° 113) à une équ. entre des constantes et des variables qui peuvent être rendues aussi petites qu'on veut, que lorsqu'on n'a besoin que de la relation qui lie les termes constants, ce n'est pas commettre une erreur que de négliger dans le calcul quelques-uns des termes qu'on sait devoir disparaître par la nature même du procédé. Il en a été de même (n° 422) pour la méthode des tangentes. La certitude mathématique ne sera donc pas altérée par ces omissions volontaires, pourvu qu'on se soit assuré qu'en effet elles n'affectent que les quantités qui, par la nature même de l'opération, doivent disparaître du résultat.

On pourra donc, dans toute question semblable, omettre les termes *indéfiniment petits*, que les géomètres ont appelés, avec Leibnitz, des *infiniment petits*. En se dispensant d'y avoir égard, on abrégera beaucoup les calculs, puisqu'il est souvent difficile d'évaluer ces termes; et les résultats seront exacts. On pourra même présenter la théorie avec la rigueur géométrique, en prouvant que les quantités omises sont au rang de celles qui doivent en être supprimées. Cette méthode est précieuse, non-seulement pour graver les résultats dans la mémoire, mais encore pour les spéculations analytiques compliquées; et il importe de ne pas se priver d'un secours aussi puissant, surtout en considérant qu'on peut toujours rendre au procédé la rigueur qui lui manque en apparence.

800. Les applications de ces notions aux éléments de Géométrie sont si faciles, que nous nous dispenserons de les faire; chacun pourra aisément y suppléer. Mais venons-en à celles du Calcul différentiel.

Soient $y, z, t \ldots$ des fonctions données quelconques de x; si x prend l'accroissement dx, ceux que prendront $y, z \ldots$ résulteront des relations données qui lient ces variables à x, et l'on aura

$$\mathrm{d}y = A\mathrm{d}x + B\mathrm{d}x^2 + \ldots, \quad \mathrm{d}z = A'\mathrm{d}x + B'\mathrm{d}x^2 + \ldots$$

Or, quel que soit le but de notre opération, dy doit être combiné avec dz, dt...., de manière à former une équ. $M=0$. Lorsqu'on aura substitué à dy, dz.... leurs valeurs, dx sera facteur commun, et pourra être omis dans l'équ. $M=0$, en sorte que les premiers coefficients A, A',.... en soient seuls exempts. Mais x, y, z.... étant maintenant regardés comme des termes fixes, leurs accroissements dx, dy.... pourront être rendus aussi petits qu'on voudra, de sorte qu'en faisant d$x=0$, l'équ. $M=0$ devra perdre tous les termes B, B'.... On pourra donc d'avance dégager le calcul de ces termes, et dire que d$y=A$dx, d$z=A'$dx....; les autres termes sont négligés comme des *infiniment petits du 2e ordre,* expression qui sert à éviter une circonlocution.

On conçoit les grandeurs comme formées de parties quelconques élémentaires, qu'on nomme *Différentielles,* et qu'on désigne par la lettre d, comme nous l'avons indiqué n° 698. Ces différentielles, comparées aux éléments véritables, n'en diffèrent que de *quantités négligeables,* c'est-à-dire de valeurs que le calcul ferait disparaître si l'on y avait égard. Le résultat n'étant pas atteint de cette sorte d'erreur, en prenant ainsi des quantités défectueuses au lieu des véritables, on se trouve conduit à des calculs et à des considérations simples qui abrégent singulièrement les opérations.

dx, dy, différentielles de x et y, ne sont pas précisément les accroissements de ces variables, quoiqu'on les traite comme tels, puisqu'au lieu de prendre d$y=A$d$x+B$dx^2...., on prend seulement d$y=A$dx; ce sont des quantités qui ne diffèrent de ces accroissements que de parties qui s'entre-détruisent par le calcul, et qu'il est inutile de considérer.

A est la dérivée que nous avons désignée par y', et que nous savons trouver pour toute fonction. Il est, au reste, bien aisé de l'obtenir de nouveau, en partant des principes mêmes que nous venons d'exposer. En voici quelques exemples :

Soit $y=zt$, z et t étant des fonctions de x, on a

$$\mathrm{d}y=(z+\mathrm{d}z)(t+\mathrm{d}t)-zt=t\mathrm{d}z+z\mathrm{d}t,$$

en négligeant dz . dt, qui ne contient que dx^2, dx^3....

Pour $y=z^m$, on a

$$\mathrm{d}y=(z+\mathrm{d}z)^m-z^m=mz^{m-1}\mathrm{d}z,$$

en négligeant les dz^2, dz^3.... (*voy.* n° 708).

Soit $y = a^z$; d'où $dy = a^{z+dz} - a^z = a^z(a^{dz} - 1)$; mais (p. 221) on a $a^h = 1 + kh + \ldots$; donc $dy = ka^z dz$, en supprimant les dx^2, $dx^3 \ldots$

$y = \text{Log}\, z$ donne $z = a^y$, et

$$dy = \text{Log}\,(z + dz) - \text{Log}\, z = \text{Log}\left(1 + \frac{dz}{z}\right):$$

$$\text{donc } a^{dy} = 1 + \frac{dz}{z}; \text{ or, } a^{dy} = 1 + k\,dy; \text{ ainsi } dy = \frac{dz}{kz}.$$

801. La méthode infinitésimale consiste, comme on voit, à substituer dans le calcul, aux véritables accroissements qui en font l'objet, d'autres quantités dont l'erreur soit de nature à ne pas altérer le résultat. Au lieu des variations véritables, qui seraient difficiles à traiter et compliqueraient les opérations, on prend à leur place d'autres quantités plus simples, et qui se prêtent mieux aux recherches qu'on a en vue, aux calculs qu'on doit exécuter. Mais pour être en droit de prendre des valeurs défectueuses, il faut, avant tout, s'être assuré qu'il n'en résultera aucune erreur, et que si l'on ajoutait à celles-ci ce qui leur manque, ces parties ajoutées s'entre-détruiraient.

Ainsi, pour que la méthode puisse être employée en toute sûreté, il faut remplir une condition indispensable, celle de l'*égalité des limites, ou dernières raisons,* qui consiste à comparer les grandeurs véritables à celles qu'on leur substitue, à les faire varier ensemble, et à voir si, dans leur diminution progressive, leur rapport tend sans cesse vers l'unité, car *l'unité en doit être la limite.* Si un arc de courbe BM (fig. 40) a pour accroissement l'arc MM', on pourra prendre en sa place la corde MM'; cette corde sera la différentielle de l'arc, attendu qu'en rapprochant les points M et M', l'arc et la corde diminuent, et leur rapport tend vers l'unité qui en est la limite. Mais on ne doit pas prendre MQ pour différentielle de MM', sous prétexte que MM' et MQ tendent à l'égalité, et deviennent nuls ensemble, car le rapport $MM' : MQ$ n'a pas 1 pour limite. C'est ainsi que ax^2 et bx, qui deviennent nuls ensemble, ont pour rapport $\frac{ax}{b}$, dont la limite est zéro, et non pas 1.

En comparant un arc de cercle à son sinus, on peut prendre l'accroissement de l'un pour celui de l'autre : $y = \sin z$ donne $dy = \sin(z + dz) - \sin z$, ou $\sin z \cos dz + \sin dz \,.\, \cos z - \sin z$.

En remplaçant sin dz par dz et cos dz par 1, parce que les rapports de ces grandeurs tendent vers l'unité, on trouve $dy = dz \cdot \cos z$. On trouverait de même la différentielle de $\cos x$, de arc ($\tang = x$)....

Un principe qu'on ne doit jamais perdre de vue, dans ce genre de considérations, est celui de l'*homogénéité*, qui consiste en ce que les différentielles doivent être de même nature que la grandeur qu'on considère, et de même ordre entre elles. On ne peut donc prendre pour différentielle d'un solide qu'un autre solide; pour celle d'une surface qu'une aire, etc.; on ne doit pas regarder une ligne comme la somme d'une infinité de points, une aire comme la réunion d'une série de lignes, etc.; et en outre, *toute formule ne devra jamais renfermer que des termes où les différentielles seront de même ordre.*

Cet artifice, qui traite les différentielles comme si elles étaient exactes, donne lieu, il est vrai, à des équ. défectueuses; mais on ne doit pas s'en inquiéter, parce qu'on est convaincu que le résultat définitif n'en sera pas atteint, toutes les fois qu'on n'aura en vue que les limites, lesquelles sont les mêmes pour les différentielles et pour les éléments véritables. Ce calcul se présente d'abord comme un moyen d'approximation, puisqu'on remplace ceux-ci par des quantités qui en sont voisines; mais comme on ne destine ce calcul qu'à la détermination des dernières raisons, qui sont les mêmes pour les uns et les autres, le calcul acquiert la rigueur même de l'Algèbre; et le langage, aussi bien que la notation, en ont toute l'exactitude, puisque dès qu'on prononce les mots d'*infiniment petit*, de *différentielle*, on entend ne faire usage du calcul que dans les problèmes qui dépendent, non plus des grandeurs qu'on a envisagées, mais des rapports de leurs dernières raisons. *Une différentielle est donc une partie de la différence, partie dont le rapport avec cette différence a l'unité pour limite.*

Dans le Calcul intégral, qui a pour but de remonter des dérivées aux fonctions primitives, on regarde l'intégrale comme la somme des éléments ou des différentielles, ainsi que nous aurons occasion de le remarquer, n°s 842, 846 et 852.

Les applications de ces principes à la Géométrie et à la Mécanique sont très-fréquentes. Voici quelques exemples des premières.

802. Soient $BM = s$ (fig. 40) un arc de courbe, les coordonnées de M étant x et y; enfin $y = fx$ l'équ. de cette courbe. La tangente TM sera supposée le prolongement de l'élément infiniment petit

MM' de la courbe ; ce qui revient à dire que la corde de l'arc $MM' = ds$, pouvant approcher autant qu'on veut de MH, l'angle $M'MQ$, dont la tangente $= \frac{M'Q}{MQ}$, ne diffère de HMQ que d'une quantité indéfiniment petite. En résolvant le triangle $M'MQ$, dont les côtés sont dx, dy et ds, on a donc, comme n° 762 et p. 367,

$$\text{tang } T = \frac{dy}{dx}, \quad \cos T = \frac{dx}{ds}, \quad \sin T = \frac{dy}{ds}.$$

Puisque l'arc $MM' = s$ et sa corde ont l'unité pour limite de leur rapport, on peut substituer l'arc ds à sa corde, et l'on a la longueur de l'hypoténuse, ou $ds = \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$.

Soit t l'aire $CBMP$; le rectangle indéfiniment petit $MPP'Q = ydx$ pourra être pris pour dt ; donc $dt = ydx$.

803. Appliquons ce procédé aux coordonnées polaires. Du pôle A (fig. 45) pour centre, décrivons l'arc MQ par le point $M(r, \theta)$, nous aurons $\frac{MQ}{mq} = \frac{AM}{Am}$, ou $\frac{MQ}{d\theta} = \frac{r}{1}$; donc $MQ = rd\theta$. Menons AT perpendiculaire sur AM, et la tangente TM' qui se confond avec l'arc, suivant l'élément $MM' = ds$; or, les triangles semblables $MM'Q$, TMA donnent (*voy.* p. 365)

$$\frac{MQ}{M'Q} = \frac{AT}{AM}, \quad \text{ou} \quad \frac{rd\theta}{dr} = \frac{AT}{r} ;$$

donc

$$\text{sous-tang } AT = \frac{r^2 d\theta}{dr}.$$

Dans le triangle rectangle TMA, on a

$$\text{tang } TMA = \frac{AT}{AM} = \frac{rd\theta}{dr}.$$

De plus, $MM'^2 = MQ^2 + M'Q^2$ devient $ds^2 = r^2 d\theta^2 + dr^2$. Enfin, l'aire $ABM = \tau$ comprise entre deux rayons vecteurs a pour différentielle AMM', qu'on peut regarder comme égal à AMQ ; or $AMQ = \frac{1}{2} AM \times MQ$; d'où $d\tau = \frac{1}{2} r^2 d\theta$ (p. 368).

804. Dans sa révolution autour de Ax (fig. 40), $CBMP$ engendre un corps dont le volume est v et l'aire u ; or, l'arc MM' décrit la différentielle de u, qui est un tronc de cône, et

$$= \tfrac{1}{2} MM' (\text{cir. } PM + \text{cir. } P'M'), \text{ ou plutôt} = MM' \times \text{cir. } PM ;$$

donc $\mathrm{d}u = 2\pi y \mathrm{d}s$. De même, l'aire $MPP'M'$ engendre la différentielle du volume v qu'on peut regarder comme égal au cylindre décrit par $MPP'Q = PP' \times$ cercle PM; donc $\mathrm{d}v = \pi y^2 \mathrm{d}x$. Cela est conforme au n° 792.

Soit la surface courbe BD (fig. 69) dont l'équ. $z = f(x, y)$ est donnée; lorsqu'on fera croître x de $\mathrm{d}x$, le volume $V = EFMN$ croîtra de $MBFR = \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x$. Si, dans ce résultat, on augmente y de $\mathrm{d}y$, le volume MBR croîtra de $MCSP = \frac{\mathrm{d}^2V}{\mathrm{d}x\mathrm{d}y} \cdot \mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

De même, l'aire $MN = U$ augmente de $MC = \frac{\mathrm{d}^2U}{\mathrm{d}x\mathrm{d}y} \cdot \mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

Cela posé, 1° le plan $Mrsq$ (fig. 70), parallèle au plan xy, forme le parallélipipède $MPSs$ dont le volume est $z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$; donc $\mathrm{d}^2V = z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, formule qui revient à celle du n° 794.

2° Le plan tangent $Mr's'q'$ peut être supposé confondu avec la surface dans l'étendue de MC; et comme (n° 793) la base PS, ou $\mathrm{d}y\mathrm{d}x$, est $= MC \times \cos\alpha$, α désignant l'inclinaison de ce plan sur celui des xy, on a

$$MC = \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\cos\alpha} = \mathrm{d}x\mathrm{d}y \sqrt{(1 + p^2 + q^2)}, \text{ (p. 389).}$$

Donc $$\mathrm{d}^2U = \mathrm{d}x\mathrm{d}y\sqrt{(1 + p^2 + q^2)}.$$

805. Soit $M = 0$ l'équ. d'une surface en x, y, z et les constantes arbitraires α et β. Si α et β reçoivent des valeurs fixes, la surface aura tous ses points déterminés dans l'espace. Mais qu'on trace à volonté une courbe sur le plan xy, $y = \varphi x$, et qu'on établisse entre β et α la même liaison, $\beta = \varphi\alpha$; en chassant β de M, on pourra ensuite attribuer à α une série de valeurs successives. $M = 0$ deviendra l'équ. d'une multitude de surfaces courbes, qui ne différeront entre elles que par la grandeur des constantes α et β. La suite infinie de ces surfaces forme ce qu'on nomme *une Enveloppe*.

Pour considérer la surface qui varie par le changement de α, dans deux états infiniment voisins, il faut différentier M par rapport à α. $M = 0$, $M' = 0$, particularisent, pour une valeur donnée de α, la courbe d'intersection, ou plutôt de contact des deux surfaces voisines : c'est cette courbe qu'on a appelée *Caractéristique*. Qu'on élimine α entre ces deux équ., et l'on aura une équ. en x, y, z, sans α ni β, qui appartiendra à cette courbe, quelle que soit la posi-

tion de la surface mobile : ce sera donc l'équation de l'*Enveloppe*.

De plus, pour une caractéristique, déterminée par une valeur particulière de α, si l'on fait varier α infiniment peu, M et M' devenant M' et M'', on aura une seconde caractéristique infiniment voisine de la 1re. Pour les points communs à l'une et à l'autre, on a les trois équ. $M=0$, $M'=0$, $M''=0$, les dérivées étant ici relatives à α seul. En faisant passer α par toutes les grandeurs possibles, chaque état donnera des points particuliers de l'enveloppe, lesquels sont ceux du contact des caractéristiques considérées dans leurs situations consécutives. La courbe qui les joint est nommée *arête de rebroussement*; elle est touchée par toutes les caractéristiques, précisément de la même manière que l'enveloppe touche toutes les enveloppées selon ces courbes. Les deux équ. de cette arête s'obtiennent en éliminant α entre les trois équ. précédentes.

Enfin, éliminant α entre les équ. $M=0$, $M'=0$, $M''=0$, $M'''=0$, où les dérivées sont toujours relatives à α, on verra de même qu'on obtient celui des points de l'*arête de rebroussement* qui forme lui-même un rebroussement ou une inflexion.

806. Prenons le plan pour surface mobile, les caractéristiques seront des droites, et l'enveloppe jouira de la propriété d'être une *surface développable*, de pouvoir s'étendre sur un plan, sans rupture ni duplicature, en ne la supposant ni flexible, ni extensible. En effet, si l'on fait tourner chaque élément de cette surface autour de la droite de section par l'élément voisin, on pourra visiblement amener tous ces éléments à se trouver appliqués sur un plan.

Les surfaces développables peuvent être regardées comme formées d'éléments plans d'une longueur indéfinie, tels sont le cône et le cylindre. Cherchons une équ. qui appartienne à toutes ces surfaces, sans avoir égard à la nature du mouvement que prend le plan mobile. Le plan tangent coïncidant avec un élément plan, il est clair que x, y et z peuvent varier, sans que pour cela ce plan varie. L'équ. est (A, p. 389)

$$Z=pX+qY+z-px-qy.$$

Différentions par rapport à x, y et z, et exprimons que p, q et $z-px-qy$ ne changent pas. De ces trois conditions, le calcul montre que l'une est comprise dans les deux autres, en sorte qu'on n'a que ces deux équ. $dp=0$, $dq=0$, ou plutôt (en conservant la notation de la p. 395) $r+sy'=0$, $s+ty'=0$. Ici, y' dépend

de la direction selon laquelle le point de contact a changé ; en éliminant y', il vient enfin, pour l'équ. de toutes les surfaces développables, quelle qu'en soit d'ailleurs la génération particulière,

$$rt - s^2 = 0.$$

Voy. l'Analyse de Monge, où cet illustre géomètre a présenté une foule d'applications curieuses de la doctrine infinitésimale aux surfaces courbes.

CHAPITRE III.

INTÉGRATION DES FONCTIONS D'UNE SEULE VARIABLE.

Règles fondamentales.

807. Le calcul intégral a pour but de remonter des fonctions dérivées à leurs primitives ; on y parvient à l'aide d'une suite de principes et de transformations. Pour éviter les modifications qu'il faudrait faire éprouver aux formules, en vertu des divers changements de variable indépendante (nº 734), nous préférerons l'emploi de la notation de Leibnitz. Lorsqu'on veut marquer qu'on doit prendre l'intégrale d'une fonction, on la fait précéder du signe $\int$ qu'on prononce *Somme;* ainsi $y' = 4x^3$, étant la dérivée de $x^4 + c$, on écrira $\mathrm{d}y = 4x^3\mathrm{d}x$, d'où $y = \int 4x^3\mathrm{d}x = x^4 + c$.

808. Examinons la relation qui doit exister entre les fonctions primitives fx et Fx d'une même dérivée y'. Le théorème de Taylor donne

$$f(x+h) = fx + y'h + \tfrac{1}{2}y''h^2 + \ldots,$$
$$F(x+h) = Fx + y'h + \tfrac{1}{2}y''h^2 + \ldots,$$

d'où $$f(x+h) - F(x+h) = fx - Fx.$$

Il faut donc que $fx - Fx$ n'éprouve aucun changement, lorsqu'on y change x en $x + h$; ainsi $fx - Fx$ conserve la même valeur C, quel que soit x, $fx = Fx + C$. Donc, *toutes les fonctions primitives qui ont même dérivée, ne diffèrent entre elles que par la valeur du terme constant. Si l'on ajoute une constante arbitraire à toute intégrale, elle prendra la forme la plus générale dont elle soit susceptible.*

809. En renversant les règles principales du calcul des dérivations, on trouvera autant de règles du calcul intégral. Il sera facile d'en conclure que,

I. *L'intégrale d'un polynôme est la somme des intégrales de ses divers termes ; on conserve à chaque terme son signe et son coefficient* (nº 702).

II. *Pour intégrer* $z^n dz$, *il faut augmenter l'exposant* n *d'une unité, supprimer le facteur* dz, *et diviser par l'exposant ainsi augmenté* (nº 702) ; ou $\int Az^n dz = \frac{Az^{n+1}}{n+1} + C$.

Pareillement $Az^{-n}dz$, ou $Adz : z^n$, a pour intégrale . . . . . . $\frac{Az^{-n+1}}{-n+1} = -\frac{A}{(n-1)z^{n-1}}$. Ainsi, *lorsque la variable est au dénominateur, on prend la fraction en signe contraire ; on y diminue l'exposant de la variable d'une unité, et l'on multiplie le dénominateur par cet exposant ainsi diminué.*

Ces règles s'appliquent aussi aux fonctions qu'on peut ramener à $z^n dz$. Pour $ax^{n-1}dx(b+cx^n)^m$, on remarque que la différentielle de $b+cx^n$ est $ncx^{n-1}dx$; puisque notre 1er facteur n'en diffère que par la constante nc, on le prépare pour l'amener à cette forme, et l'on a

$$\frac{a}{nc} \times ncx^{n-1}dx\ (b+cx^n)^m = \frac{a}{nc} z^m dz,$$

en faisant $b+cx^n = z$. On a donc, pour intégrale,

$$\frac{az^{m+1}}{nc(m+1)} + C = \frac{a}{nc(m+1)}(b+cx^n)^{m+1} + C.$$

La transformation qui a introduit z n'était même pas nécessaire, et il conviendra à l'avenir de l'éviter, parce qu'elle fait languir les calculs.

De même, $\int 6\sqrt{(4x^2+3)}\, xdx = \frac{1}{2}(4x^2+3)^{\frac{3}{2}} + C.$

III. La règle précédente est en défaut lorsque $m = -1$, puisqu'on trouve $\int z^{-1}dz = \infty$; mais cela vient de ce que l'intégrale appartient à une autre espèce de fonction. On sait (nº 719) que

$\int \frac{dz}{z} = \mathrm{l}\, z + C$. De même, $\int \frac{dx}{a+z} = \mathrm{l}\,(a+z) + C.$

Donc, *toute fraction dont le numérateur est la différentielle du dénominateur, a pour intégrale le logarithme de ce dénominateur.* Dans ce cas, nous mettrons à l'avenir, pour la commodité des calculs, la constante arbitraire sous la forme $1C$.

Pour intégrer $\frac{5x^3dx}{3x^4+7}$, je remarque qu'au facteur constant près 5, cette fraction rentre dans la règle précédente : je la prépare donc ainsi

$$\int \frac{5}{12} \cdot \frac{12x^3dx}{3x^4+7} = \frac{5}{12} 1 \left[C(3x^4+7)\right].$$

IV. *Toute fraction dont le dénominateur est un radical carré, et dont le numérateur est la différentielle de la fonction que ce radical affecte, a pour intégrale le double de ce radical* (n° 710),

ou $$\int \frac{dz}{\sqrt{z}} = 2\sqrt{z} + C.$$

V. Une des règles les plus importantes à considérer, est celle de l'intégration *par parties ;* voici en quoi elle consiste. On a vu (n° 708) que $d(ut) = udt + tdu$; donc, en intégrant,

$$ut = \int udt + \int tdu$$

et $$\int udt = ut - \int tdu;$$

ainsi, *après avoir décomposé une différentielle proposée en deux facteurs, dont l'un soit directement intégrable, on intégrera en regardant l'autre facteur comme constant; mais on retranchera ensuite l'intégrale de la quantité qu'on obtient, en différentiant ce résultat par rapport à la seule fonction qu'on a prise pour constante.*

Ainsi, pour intégrer $1x \,.\, dx$, je regarde dx comme seule variable, et j'ai $x \,.\, 1x$; je différentie ce résultat par rapport à $1x$ seul, et j'obtiens

$$\int 1x \,.\, dx = x \,.\, 1x - \int x \,.\, \frac{dx}{x} = x\,1\,x - x + C.$$

Cette règle offre l'avantage de faire dépendre l'intégrale cherchée d'une autre intégrale; et l'adresse de ce genre de calcul consiste à faire la décomposition en deux facteurs, de sorte que le dernier soit moins compliqué que la proposée.

VI. La règle du nº 723 donne, le rayon étant 1,

$$\int \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)}} = \text{arc}\,(\sin = z) + C,$$

$$\int \frac{-dz}{\sqrt{(1-z^2)}} = \text{arc}\,(\cos = z) + C,$$

$$\int \frac{dz}{1+z^2} = \text{arc}\,(\text{tang} = z) + C.$$

On pourrait aussi supposer le rayon $= r$, et l'on aurait ces mêmes seconds membres pour valeurs respectives des intégrales

$$\int \frac{rdz}{\sqrt{(r^2-z^2)}}, \quad \int \frac{-rdz}{\sqrt{(r^2-z^2)}}, \quad \int \frac{r^2dz}{r^2+z^2}.$$

Pour obtenir $\int \frac{mdz}{a+bz^2}$, on divisera haut et bas par a,

$$\frac{m}{a} \cdot \frac{dz}{1+\frac{bz^2}{a}} = \frac{m}{a}\sqrt{\frac{a}{b}} \cdot \frac{dt}{1+t^2},$$

en faisant $\frac{bz^2}{a} = t^2$. Donc $\frac{m}{\sqrt{(ab)}} \cdot \text{arc}\,(\text{tang} = t) + C$ est l'intégrale cherchée, le rayon étant 1 ; d'où

$$\int \frac{mdz}{a+bz^2} = \frac{m}{\sqrt{(ab)}} \cdot \text{arc}\left(\text{tang} = z\sqrt{\frac{b}{a}}\right) + C.$$

On trouve de même

$$\int \frac{mdz}{\sqrt{(a^2-bz^2)}} = \frac{m}{\sqrt{b}} \cdot \text{arc}\left(\sin = \frac{z}{a}\sqrt{b}\right) + C.$$

Des Fractions rationnelles.

810. Nous avons donné (p. 203) des procédés généraux pour décomposer toute fraction rationnelle $\frac{N}{D}$ en d'autres, dont la forme soit l'une des suivantes :

$$\frac{A}{x-a}, \quad \frac{A}{(x-a)^n}, \quad \frac{Ax+B}{x^2+px+q}, \quad \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n}.$$

$A, B, p, q, n\ldots$, étant des constantes, et les facteurs de $x^2 + px + q$ étant imaginaires. Il s'agit donc de donner des règles pour remonter de ces fractions aux expressions dont elles sont les dérivées. Remarquons que chassant le terme px des deux dernières, par la transformation (page 43), $x = z - \frac{1}{2}p$, puis, faisant $\beta^2 = q - \frac{1}{4}p^2$, quantité positive par supposition, on a simplement

$$\frac{Az + B'}{z^2 + \beta^2}, \quad \text{et} \quad \frac{Az + B'}{(z^2 + \beta^2)^n}.$$

1[er] CAS. L'intégrale de $\dfrac{A\,\mathrm{d}x}{x - a}$ est $A\,\mathrm{l}\,(x - a) + \mathrm{l}\,c$, ou $A\,\mathrm{l}\,c\,(x - a)$. Par ex., on a vu (p. 204) que

$$\frac{\mathrm{d}x}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a}\left(\frac{\mathrm{d}x}{a + x} + \frac{\mathrm{d}x}{a - x}\right);$$

donc $\dfrac{1}{2a}[\mathrm{l}\,(a + x) - \mathrm{l}\,(a - x) + \mathrm{l}\,c]$ est l'intégrale, d'où

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a}\,\mathrm{l}\,\frac{c(a + x)}{a - x}.$$

De même,

$$\int \frac{(2 - 4x)\,\mathrm{d}x}{x^2 - x - 2} = \int \frac{2\mathrm{d}x}{2 - x} - \int \frac{2\mathrm{d}x}{x + 1}$$

$$= -2\,\mathrm{l}\,(x - 2) - 2\,\mathrm{l}\,(x + 1) + \mathrm{l}\,c = \mathrm{l}\,\frac{c}{(x^2 - x - 2)^2}.$$

2[e] CAS. La fraction $\dfrac{A\,\mathrm{d}x}{(x - a)^n}$ a pour intégrale (règle (II) $\dfrac{-A}{(n - 1)\,(x - a)^{n-1}}$. Par exemple (p. 205),

$$\frac{x^3 + x^2 + 2}{x^5 - 2x^3 + x}\,\mathrm{d}x = \frac{2\mathrm{d}x}{x} + \frac{\mathrm{d}x}{(x - 1)^2} - \frac{\frac{3}{4}\,\mathrm{d}x}{x - 1} - \frac{\frac{1}{2}\,\mathrm{d}x}{(x + 1)^2} - \frac{\frac{5}{4}\,\mathrm{d}x}{x + 1}$$

donne pour intégrale

$$2\,\mathrm{l}\,x - \frac{1}{x - 1} - \tfrac{3}{4}\,\mathrm{l}\,(x - 1) + \frac{1}{2\,(x + 1)} - \tfrac{5}{4}\,\mathrm{l}\,(x + 1) + c.$$

3[e] CAS. Pour la fraction $\dfrac{Az + B}{z^2 + \beta^2}\,\mathrm{d}z$, on intègre séparément

$\frac{Azdz}{z^2+\beta^2}$ et $\frac{Bdz}{z^2+\beta^2}$; la première par la règle III, la deuxième par celle VI (n° 809). On trouve

$$\int \frac{(Az+B)\,dz}{z^2+\beta^2} = \tfrac{1}{2} A\,\mathrm{l}\,(z^2+\beta^2) + \frac{B}{\beta}\,\mathrm{arc}\left(\mathrm{tang} = \frac{z}{\beta}\right).$$

Ainsi (p. 205) on décompose

$$\int \frac{x\mathrm{d}x}{x^3-1} \text{ en } \int \frac{\frac{1}{3}\;.\;\mathrm{d}x}{x-1} - \int \frac{\frac{1}{3}(x-1)\,\mathrm{d}x}{x^2+x+1};$$

le 1er terme $= \frac{1}{3}\,\mathrm{l}\,(x-1)$. Pour le 2e on fait $x = z - \frac{1}{2}$, ce qui donne $-\int \frac{\frac{1}{3}\,z\mathrm{d}z}{z^2+\frac{3}{4}} + \int \frac{\frac{1}{2}\,\mathrm{d}z}{z^2+\frac{3}{4}}$; l'une de ces intégrales est

$$= -\tfrac{1}{6}\,\mathrm{l}\,(z^2+\tfrac{3}{4}) = -\tfrac{1}{3}\,\mathrm{l}\sqrt{(x^2+x+1)};$$

l'autre donne $\frac{1}{3}\sqrt{3}$ arc $\left(\mathrm{tang} = \frac{2z}{\sqrt{3}}\right)$. Donc

$$\int \frac{x\mathrm{d}x}{x^3-1} = \tfrac{1}{3}\left[\mathrm{l}\,c\,(x-1) - \mathrm{l}\sqrt{(x^2+x+1)} + \sqrt{3}\,.\,\mathrm{arc}\left(\mathrm{tang} = \frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)\right].$$

Prenons pour second exemple (p. 205)

$$\frac{(x^2-x+1)\,\mathrm{d}x}{(x+1)\,x^2+1)} = \tfrac{3}{2}\,.\,\frac{\mathrm{d}x}{x+1} - \tfrac{1}{2}\,.\,\frac{(x+1)\,\mathrm{d}x}{x^2+1}:$$

l'intégrale est $\mathrm{l}\,\frac{c\sqrt{(x+1)^3}}{\sqrt[4]{(x^2+1)}} - \frac{1}{2}$ arc (tang $= x$).

4e cas. Il s'agit d'intégrer une série de fractions de la forme $\frac{(Az+B)\,\mathrm{d}z}{(z^2+\beta^2)^n}$, n étant successivement $= 1, 2, 3\ldots$. Pour cela, chacune se partage en deux, $\frac{Az\mathrm{d}z}{(z^2+\beta^2)^n}$ et $\frac{B\mathrm{d}z}{(z^2+\beta^2)^n}$. La 1re s'intègre sur-le-champ (règle II) *, et donne $\frac{-A}{2\,(n-1)\,(z^2+\beta^2)^{n-1}}$; si cependant $n = 1$, on a $\frac{1}{2} A\,\mathrm{l}\,(z^2+\beta^2)$.

* En faisant $z^2 + \beta^2 = t^2$, la fraction devient monome, on a

$$\int \frac{A\mathrm{d}t}{t^{2n-1}} = \frac{A}{2(n-1)\,t^{2(n-1)}}.$$

811. Quant à la 2e, on en facilite l'intégration en la faisant dépendre d'une autre plus simple. K et L étant des coefficients indéterminés, on suppose *

$$\int \frac{dz}{(z^2+\beta^2)^n} = \frac{Kz}{(z^2+\beta^2)^{n-1}} + \int \frac{L\,dz}{(z^2+\beta^2)^{n-1}}.$$

Pour trouver les valeurs de K et L, on différentiera cette équ.; puis on réduira au même dénominateur $(z^2+\beta^2)^n$, et l'on aura

$$1 = K(z^2+\beta^2) - 2K(n-1)z^2 + L(z^2+\beta^2);$$

d'où, comparant terme à terme, on tire

$$K + L = 2K(n-1), \quad (K+L)\beta^2 = 1.$$

Tirant les valeurs de K et L, et les substituant, on obtient enfin

$$\int \frac{dz}{(z^2+\beta^2)^n} = \frac{z}{2(n-1)\beta^2(z^2+\beta^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2(n-1)\beta^2}\int \frac{dz}{(z^2+\beta^2)^{n-1}}.$$

L'usage de cette équ. est facile à concevoir. On a une série de fractions de la forme $\int \frac{dz}{(z^2+\beta^2)^i}$; on intégrera d'abord celle où i a la plus grande valeur n, et notre formule la remplacera par deux termes, l'un intégré, et l'autre de la forme $\int \frac{dz}{(z^2+\beta^2)^{n-1}}$, qui s'ajoutera avec la fraction suivante. On continuera ainsi jusqu'à la fraction $\frac{dz}{z^2+\beta^2}$, dont l'intégrale est connue (règle VI).

Soit, par exemple,

$$\frac{(x^4+2x^3+3x^2+3)dx}{(x^2+1)^3} = \frac{(-2x+1)dx}{(x^2+1)^3} + \frac{(2x+1)dx}{(x^2+1)^2} + \frac{dx}{x^2+1};$$

le 1er terme de chacune donne, par la règle II,

$$\int \frac{-2x\,dx}{(x^2+1)^3} = \frac{1}{2(x^2+1)^2}, \quad \int \frac{2x\,dx}{(x^2+1)^2} = \frac{-1}{x^2+1}.$$

* La forme de cette équ. est légitimée par la suite du calcul qui sert à trouver K et L. Cette transformation est indiquée par l'habitude de l'analyse, qui fait prévoir que le résultat ne peut contenir que des termes de deux espèces, les uns multipliés par z^2, les autres constants.

Quant aux seconds termes, on a, par notre formule,

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)^3} = \frac{x}{4(x^2+1)^2} + \tfrac{3}{4} \int \frac{dx}{(x^2+1)^2}.$$

Or, ce dernier terme, joint à celui de notre 2e fraction, donne $\tfrac{7}{4} \cdot \int \frac{dx}{(x^2+1)^2}$; mais on a de même

$$\tfrac{7}{4} \int \frac{dx}{(x^2+1)^2} = \frac{7x}{8(x^2+1)} + \tfrac{7}{8} \int \frac{dx}{x^2+1};$$

enfin, ajoutant ce terme à intégrer avec la troisième fraction, on trouve

$$\frac{15}{8} \int \frac{dx}{x^2+1} = \frac{15}{8} \operatorname{arc}(\operatorname{tang} = x).$$

Il ne s'agit plus que de réunir ces diverses parties, et l'on a, pour l'intégrale de la fonction proposée,

$$\frac{2+x}{4(x^2+1)^2} + \frac{7x-8}{8(x^2+1)} + \frac{15}{8} \operatorname{arc}(\operatorname{tang} = x) + C.$$

En opérant de même, on trouvera l'intégrale de . . . . $\frac{dx}{(1+x)x^2\,(x^2+2)\,(x^2+1)^2}$. Cette fraction étant décomposée (p. 206), les seuls termes dont l'intégration peut présenter quelque difficulté sont

$$\int \tfrac{1}{2} \frac{x-1}{(x^2+1)^2} dx + \int \tfrac{1}{4} \frac{x-1}{x^2+1} x$$

$$= c - \frac{x+1}{4(x^2+1)} + \tfrac{1}{8}\, \mathrm{l}\,(x^2+1) - \tfrac{1}{2} \operatorname{arc}(\operatorname{tang} = x).$$

En voici encore deux exemples (*voy.* p. 207 et 210) :

$$\int \frac{b^3 dx}{x^6 - a^6} = \frac{b^3}{3a^5} \Big[\mathrm{l}\, \frac{(x-a)\sqrt{(x^2-ax+a^2)}}{(x+a)\sqrt{(x^2+ax+a^2)}}$$

$$-\sqrt{3} \left\{ \operatorname{arc}\left(\operatorname{tang} = \frac{2x-a}{a\sqrt{3}}\right) + \operatorname{arc}\left(\operatorname{tang} = \frac{2x+a}{a\sqrt{3}}\right) \right\} + C \Big].$$

$$\int \frac{x^3-6x^2+4x-1}{x^4-3x^3-3x^2+7x+6} dx = \mathrm{l}\left(\frac{(x-2)(x+1)}{x-3}\right) + \frac{1}{x+1} + C.$$

Fonctions irrationnelles.

812. Il suit de ce qu'on vient de voir, qu'on sait intégrer toutes les fonctions algébriques rationnelles, et celles qu'on peut rendre telles par des transformations.

Voyons d'abord les radicaux monomes.

Soit
$$\frac{\sqrt[3]{x} + x\sqrt{x} + x^2}{x + \sqrt{x}}\,dx\,;$$

il est visible qu'en faisant $x = z^6$, les irrationnalités disparaîtront, puisque 6 est divisible par les dénominateurs 3 et 2 des exposants fractionnaires proposés. Par là on aura à intégrer

$$6dz\,.\,\frac{z^{14} + z^{11} + z^4}{z^3 + 1} = 6z^{11}dz + 6zdz - \frac{6zdz}{z^3+1},$$

ce qui n'offre pas de difficulté.

Pour $\sqrt{x}\,.\,dx : (x - 1)$, on fera $x = z^2$, et l'on aura

$$\int\frac{2z^2dz}{z^2-1} = 2\int dz + \int\frac{2dz}{z^2-1}$$

$$= 2z + 1(z-1) - 1(z+1) = 2\sqrt{x} + 1\left(c\,\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}\right).$$

813. Prenons maintenant une fonction quelconque affectée du radical $\sqrt{(A + Bx + Cx^2)}$. Après avoir dégagé x^2 de son coefficient C, en multipliant et divisant par $\sqrt{C}$, il se présente deux cas, suivant que x^2 est positif ou négatif *.

* X désignant une fonction rationnelle de x, on a à intégrer

$$\frac{Xdx}{\sqrt{(a + bx \pm x^2)}},\quad \text{ou}\quad Xdx\sqrt{(a + bx \pm x^2)}\,;$$

ces deux expressions se traitent comme il est dit ci-après. On pourrait même ramener la 2e à la 1re, en multipliant et divisant par le radical :

d'où
$$\frac{X(a + bx \pm x^2)}{\sqrt{(a + bx \pm x^2)}\,.\,dx}.$$

1er CAS. Si l'on a $\sqrt{(a+bx+x^2)}$, on fera *

$$\sqrt{(a+bx+x^2)} = z \pm x; \quad \text{d'où} \quad a+bx = z^2 \pm 2zx,$$

$$x = \frac{z^2-a}{b \mp 2z}, \quad dx = \frac{bz \mp (z^2+a)}{(b \mp 2z)^2} \cdot 2dz,$$

$$\sqrt{(a+bx+x^2)} = z \pm x = \frac{bz \mp (z^2+a)}{b \mp 2z};$$

ainsi tout est devenu rationnel dans la fonction proposée.

En prenant, par ex., les signes inférieurs, on trouve

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(a+bx+x^2)}} = \int \frac{2dz}{2z+b} = \text{l}(2z+b) + \text{const.}$$

$$= \text{l}\left[c\left(x+\tfrac{1}{2}b+\sqrt{a+bx+x^2}\right)\right].$$

Donc aussi

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2 \pm a^2)}} = \text{l}\left[c\left(x+\sqrt{x^2 \pm a^2}\right)\right].$$

Pour intégrer $dy = dx\sqrt{(a^2+x^2)}$, on fait

$$\sqrt{(a^2+x^2)} = z - x, \quad \text{d'où} \quad dy = zdx - xdx;$$

ainsi, $y = -\frac{1}{2}x^2 + \int zdx$; mettant pour dx sa valeur (p. 414), puis intégrant, on a $\int zdx = \frac{1}{4}z^2 + \frac{1}{2}a^2 \,\text{l}\, z$; enfin

$$y = c + \tfrac{1}{2}x\sqrt{(a^2+x^2)} + \tfrac{1}{2}a^2\,\text{l}\left[x+\sqrt{(a^2+x^2)}\right].$$

Pour $dy = \dfrac{-dx}{\sqrt{(1-x^2)}}$, ou $dy\sqrt{-1} = \dfrac{dx}{\sqrt{(x^2-1)}}$, on a

$$y\sqrt{-1} = \text{l}\left[x+\sqrt{(x^2-1)}\right] + c;$$

mais $x = \cos y$, $\sqrt{(x^2-1)} = \sqrt{-1} \,.\, \sin y$; de plus $c = 0$, puisque $x = 1$ doit rendre y nul : on retrouve donc la formule (n° 631)

$$\pm y\sqrt{-1} = \text{l}(\cos y \pm \sqrt{-1} \,.\, \sin y).$$

* On pourrait encore faire ici le radical $= x \pm z$: ce qui conduirait aux mêmes valeurs de x et dx; le radical deviendrait $= \dfrac{\pm bz - z^2 - a}{b \mp 2z}$, et tout serait rendu rationnel.

814. 2e cas. Si l'on a $\sqrt{(a+bx-x^2)}$, la méthode précédente ne peut être appliquée sans introduire des imaginaires ; mais remarquons que le trinôme $a+bx-x^2$ doit avoir ses facteurs réels, puisque sans cela il serait négatif, quel que fût x (p. 72). Le radical étant alors imaginaire, il faudrait, comme dans l'exemple précédent, mettre $\sqrt{-1}$ en facteur, puisqu'on ne doit pas espérer de trouver l'intégrale réelle. On retomberait alors sur le cas qu'on vient de traiter. Soient donc α et β les deux racines réelles de $x^2-bx-a=0$; on fera

$$\sqrt{(a+bx-x^2)}=\sqrt{(x-\alpha)(\beta-x)}=(x-\alpha)z.$$

Carrant et supprimant le facteur commun $x-\alpha$, on a

$$\beta-x=(x-\alpha)z^2;$$

x et dx sont donc rationnels.

C'est ainsi qu'on trouve

$$\int\frac{dx}{\sqrt{(a+bx-x^2)}}=c-2\,.\,\text{arc}\left(\text{tang}=\sqrt{\frac{\beta-x}{x-\alpha}}\right).$$

De même pour $\int\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)}}$, qu'on sait d'ailleurs être l'arc dont le sinus est x, on fera $\sqrt{(1-x^2)}=(1-x)z$; d'où

$$x=\frac{z^2-1}{z^2+1},\quad \sqrt{}=\frac{2z}{z^2+1},\quad dx=\frac{4zdz}{(z^2+1)^2};$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)}}=\int\frac{2dz}{z^2+1}=c+2\,.\,\text{arc}\,(\text{tang}=z),$$

ou $\quad \text{arc}\,(\sin=x)=-\tfrac{1}{2}\pi+2\,.\,\text{arc}\left[\text{tang}=\sqrt{\left(\frac{1+x}{1-x}\right)}\right].$

Pour $dy=dx\sqrt{(a^2-x^2)}$, on fait $\sqrt{}=(a-x)z$; d'où

$$dy=\frac{8a^2z^2dz}{(1+z^2)^3}=\frac{-8a^2dz}{(1+z^2)^3}+\frac{8a^2dz}{(1+z^2)^2},$$

$$y=\frac{-2a^2z}{(1+z^2)^2}+\frac{a^2z}{1+z^2}+a^2\,.\,\text{arc}\,(\text{tang}=z)+C,$$

$$y=\tfrac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2}+a^2\,.\,\text{arc}\left(\text{tang}=\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}\right)+C.$$

On pourrait appliquer ce procédé au 1[er] cas, lorsque les racines de $x^2 + bx + a = 0$ sont réelles.

815. L'adresse qu'on acquiert par l'habitude indique les transformations les plus favorables. Ainsi, on pourra faire disparaître le second terme sous le radical (n° 506), ce qui le mettra sous la forme $\sqrt{(z^2 \pm a^2)}$, ou $\sqrt{(a^2 \pm z^2)}$, en sorte qu'on aura pour termes à intégrer (*voy*. n° 821)

$$\frac{z^m dz}{\sqrt{(z^2 \pm a^2)}} \quad \text{ou} \quad \frac{z^m dz}{\sqrt{(a^2 \pm z^2)}}.$$

Dans ce dernier cas, l'irrationnalité disparaît en faisant

$$\sqrt{(a^2 \pm z^2)} = a - uz,$$

parce que le carré de cette équ. est divisible par z; d'où

$$z = \frac{2au}{u^2 \mp 1}, \quad dz = -2adu \cdot \frac{u^2 \pm 1}{(u^2 \mp 1)^2}.$$

C'est ainsi que $\dfrac{dx}{\sqrt{(2bx - x^2)}}$ devient $\dfrac{-dz}{\sqrt{(b^2 - z^2)}}$, en faisant $x = b - z$; l'intégrale est donc (règle VI)

$$c + \text{arc}\left(\cos = \frac{z}{b}\right) = c + \text{arc}\left(\cos = \frac{b-x}{b}\right).$$

On aurait pu aussi faire la transformation précédente, qui aurait donné

$$-\int \frac{2du}{u^2+1} = c' - 2 \,.\, \text{arc}\,(\text{tang} = u).$$

De même, en faisant $x = z - a$, on a

$$dy = \frac{adx}{\sqrt{(2ax + x^2)}} = \frac{adz}{\sqrt{(z^2 - a^2)}};$$

l'équ. de la *Chaînette* (voy. ma *Méc.*, n° 91) est donc (p. 415)

$$y = a\,\mathrm{l}\,\left\{ c[x + a + \sqrt{(2ax + x^2)}] \right\}$$

Différentielles binômes.

816. Proposons-nous d'intégrer $Kx^m dx(a + bx^n)^p$, m, n, p étant

quelconques, entiers ou fractionnaires, positifs ou négatifs *; on supposera $z = a + bx^n$; d'où $x = \left(\frac{z-a}{b}\right)^{\frac{1}{n}}$: élevant les deux membres à la puissance $m+1$, et différentiant, il viendra

$$x^m dx = \frac{(z-a)^{\frac{m+1}{n}-1}}{n \cdot b^{\frac{m+1}{n}}} dz,$$

$$Kx^m dx\,(a+bx^n)^p = \frac{K}{n \cdot b^{\frac{m+1}{n}}} \cdot (z-a)^{\frac{m+1}{n}-1} \cdot z^p dz.$$

Quand l'exposant de $z-a$ est entier, on sait intégrer la fonction. Si $\frac{m+1}{n} = 1$, on doit intégrer $z^p dz$; si $\frac{m+1}{n} - 1$ est positif et $= h$, on a une suite de monômes, en développant $(z-a)^h z^p dz$; enfin, si $\frac{m+1}{n} - 1$ est négatif, on a une fraction rationnelle. Donc *toutes les fois que l'exposant de* x *hors du binôme, augmenté de* 1, *est divisible par celui de* x *dans le binôme, on sait intégrer la fonction.*

817. Ce cas n'est pas le seul où l'on sache intégrer ; en divisant le binôme proposé par x^n, et multipliant hors du binôme par x^{np}, on a

$$Kx^{m+np}\,(b + ax^{-n})^p dx.$$

Or, en reproduisant ici le théorème précédent, il est clair que cette expression sera intégrable pourvu qu'on ait

$$\frac{m+np+1}{-n}, \quad \text{ou plutôt} \quad \frac{m+1}{n} + p = \text{entier}.$$

Ainsi, lorsque la condition indiquée précédemment ne sera pas remplie, on ajoutera p au résultat fractionnaire obtenu $\frac{m+1}{n}$,

* On pourrait rendre aisément m et n entiers par le procédé (nº 812). Ainsi $x^{\frac{1}{3}} dx\left(a + bx^{\frac{1}{2}}\right)^p$, en faisant $x = z^6$, devient $6z^7 dz\,(a + bz^3)^p$. Mais cette transformation n'est nullement nécessaire pour ce qui va être dit.

et, *si la somme est entière, la fonction sera intégrale par cette voie.*

818. Nous ferons remarquer que si p est fractionnaire (et ce cas est le plus important, puisque sans cela on n'aurait à intégrer qu'une suite de monômes), en supposant que q soit le dénominateur de p, il sera plus facile de faire le calcul, en faisant $a+bx^n=z^q$.

On demande, par ex., d'intégrer $x^{-2}dx\,(a+x^3)^{-\frac{5}{3}}$; $\frac{m+1}{n}$ est ici $-\frac{1}{3}$; mais si l'on ajoute $-\frac{5}{3}$, la somme est -2; pour intégrer il faut donc multiplier et diviser par $(x^3)^{-\frac{5}{3}}$ ou x^{-5}, et l'on a

$$x^{-7}dx\,(1+ax^{-3})^{-\frac{5}{3}}.$$

On fera $1+ax^{-3}=z^3$; d'où $x=\left(\frac{z^3-1}{a}\right)^{-\frac{1}{3}}$; puis élevant à la puissance -6, et différentiant, on trouve $x^{-7}dx$; d'où $-\frac{1}{a^2}(1-z^{-3})dz$, dont l'intégrale est

$$c-\frac{1}{a^2}(z+\tfrac{1}{2}z^{-2})=c-\frac{3x^3+2a}{2a^2x\sqrt[3]{(x^3+a)^2}}.$$

De même, $x^3dx\,(a^2+x^2)^{\frac{1}{3}}$ deviendra $\frac{3}{2}dz\,(z^6-a^2z^3)$, en faisant $a^2+x^2=z^3$; on en conclura pour l'intégrale de la proposée, $\frac{3}{56}\sqrt[3]{(a^2+x^2)^4}\,(4x^2-3a^2)+c$. On a aussi

$$\int\frac{adx}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}=\int ax^{-3}dx\,(1+x^{-2})^{-\frac{3}{2}}=\frac{ax}{\sqrt{(1+x^2)}}+C.$$

819. Lorsque *les conditions d'intégrabilité* ne sont pas remplies, on cherche à faire dépendre l'intégrale demandée d'une autre qui soit plus facile à obtenir ; c'est ce qu'on fait à l'aide de l'intégration par parties (*voy.* p. 408). En faisant toujours $z=a+bx^n$, et supposant d'abord z constant, nous aurons

$$\int x^m dx\,.\,z^p=\frac{x^{m+1}z^p}{m+1}-\frac{p}{m+1}\,.\int z^{p-1}x^{m+1}dz;$$

d'où $$\int x^m dx\,.\,z^p=\frac{x^{m+1}z^p}{m+1}-\frac{nbp}{m+1}\int x^{m+n}dx\,.\,z^{p-1},\quad .\ .\ (1)$$

à cause de $\quad z=a+bx^n \quad$ et $\quad dz=nbx^{n-1}dx.$

Mais $$z^p = z^{p-1} \cdot z = z^{p-1}(a + bx^n);$$

donc $$\int x^m dx \cdot z^p = a\int x^m dx \cdot z^{p-1} + b\int z^{p-1}x^{m+n}dx \quad . . . (2)$$

Égalant les valeurs (1) et (2), on trouve

$$b(m+1+np)\int z^{p-1} \cdot x^{m-n} dx = x^{m+1}z^p - a(m+1)\int z^{p-1} \cdot x^m dx \ldots (3)$$

Changeons $p - 1$ en p, et $m + n$ en m, nous aurons

$$\int x^m dx \cdot z^p = \frac{x^{m-n+1}z^{p+1} - a(m - n + 1)\int x^{m-n}z^p dx}{b(m + 1 + np)} \quad . . . (A)$$

En mettant pour le dernier terme de l'équation (2) sa valeur que donne (3), on obtient

$$\int x^m dx \cdot z^p = \frac{z^p x^{m+1} + anp\int x^m dx \cdot z^{p-1}}{m + 1 + np}; \quad . . . (B)$$

équation où l'on a $z = a + bx^n$.

820. Voici l'usage de ces diverses formules :

1° L'équ. (A) fait dépendre l'intégrale $\int x^m dx \cdot z^p$ de $\int x^{m-n}z^p dx$: *elle sert à diminuer l'exposant de* x *hors du binôme* de n unités par une 1re opération ; puis celui-ci de n, par une 2e, etc. ; en sorte que l'intégrale proposée dépendra de $\int x^{m-in}z^p dx$, i étant un nombre entier positif.

2° La formule (B) sert au contraire *à diminuer l'exposant* p *du binôme* z, de 1, 2, 3.... i unités.

3° En résolvant les équ. (A) et (B), par rapport au terme à intégrer dans le 2e membre, on obtient, en changeant $m - n$ en m dans (A), et $p - 1$ en p dans (B),

$$\int x^m dx \cdot z^p = \frac{x^{m+1}z^{p+1} - b(m + np + n + 1)\int x^{m+n} \cdot z^p dx}{a(m + 1)}, \ldots (C)$$

$$\int x^m dx \cdot z^p = \frac{-x^{m+1}z^{p+1} + (m + np + n + 1)\int x^m dx \cdot z^{p+1}}{an(p + 1)} \ldots (D)$$

Ces formules servent au contraire à augmenter les exposants de x hors du binôme z, et celui du binôme, ce qui est utile lorsque l'un ou l'autre est négatif.

4° On pourra donc déterminer d'avance la loi des exposants de x dans le résultat d'une intégration proposée. Ainsi, il sera facile de

prévoir cette forme, par ex.,

$$\int \frac{x^5 dx}{\sqrt{(1-x^2)}} = (Ax^4 + Bx^2 + C)\sqrt{(1-x^2)}.$$

On évitera donc, si l'on veut, l'usage assez pénible de nos formules, en égalant les différentielles de ces quantités, comparant ensuite terme à terme, comme dans la méthode des coefficients indéterminés (nº 811), ce qui fera connaître A, B, C.

821. Nous donnerons ici un procédé d'intégration qui est remarquable par sa simplicité et par les nombreuses circonstances où il peut être appliqué.

Différentions la fonction $x^{n-1}\sqrt{(1-x^2)}$; nous aurons

$$d[x^{n-1}\sqrt{(1-x^2)}] = (n-1)\,x^{n-2}\sqrt{(1-x^2)}\,dx - \frac{x^n dx}{\sqrt{(1-x^2)}};$$

multiplions et divisons le 1[er] terme de cette différentielle par $\sqrt{(1-x^2)}$, il viendra

$$d[x^{n-1}\sqrt{(1-x^2)}] = (n-1)\frac{x^{n-2}dx}{\sqrt{(1-x^2)}} - \frac{nx^n dx}{\sqrt{(1-x^2)}};$$

enfin, intégrant et transposant, on a

$$\int \frac{x^n dx}{\sqrt{(1-x^2)}} = -\frac{x^{n-1}\sqrt{(1-x^2)}}{n} + \frac{n-1}{n}\int \frac{x^{n-2}dx}{\sqrt{(1-x^2)}} \dots (E)$$

En appliquant le même genre de calcul à $x^{n-1}\sqrt{(x^2 \pm 1)}$, on trouve

$$\int \frac{x^n dx}{\sqrt{(x^2 \pm 1)}} = \frac{x^{n-1}\sqrt{(x^2 \pm 1)}}{n} \mp \frac{n-1}{n}\int \frac{x^{n-2}dx}{\sqrt{(x^2 \pm 1)}} \dots (F)$$

Ces formules servent à intégrer toute fonction affectée du radical $\sqrt{(A + Bx + Cx^2)}$, puisqu'on peut la ramener à la forme $\frac{z^n dz}{\sqrt{(a^2 \pm z^2)}}$ ou $\frac{z^n dz}{\sqrt{(z^2 \pm a^2)}}$ (nº 815). Il est facile, en divisant haut et bas par a, de changer ensuite le radical en $\sqrt{(1 \pm x^2)}$ ou $\sqrt{(x^2 \pm 1)}$. Or, les expressions E et F serviront à faire dépendre, en dernière analyse, l'intégrale cherchée de

$$\int \frac{x dx}{\sqrt{(x^2 \pm 1)}}, \quad \text{ou} \int \frac{x dx}{\sqrt{(1-x^2)}} \dots \text{ si } n \text{ est impair,}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2 \pm 1)}}, \quad \text{ou} \int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)}} \dots \text{ si } n \text{ est pair.}$$

Les deux 1[res] rentrent dans la règle IV (p. 408); la 3[e] a été donnée (n° 813) ; la 4[e] est l'arc (sin $= x$).

Par exemple, on a

$$\int \frac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{(1-x^2)}} = -\sqrt{(1-x^2)} + c,$$

$$\int \frac{x^2\mathrm{d}x}{\sqrt{(1-x^2)}} = -\frac{x}{2}\cdot\sqrt{1-x^2} + \tfrac{1}{2}\,\mathrm{arc}\,(\sin = x) + c,$$

$$\int \frac{x^3\mathrm{d}x}{\sqrt{(1-x^2)}} = -\frac{x^2+2}{3}\cdot\sqrt{1-x^2} + c,$$

$$\int \frac{x^4\mathrm{d}x}{\sqrt{(1-x^2)}} = -\frac{2x^2+3}{8}\cdot x\sqrt{1-x^2} + \frac{3}{8}\,\mathrm{arc}\,(\sin = x) + c.$$

822. Si l'exposant n était négatif, on ne pourrait plus appliquer les formules E et F; mais en faisant $x = z^{-1}$, on retomberait sur celles-ci : en effet on a

$$\frac{\mathrm{d}x}{x^n\sqrt{(1-x^2)}} = -\frac{z^{n-1}\mathrm{d}z}{\sqrt{(z^2-1)}},$$

$$\frac{\mathrm{d}z}{x^n\sqrt{(x^2\pm 1)}} = -\frac{z^{n-1}\mathrm{d}z}{\sqrt{(1\pm z^2)}}.$$

On pourrait aussi traiter le cas actuel directement par un calcul semblable au précédent (n° 821); car, en différentiant . . . . . . $x^{-n+1}\sqrt{(1-x^2)}$, etc., on trouve

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^n\sqrt{(1-x^2)}} = \frac{-\sqrt{(1-x^2)}}{(n-1)\,x^{n-1}} + \frac{n-2}{n-1}\int \frac{\mathrm{d}x}{x^{n-2}\sqrt{(1-x^2)}}, \ldots (G)$$

formule dont l'usage est facile à concevoir. On a d'ailleurs (n° 813)

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{(1-x^2)}} = c + \mathrm{l}\left[\frac{1-\sqrt{(1-x^2)}}{x}\right].$$

On trouvera de même

$$\int \frac{x^m\mathrm{d}x}{\sqrt{(2ax-x^2)}} = \frac{x^{m-1}}{m}\sqrt{2ax-x^2} + \frac{(2m-1)a}{m}\int \frac{x^{m-1}\mathrm{d}x}{\sqrt{(2ax-x^2)}} \ldots (H)$$

Des Fonctions exponentielles.

823. Il suit des règles de la différentiation (n° 716) que

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{1a}.$$

On saura donc intégrer deux des cas particuliers que peuvent présenter les exponentielles.

1° Si $z = f(a^x)$, la fonction $za^x dx$, en faisant $a^x = u$, deviendra $\frac{fu \,.\, du}{1a}$.

Par ex., $$\frac{a^x dx}{\sqrt{(1+a^{nx})}} = \frac{1}{1a} \cdot \frac{du}{\sqrt{(1+u^n)}}.$$

2° En différentiant ze^x, on a $e^x dx\,(z + z')$; en sorte que toute fonction exponentielle, pour laquelle le facteur de $e^x dx$ est formé de deux parties, dont l'une est la dérivée de l'autre, sera facile à intégrer. Par exemple,

$$\int e^x dx \;(3x^2 + x^3 - 1) = (x^3 - 1)\, e^x.$$

De même, en faisant $1 + x = z$, on trouve

$$\int \frac{e^x x dx}{(1+x)^2} = \int \frac{e^z}{e}\left(\frac{dz}{z} - \frac{dz}{z^2}\right) = \frac{e^z}{ez} = \frac{e^x}{1+x} + c.$$

824. Mais, dans tout autre cas, on devra recourir à l'intégration par parties (*voy.* p. 408). Par ex., pour $x^n dx \,.\, a^x$, on regardera d'abord x^n comme constant, et l'on aura

$$\int x^n dx \,.\, a^x = \frac{a^x \,.\, x^n}{1a} - \frac{n}{1a}\int a^x x^{n-1} dx;$$

en traitant de même $a^x x^{n-1} dx$, et ainsi de suite, de proche en proche, on aura

$$a^x x^n dx = a^x\left(\frac{x^n}{1a} - \frac{nx^{n-1}}{1^2 a} + \frac{n(n-1)x^{n-2}}{1^3 a} \ldots \pm \frac{1\,.\,2\,.\,3\ldots n}{1^{n+1} a}\right) + c.$$

Il est évident que le même calcul s'appliquera à $zaxdx$, z étant une fonction algébrique et entière de x.

Donc $$\int za^x dx = \frac{za^x}{la} - \int \frac{a^x z' dx}{la}.$$

825. Mais si *l'exposant* n *est négatif*, en réfléchissant sur l'esprit de la méthode qui vient d'être employée, on verra qu'il faudrait au contraire faire croître successivement l'exposant de x. On intégrera donc, en regardant d'abord a^x comme constant, et il viendra

$$\int \frac{a^x dx}{x^n} = \frac{-a^x}{(n-1)x^{n-1}} + \frac{la}{n-1}\int \frac{a^x dx}{x^{n-1}}.$$

En faisant ici le même raisonnement, on réduira la fonction à la forme

$$\int \frac{a^x dx}{x^n} = \frac{-a^x}{n-1}\left(\frac{1}{x^{n-1}} + \frac{la}{(n-2)x^{n-2}} + \frac{l^2 a}{(n-2)(n-3)x^{n-3}} \dots\right.$$
$$\left. + \frac{l^{n-2}a}{1.2.3\dots(n-2)x}\right) + \frac{l^{n-1}a}{2.3\dots(n-1)}\int \frac{a^x dx}{x}.$$

Mais ici on ne peut pas pousser plus loin le calcul, parce qu'il faudrait ci-dessus faire $n = 1$, ce qui donnerait l'infini, langage dont l'Algèbre se sert pour indiquer qu'il y a absurdité. L'intégrale $\int \frac{a^x dx}{x}$ a long-temps exercé les analystes, et l'on est forcé de la regarder comme une transcendante d'une espèce particulière, qui ne peut dépendre des arcs de cercle, ni des logarithmes. A défaut de méthode rigoureuse, on emploie les séries (p. 222)

$$\frac{a^x}{x} = \frac{1}{x} + la + \frac{l^2 a}{2}.x + \frac{l^3 a}{2.3}.x^2 + \dots$$

Multipliant par dx et intégrant chaque terme, il vient

$$\int \frac{a^x dx}{x} = lx + x.la + \frac{x^2 l^2 a}{2.2} + \frac{x^3 . l^3 a}{3.2.3} + \dots + c.$$

826. Si n était fractionnaire, l'une ou l'autre des méthodes précédentes servirait à réduire l'exposant de x à être compris entre 0, et 1 ou -1, et le développement en série (n°s 746, 840) servirait ensuite à donner, par approximation, l'intégrale cherchée.

Tout ce qu'on a dit ici peut également s'appliquer à $za^x dx$, lorsque z est une fonction quelconque algébrique de x.

Des Fonctions logarithmiques.

827. Proposons-nous d'intégrer $z\mathrm{d}x\,.\,\mathrm{l}^n x$, z étant une fonction quelconque algébrique de x.

Si n *est entier et positif,* on intégrera par parties, en regardant d'abord $\mathrm{l}^n x$ comme constant ; il viendra

$$\int z\mathrm{d}x\mathrm{l}^n x = \mathrm{l}^n x\,.\int z\mathrm{d}x - n\int\left(\mathrm{l}^{n-1}x\,.\,\frac{\mathrm{d}x}{x}\int z\mathrm{d}x\right),$$

et comme $\int z\mathrm{d}x$ est supposée connue par les principes antérieurs, on voit que l'intégration proposée est réduite à celle d'une fonction de même forme, où l'exposant du logarithme est moindre. Le même calcul appliqué à celle-ci, et de proche en proche aux suivantes, achèvera l'intégration.

Ainsi, pour $x^m\mathrm{l}^n x\,.\,\mathrm{d}x$, on a

$$\int x^m\mathrm{d}x\,.\,\mathrm{l}^n x = \frac{x^{m+1}}{m+1}\mathrm{l}^n x - \frac{n}{m+1}\int(\mathrm{l}^{n-1}x\,.\,x^m\mathrm{d}x),$$

$$\int x^m\mathrm{d}x\,.\,\mathrm{l}^{n-1}x = \frac{x^{m+1}}{m+1}\mathrm{l}^{n-1}x - \frac{n-1}{m+1}\int(\mathrm{l}^{n-2}x\,.\,x^m\mathrm{d}x),$$

et ainsi de suite. En réunissant ces résultats successifs, on trouvera

$$\int x^m\mathrm{l}^n x\,.\,\mathrm{d}x = x^{m+1}\left(\frac{\mathrm{l}^n x}{m+1} - \frac{n\mathrm{l}^{n-1}x}{(m+1)^2} + \frac{n(n-1)\mathrm{l}^{n-2}x}{(m+1)^3}\ldots\right) + c.$$

828. Mais *si* n *est entier et négatif,* on verra, comme précédemment (nº 825), que pour faire croître au contraire l'exposant du logarithme, il faut prendre d'abord z constant dans l'intégration par parties de $\int z\mathrm{d}x\mathrm{l}^n x$. Comme

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{x}\,.\,\mathrm{l}^n x = \frac{\mathrm{l}^{n+1}x}{n+1},$$

on partagera $z\mathrm{d}x\,.\,\mathrm{l}^n x$ en ces deux facteurs $zx \times \frac{\mathrm{d}x}{x}\,.\,\mathrm{l}^n x$, d'où

$$\int\frac{z\mathrm{d}x}{\mathrm{l}^n x} = \frac{zx}{-n+1}\mathrm{l}^{-n+1}x + \frac{1}{n-1}\int[\mathrm{l}^{-n+1}x\,.\,\mathrm{d}(zx)],$$

formule qui remplit visiblement le but qu'on veut atteindre. Mais, pour mieux voir la nature des obstacles qu'on rencontre, appliquons ceci à

$$\int \frac{x^m dx}{l^n x} = \frac{-x^{m+1}}{(n-1)\, l^{n-1}x} + \frac{m+1}{n-1}\int \frac{x^m dx}{l^{n-1}x}:$$

opérant de même sur ce dernier terme, etc., puis réunissant ces divers résultats, on aura

$$\int \frac{x^m dx}{l^n x} = -\frac{x^{m+1}}{n-1}\left[\frac{1}{l^{n-1}x} + \frac{m+1}{n-2}\cdot\frac{1}{l^{n-2}x}\right.$$

$$\left. + \frac{(m+1)^2}{(n-2)(n-3)}\,\frac{1}{l^{n-3}x} + \ldots\right] + \frac{(m+1)^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)}\int \frac{x^m dx}{l x}.$$

Nous sommes obligés de nous arrêter ici, car nous ne pourrions prendre $n = 1$, dans notre formule, sans y introduire l'infini. Mais faisons

$$x^{m+1} = z, \quad \text{d'où } (m+1)x^m dx = dz.$$

Il vient
$$\frac{x^m dx}{l x} = \frac{dz}{lz} = \frac{e^u du}{u},$$

en posant $lz = u$. On reproduit donc ici la fonction du n° 825, qu'on ne sait intégrer que par les séries.

829. *Lorsque* n *est fractionnaire*, soit positif, soit négatif, l'une ou l'autre de ces formules ramène l'intégrale de $z dx \,.\, l^n x$ à celle d'une fonction de même forme, n étant compris entre 1 et -1. Après quoi il faudra recourir au développement en séries (n°s 746, 840).

Des Fonctions circulaires.

830. S'il entre des arcs dans une fonction, pour l'intégrer, on remarquera que la différentielle de ces arcs est algébrique, et que, par conséquent, si l'on pratique l'intégration par parties, en regardant ces arcs d'abord comme constants (*voy.* p. 408), la fonction proposée en sera exempte. Ainsi, z étant une fonction de x, on a

$$\int z dx \,.\, \text{arc}(\sin = x) = \text{arc}(\sin = x)\int z dx - \int \frac{dx \,.\int z dx}{\sqrt{(1-x^2)}}.$$

De même, on trouvera

$$\int z\mathrm{d}x \,.\, \mathrm{arc}\,(\mathrm{tang} = x) = \mathrm{arc}\,(\mathrm{tang} = x)\int z\mathrm{d}x - \int \frac{\mathrm{d}x . \int z\mathrm{d}x}{1+x^2}.$$

831. Mais lorsque les fonctions renferment des lignes trigonométriques, il y a plusieurs manières de les intégrer, qui offrent tantôt plus, tantôt moins d'avantages. Nous allons exposer les principales.

Ire *Méthode*. On peut toujours ramener ces fonctions aux différentielles binômes, en faisant $\sin x$ ou $\cos\ x = z$.

En effet, soit

$$\sin x = z, \quad \cos x = \sqrt{(1 - z^2)}, \quad \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{(1 - z^2)}};$$

d'où $$\sin^m x \,.\, \cos^n x \,.\, \mathrm{d}x = z^m \mathrm{d}z \,.\, \sqrt{(1 - z^2)^{n-1}}.$$

1° Si n est impair, le radical disparaît.

2° Si m est impair, la 1re condition d'intégrabilité (n° 816) est remplie, puisque $\frac{1}{2}(m+1)$ est entier.

3° Si m et n sont pairs, la 2e condition (n° 817) est satisfaite, puisque $\frac{1}{2}(m+n)$ est entier.

On trouvera, par exemple,

$$\int \sin^4 x \,.\, \cos^3 x \,.\, \mathrm{d}x = \int z^4 \mathrm{d}z\,(1 - z^2) = \tfrac{1}{5}\sin^5 x - \tfrac{1}{7}\sin^7 x + c,$$

$$\int \sin^3 x \,.\, \mathrm{d}x = \int \frac{z^3 \mathrm{d}z}{\sqrt{(1-z^2)}} = -\tfrac{1}{3}\cos x \,.\, (3 - \cos^2 x) + c,$$

$$\int \sin^4 x \,.\, \mathrm{d}x = \int \frac{z^4 \mathrm{d}z}{\sqrt{(1-z^2)}} = -\frac{\sin^3 x + \frac{3}{2}\sin x}{4} \,.\, \cos x + \frac{1.3x}{2.4} + c.$$

832. IIe *Méthode*. Il suit du n° 722, que

$$\int \mathrm{d}x \,.\, \cos kx = \frac{1}{k}\sin kx + c, \quad \int \mathrm{d}x \,.\, \sin kx = -\frac{1}{k}\cos kx + c.$$

Or, on a appris (p. 235) à développer toute puissance de $\sin x$ et $\cos x$ en séries, suivant les multiples de l'arc x ; on aura donc à intégrer une suite de termes de la forme ci-dessus.

Par exemple,

$$\int \cos^5 x \,.\, \mathrm{d}x = \int (\tfrac{1}{16}\cos 5x + \tfrac{5}{16}\cos 3x + \tfrac{5}{8}\cos x)\mathrm{d}x$$
$$= \tfrac{1}{80}\sin 5x + \tfrac{5}{48}\sin 3x + \tfrac{5}{8}\sin x + c.$$

On emploie souvent cette méthode, parce qu'il est plus facile d'obtenir les solutions numériques, quand on préfère les sinus et cosinus des multiples des arcs, aux puissances de ces lignes.

833. IIIe *Méthode*. Les formules (*K*, n° 630) serviront aussi à traduire en exponentielles les sinus, cosinus.... ce qui ramènera l'intégrale de ceux-ci à celle des premières (n° 823).

834. La IVe *Méthode* consiste dans l'intégration par parties. Comme $-dx \sin x$ est la différentielle de $\cos x$, décomposons le produit $\sin^m x \,.\, \cos^n x \,.\, dx$, en $dx \,.\, \sin x \,.\, \cos^n x \times \sin^{m-1}x$; le 1er facteur ayant pour intégrale $-\dfrac{\cos^{n+1}x}{n+1}$, on obtient

$$\int dx \sin^m x \cos^n x = -\frac{\sin^{m-1}x}{n+1}\cos^{n+1}x + \frac{m-1}{n+1}\int \cos^{n+2}x \sin^{m-2}x \,.\, dx.$$

Mettons pour $\cos^{n+2}x$, sa valeur $\cos^n x \,.\, \cos^2 x$, ou $\cos^n x\,(1-\sin^2 x)$; transposant, il vient

$$\int dx \sin^m x \,.\, \cos^n x = -\frac{\sin^{m-1}x \,.\, \cos^{n+1}x}{m+n} + \frac{m-1}{m+n}\int dx \,.\, \sin^{m-2}x \,.\, \cos^n x \;\ldots\; (I)$$

En opérant, par rapport au cosinus, de la même manière que nous venons de le faire pour le sinus, on aura

$$\int dx \sin^m x \,.\, \cos^n x = \frac{\sin^{m+1}x \cos^{n-1}x}{m+n} + \frac{n-1}{m+n}\int dx \,.\, \sin^m x \,.\, \cos^{n-2}x \;\ldots\; (K)$$

Ces formules abaissent l'exposant du sinus ou du cosinus; leur usage combiné et successif donne l'intégrale *lorsque* m *et* n *sont entiers et positifs*. Par exemple, on a

$$\int dx \sin^3 x \cos^2 x = -\tfrac{1}{5}\sin^2 x \cos^3 x + \tfrac{2}{5}\int dx \sin x \cos^2 x,$$
$$\int dx \sin x \cos^2 x = \tfrac{1}{3}\sin^2 x \cos x + \tfrac{1}{3}\int dx \sin x;$$

or, ce dernier terme $= -\tfrac{1}{3}\cos x + c$; réunissant ces diverses parties, on a

$$\int dx \sin^3 x \cos^2 x = \cos x\,(-\tfrac{1}{5}\sin^2 x \cos^2 x + \tfrac{2}{10}\sin^2 x - \tfrac{2}{15}) + c.$$

835. Mais si m ou n est négatif, ces formules exigent quelque modification. La 1re donne, en changeant n en $-n$,

$$\int \frac{dx \sin^m x}{\cos^n x} = -\frac{\sin^{m-1}x}{(m-n)\cos^{n-1}x} + \frac{m-1}{m-n}\int \frac{dx \sin^{m-2}x}{\cos^n x} \;\ldots\; (L)$$

qui fera, comme on voit, dépendre l'intégrale cherchée de celle de $\frac{dx \sin x}{\cos^n x}$, ou $\frac{dx}{\cos^n x}$, selon que m est impair ou pair. L'une de ces intégrales s'obtient en faisant $\cos x = z$, ce qui donne

$$-\int \frac{dz}{z^n} = \frac{1}{(n-1)\cos^{n-1} x};$$

l'autre va être donnée (n° 836).

La seconde (K) de nos formules, en faisant n négatif, et résolvant par rapport au dernier terme, puis changeant n en $n-2$, donne

$$\int \frac{dx \sin^m x}{\cos^n x} = \frac{\sin^{m+1} x}{(n-1)\cos^{n-1} x} - \frac{m-n+2}{n-1} \int \frac{dx \cdot \sin^m x}{\cos^{n-2} x} \dots (M)$$

L'intégrale demandée se ramène donc à celle de $dx \sin^m x$, ou à $\frac{dx \sin^m x}{\cos x}$, selon que n est pair ou impair. La 1re va être donnée, la 2e l'est par la formule (I) et le n° 838, 2°, ou 4°.

836. Si l'on fait n ou m nul dans les équ. I et K, on a

$$\int \sin^m x \cdot dx = \frac{-\cos x \cdot \sin^{m-1} x}{m} + \frac{m-1}{m} \int dx \sin^{m-2} x,$$

$$\int \cos^n x \cdot dx = \frac{\sin x \cdot \cos^{n-1} x}{n} + \frac{n-1}{n} \int dx \cos^{n-2} x,$$

changeant dans ces équ. m en $-m+2$, n en $-n+2$, on trouve

$$\int \frac{dx}{\sin^m x} = \frac{-\cos x}{(m-1)\sin^{m-1} x} + \frac{m-2}{m-1} \int \frac{dx}{\sin^{m-2} x},$$

$$\int \frac{dx}{\cos^n x} = \frac{\sin x}{(n-1)\cos^{n-1} x} + \frac{n-2}{n-1} \int \frac{dx}{\cos^{n-2} x}.$$

Au lieu de déduire ainsi toutes ces formules des deux équ. I et K, on pourrait les trouver directement. Il suffirait pour cela de réfléchir à la nature de l'intégration par parties, et au but qu'on s'y doit proposer.

On pourrait encore intégrer d'une autre manière les fractions $\frac{\cos^m x \cdot dx}{\sin^n x}$ et $\frac{\sin^m x \cdot dx}{\cos^n x}$; car la première, par ex., si m est pair et

$=2h$, équivaut à $\frac{(1-\sin^2 x)^h dx}{\sin^n x}$; développant $(1-\sin^2 x)^h$, on a une suite de termes de la forme $\sin^k x \,.\, dx$. Si m est impair et $=2h+1$, on a

$$\frac{\cos^{2h} x \,.\, \cos x \,.\, dx}{\sin^n x} = \frac{(1-z^2)^h dz}{z^n},$$

en faisant $\sin x = z$.

837. Pour le cas où les exposants du sinus et du cosinus sont à la fois négatifs, en multipliant le numérateur par $\cos^2 x + \sin^2 x$, on a

$$\int \frac{dx}{\sin^m x \,.\, \cos^n x} = \int \frac{dx}{\sin^{m-2} x \,.\, \cos^n x} + \int \frac{dx}{\sin^m x \,.\, \cos^{n-2} x}.$$

On parvient donc à des fractions dégagées de $\sin x$, ou de $\cos x$. Si $m = n$, comme $\sin x \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x$, en faisant $2x = z$, la fraction proposée se change en

$$\int \frac{dx}{\cos^n x \,.\, \sin^n x} = 2^{n-1} \int \frac{dz}{\sin^n z}.$$

838. Nous intégrons à part cinq fonctions circulaires, soit parce qu'elles offrent des calculs plus simples, soit parce que nos formules y ramènent toutes les autres.

1° Soit $\frac{dx}{\sin x}$; en faisant $\cos x = z$, on a $-\frac{dz}{1-z^2}$, fraction rationnelle (p. 410); d'où

$$\int \frac{dx}{\sin x} = 1c + \frac{1}{2} 1 \frac{1-\cos x}{1+\cos x};$$

et, comme (n° 359) $\text{tang}^2 \frac{1}{2} x = \frac{1-\cos x}{1+\cos x}$, on a

$$\int \frac{dx}{\sin x} = 1 \frac{c\sqrt{(1-\cos x)}}{\sqrt{(1+\cos x)}} = 1 \,.\, c \,\text{tang}\, \frac{1}{2} x.$$

2° Un calcul semblable, en faisant $\sin x = z$, donne

$$\int \frac{dx}{\cos x} = 1 \frac{c\sqrt{(1+\sin x)}}{\sqrt{(1-\sin x)}} = 1 \,.\, c \,\text{tang}\, (45° + \frac{1}{2} x).$$

3° Pour $\frac{dx \cdot \cos x}{\sin x}$, comme le numérateur est la différentielle du dénominateur (règle III, p. 407), on a

$$\int \frac{dx \cos x}{\sin x} = \int \frac{dx}{\tan x} = \int dx \cdot \cot x = 1\,(c \sin x).$$

4° On a de même

$$\int \frac{dx \sin x}{\cos x} = \int dx \cdot \tan x = \int \frac{dx}{\cot x} = 1\,\frac{c}{\cos x}.$$

5° En ajoutant ces deux dernières formules, on trouve

$$\int \frac{dx}{\sin x \cos x} = 1\,\frac{c^2 \sin x}{\cos x} = 1\,(C \tan x).$$

Constantes arbitraires. Intégration par séries.

839. Soit P l'intégrale d'une fonction $z dx$ de x, ou $dP = z dx$, et c la constante arbitraire qu'on doit ajouter pour qu'elle soit la plus générale possible (n° 808), on a

$$\int z dx = P + c.$$

Tant qu'il ne s'agit que d'un calcul, c reste quelconque ; mais lorsqu'on veut appliquer cette intégrale à une question déterminée, la constante c cesse d'être arbitraire, et doit satisfaire à des conditions prescrites. Si, par ex., on demande l'aire $BCPM = t$ (fig. 40), comprise entre les ordonnées BC, PM, dont la position répond aux abscisses a et b, comme (n° 768) $dt = y dx$, on a $t = \int y dx = P + c$. Or, l'aire $P + c$, commençant lorsque $x = AC = a$, t doit être nul lorsqu'on fera $x = a$ dans $P + c$, ou $A + c = 0$, A étant la valeur que prend la fonction de x désignée par P, lorsque $x = a$; on tire de là $c = -A$, d'où l'aire $t = P - A$. Il restera ensuite à mettre b pour x, et l'aire sera renfermée dans les limites prescrites.

En général, pour déterminer la constante arbitraire, d'après les conditions de la question, on cherchera quelle valeur k doit prendre l'intégrale $t = P + c$ lorsque $x = a$, savoir, $k = A + c$, d'où

$$c = k - A, \quad \text{et} \quad t = P + k - A,$$

sans qu'il soit, comme on voit, nécessaire de connaître l'*origine de l'intégrale,* c'est-à-dire sans savoir pour quelle valeur a de x elle est nulle.

Toute intégrale dont l'origine n'est pas fixée, se nomme *Indéfinie;* elle n'est *Complète* que quand elle renferme une constante arbitraire.

Lorsque les limites a et b sont données, on a $t = P - A$ en vertu de la 1re ; mettant pour x la 2e limite b, il vient $t = B - A$, pour la valeur absolue numérique et constante de $t = \int y\,dx$: c'est ce qu'on nomme une *Intégrale définie,* A et B étant les valeurs que prend P lorsque $x = a$ et b. En remarquant la forme de cette expression, il est visible que pour l'obtenir, il suffit de *faire* x = a *et* x = b *dans l'intégrale indéfinie* P, *et de retrancher le premier résultat du second.* Tout ceci s'éclaircira bientôt.

M. Fourier a imaginé une notation fort commode pour désigner les intégrales définies ; on affecte le signe $\int$ d'intégration de deux indices, l'un inférieur qui se rapporte à la 1re limite de l'intégrale, l'autre supérieur pour la 2e limite. $\int_a^b$ indique une intégrale prise depuis $x = a$, jusqu'à $x = b$. C'est ainsi que $\int_{2\pi}^{\pi} \sin x\,dx = 1$, parce que l'intégrale $-\cos x$ devient -1 et 0 aux deux limites. L'expression $\int_a^x$ indique que l'intégrale commence à $x = a$, et s'étend jusqu'à une valeur indéfinie de la variable x.

840. Lorsqu'une fonction proposée n'est pas susceptible d'une intégration exacte, on a recours aux approximations. Ainsi, pour trouver $\int z\,dx$, on développera z en série, suivant les puissances ascendantes ou descendantes de x (n° 746) ; puis multipliant chaque terme par dx, on l'intégrera. Nous n'en donnerons que deux exemples.

1° Soit $\int \frac{dx}{1 + x^2}$; cette intégrale est arc (tang $= x$). En développant $(1 + x^2)^{-1}$, on a (p. 14)

$$\frac{dx}{1 + x^2} = dx\,(1 - x^2 + x^4 - x^6 + \ldots\ldots),$$

d'où $\quad$ $\text{arc}\,(\text{tang} = x) = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 \ldots\ldots$

2° Pour $\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)}}$ = arc (sin = x), on développera $(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{1.3x^4}{2.4} \ldots$ (p. 16); d'où

$$\text{arc}(\sin = x) = x + \frac{x^3}{2.3} + \frac{3x^5}{2.4.5} + \frac{3.5.x^7}{2.4.6.7} + \ldots$$

On n'a pas ajouté de constante, parce qu'on suppose que l'arc dont il s'agit ici est le plus petit de ceux dont x est le sinus ou la tangente, arc qui est nul quand le sin. et la tang. le sont. La 1re de ces formules a servi (n° 631) à trouver le rapport π de la circonférence au diamètre; on peut employer la 2e au même usage, car le tiers du quadrans ayant $\frac{1}{2}$ pour sinus, en faisant $x = \frac{1}{2}$, on a

$$\frac{1}{6}\pi = \frac{1}{2} + \frac{1}{2.3.2^3} + \frac{1.3}{2.4.5.2^5} + \frac{1.3.5}{2.4.6.7.2^7} \ldots$$

Du reste, la loi de ces séries suit du calcul même.

841. Pour qu'une série soit de quelque usage dans les applications numériques, il faut qu'elle converge (p. 210); il est donc convenable d'avoir divers procédés pour effectuer ces sortes d'intégrations. La suivante est due à Jean Bernoulli.

Faisons $h = -x$ dans la formule de Taylor; comme $f(x-x)$ ou $f(0)$, est ce que devient y, ou fx, lorsque $x = 0$, $f(0)$ est une constante b; donc

$$b = y - y'x + \tfrac{1}{2} y''x^2 - \ldots$$

Or, la dérivée y' de y étant donnée, l'intégration consiste à trouver y; soit $\int z dx$ l'intégrale cherchée, $z = y'$, $z' = y'' \ldots$, et l'on trouve

$$y = \int z dx = b + zx - \tfrac{1}{2} z'x^2 + \tfrac{1}{6} z''x^3 - \ldots,$$

Il suit de ce qu'on a vu (n° 741), qu'on peut obtenir des limites de la somme des termes négligés.

Par exemple, pour $\int \frac{dx}{a+x} = l(a+x)$, on a

$$b = la, \quad z = \frac{1}{a+x}, \quad z' = \frac{-1}{(a+x)^2}, \quad z'' = \frac{2}{(a+x)^3} \ldots,$$

$$(a+x) = l\,a + \frac{x}{a+x} + \frac{x^2}{2(a+x)^2} + \frac{x^3}{3(a+x)^3} \ldots$$

842. La formule de Taylor donne aussi pour $z = fx$,

$$f(x+h) - fx = zh + \tfrac{1}{2} z'h^2 + \tfrac{1}{6} z''h^3 \ldots,$$

d'où $f(x+b-a) - fx = z(b-a) + \tfrac{1}{2} z'(b-a)^2 + \ldots,$

en faisant $h = b - a$. Si l'on prend ensuite $x = a$, ce qui change $z, z', z'' \ldots$ en des constantes $A, A', A'' \ldots$, on obtient

$$fb - fa = A(b-a) + \tfrac{1}{2} A'(b-a)^2 + \tfrac{1}{6} A''(b-a)^3 \ldots,$$

c'est l'intégrale $\int z dx$ entre les limites $x = a$ et $x = b$ (n° 839). Mais pour que cette série soit applicable, il faut que celle de Taylor ne soit pas fautive. On examinera donc la marche de la fonction z depuis $x = a$ jusqu'à $x = b$, afin de reconnaître si elle devient infinie, pour de certaines valeurs intermédiaires de cette variable x.

On pourra faire converger la série autant qu'on voudra ; car, partageant l'intervalle $b - a$ en n parties égales i, en sorte que $b - a = ni$, on prendra d'abord l'intégrale entre les limites a et $a + i$, c'est-à-dire qu'on mettra ci-dessus $a + i$ pour b. De même on prendra l'intégrale depuis $a + i$ jusqu'à $a + 2i$; ensuite depuis cette quantité jusqu'à $a + 3i \ldots$

On fera donc successivement

$x = a$, ce qui changera $z, z', z'' \ldots$, en $A, A', A'' \ldots$
$x = a + i$. . . . . $B, B', B'' \ldots$
$x = a + 2i$. . . . . $C, C', C'' \ldots$
etc. ;

d'où
$$\begin{aligned} f(a+i) - fa &= Ai + \tfrac{1}{2} A'i^2 + \tfrac{1}{6} A''i^3 + \ldots, \\ f(a+2i) - f(a+i) &= Bi + \tfrac{1}{2} B'i^2 + \tfrac{1}{6} B''i^3 + \ldots, \\ f(a+3i) - f(a+2i) &= Ci + \tfrac{1}{2} C'i^2 + \tfrac{1}{6} C''i^3 + \ldots \\ &\text{etc.} \ldots \end{aligned}$$

$$f(a+ni) - f[a+(n-1)i] = Mi + \tfrac{1}{2} M'i^2 + \tfrac{1}{6} M''i^3 + \ldots$$

843. La somme de ces équations est

$$f(a+ni) - fa = fb - fa = \int z dx =$$

$$(A+B+C \ldots + M)i + \tfrac{1}{2}(A'+B' \ldots + M')i^2 + \tfrac{1}{6}(A'' + \ldots + M'')i^3 \ldots$$

Telle est l'intégrale de $\int z\mathrm{d}x$ entre les limites de a à b. Si l'on prend i assez petit pour se borner au seul 1[er] terme, on a

$$\int z\mathrm{d}x = Ai + Bi + Ci \ldots + Mi,$$

série dont les divers termes sont les valeurs que prend successivement la fonction $z\mathrm{d}x$, lorsqu'on fait x égal à a, $a+i$, $a+2i\ldots$ C'est pour cela que dans la méthode infinitésimale on regarde l'intégrale comme la *Somme* d'un nombre infini d'éléments, qui sont les valeurs consécutives que prend la fonction lorsqu'on fait passer la variable par toutes les valeurs intermédiaires entre ses limites; c'est ce qui s'éclaircira par la suite (n° 846, 2°).

Consultez sur les approximations des intégrales définies un beau Mémoire de M. Poisson, inséré parmi ceux de l'Institut, 1826. M. Cauchy a aussi écrit sur le même sujet, et en a fait des applications à des questions de Géométrie et de Mécanique très-curieuses. La *Théorie de la chaleur,* par M. Fourier, renferme un grand nombre de questions qui se rapportent aux intégrales définies.

844. Nous ne dirons rien des intégrations du 2ᵉ, 3ᵉ.... ordre des fonctions d'une seule variable, puisqu'elles rentrent dans ce qu'on a exposé. Il y a alors, 2, 3.... constantes arbitraires.

Par exemple, pour $\iint \frac{(a^2 - x^2)\mathrm{d}x^2}{(x^2+a^2)^2}$, on intégrera une première fois; et comme la fraction proposée se décompose (p. 205) en $\frac{2a^2\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^2} - \frac{\mathrm{d}x}{x^2+a^2}$, et que la première donne (n° 811) $\frac{x}{x^2+a^2} + \int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+a^2} + c$, il reste à intégrer de nouveau $\frac{x\mathrm{d}x}{x^2+a^2} + c\mathrm{d}x$. On a donc

$$\iint \frac{(a^2 - x^2)\mathrm{d}x^2}{(x^2+a^2)^2} = \mathrm{l}\sqrt{(x^2+a^2)} + cx + c'.$$

Des Quadratures et Rectifications.

845. L'aire t d'une courbe plane (n° 768) est $=\int y\mathrm{d}x$, et il s'agit d'intégrer cette expression entre les limites convenables; c'est pour cela qu'on a donné le nom de *Méthode des quadratures* aux procédés

qui nous ont occupés jusqu'ici, par lesquels on obtient l'intégrale des fonctions d'une seule variable. En voici divers exemples :

I. Pour la parabole AM (fig. 71), $y^2 = 2px$; donc

$$t = \int \sqrt{(2p)} \cdot x^{\frac{1}{2}} \mathrm{d}x = \tfrac{2}{3}\sqrt{(2p)} \cdot x^{\frac{3}{2}} + c = \tfrac{2}{3}xy + c.$$

Quand l'aire doit partir du sommet A, $x = 0$ donne $t = 0$; ainsi c est nul; donc *l'aire* MAM′ *d'un segment de parabole est les deux tiers du rectangle circonscrit* M′N′NM.

Si l'aire est comprise entre BC et PM, en faisant $AB = a$, $BC = b = \sqrt{(2pa)}$, t est nul lorsque $x = a$, d'où $c = -\frac{2}{3}ab$, puis $t = \frac{2}{3}(xy - ab)$. L'aire $C'CMM'$ est les deux tiers de la différence des rectangles $N'M$ et $D'C$.

Pour les paraboles de tous les degrés $y^m = ax^n$, on a $t = \dfrac{mxy}{m+n}$. Toutes ces courbes sont donc *carrables*.

II. Pour l'hyperbole équilatère MN (fig. 72) entre ses asymptotes Ax, Ay, on a $xy = m^2$ (n° 418) ; donc

$$t = \int y\mathrm{d}x = m^2 \cdot \int \frac{\mathrm{d}x}{x} = m^2 \,\mathrm{l}\, x + c;$$

l'aire t ne peut être prise depuis l'axe Ay, parce que $x = 0$, donnerait $t = 0$, et $c = -m^2 \,\mathrm{l}\, 0 = \infty$. Mais, si l'aire doit commencer à l'ordonnée BC qui passe par le sommet C, comme $AB = m$ (n° 418), on a $c = -m^2 \,\mathrm{l}\, m$, d'où $t = m^2 \,\mathrm{l}\, \dfrac{x}{m}$. On voit donc que si $m = 1$, on a $t = \mathrm{l}\, x$: *chaque aire prise à partir de* BC, *est donc le logarithme népérien de l'abscisse.*

Lorsque l'angle des asymptotes est α, l'aire est (p. 367), $t = \int y\mathrm{d}x \cdot \sin\alpha = \displaystyle\int \frac{\sin\alpha\,\mathrm{d}x}{x}$, en faisant $m = 1$; donc $t = \mathrm{Log}\, x$, en prenant pour système de log. celui dont le module est $M = \sin\alpha$ (n° 718). Si l'angle α est droit, $M = 1$, on retombe sur le 1er cas, et l'on obtient les log. népériens ; mais on voit qu'en faisant varier l'angle α des asymptotes, on peut obtenir tous les systèmes pour lesquels $M < 1$. Ainsi, lorsque la base est 10, on a . . . . $M = 0{,}4342944819$; l'angle qui a ce nombre pour sinus, le rayon étant 1, est $\alpha = 25°\,44''\,25'',47$: tel est l'angle que doivent former les asymptotes d'une hyperbole dont la puissance est 1, pour que

chaque aire soit le log. tabulaire de son abscisse. On voit par là que c'est très-improprement qu'on avait donné la dénomination de *Logarithmes hyperboliques* aux log. népériens, puisque tous les systèmes de log. trouvent leurs représentations dans les aires de diverses hyperboles.

III. Pour le cercle $y^2 = a^2 - x^2$, l'origine étant au centre,

$$t = \int \sqrt{(a^2 - x^2)}\, dx = \int \frac{a^2 dx}{\sqrt{(a^2 - x^2)}} - \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{(a^2 - x^2)}},$$

en multipliant et divisant par $\sqrt{(a^2 - x^2)}$. Or, ce dernier terme est facile à intégrer par parties, puisque $\frac{x dx}{\sqrt{(a^2 - x^2)}}$ est la différentielle de $-\sqrt{(a^2 - x^2)}$; donc

$$\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{(a^2 - x^2)}} = -x\sqrt{(a^2 - x^2)} + \int dx \sqrt{(a^2 - x^2)} = -xy + t.$$

Substituons et transposons t, nous aurons

$$t = \tfrac{1}{2} xy + \tfrac{1}{2} a \int \frac{a dx}{\sqrt{(a^2 - x^2)}};$$

mais la formule $ds^2 = dx^2 + dy^2$ appliquée à notre cercle, donne $ds = \frac{a dx}{y} = \frac{a dx}{\sqrt{(a^2 - x^2)}}$; donc, en prenant l'arc s dans les mêmes limites que l'intégrale proposée on a enfin $t = \frac{1}{2} xy + \frac{1}{2} as + c$. Soient $CA = b$, $AB = k$ (fig. 73) : doublons et intégrons depuis $x = b$ jusqu'à $x = a$, pour obtenir l'aire du segment BOB'; nous aurons (n° 839) $\frac{1}{2} a \times$ arc $BOB' - bk$: puis ajoutant le triangle CBB' il vient

le secteur $CBOB' = \frac{1}{2} CO \times$ arc BOB'.

Pour l'aire du cercle, $t = \int dx \sqrt{(a^2 - x^2)}$, on développe le radical (*voy.* p. 16) et l'on a

$$t = a \int dx \left(1 - \frac{x^2}{2a^2} - \frac{1 \cdot x^4}{2 \cdot 4 \cdot a^4} - \frac{1 \cdot 3x^6}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot a^6} - \text{etc.}\right);$$

et intégrant depuis $x = 0$,

$$t = ax - \frac{x^3}{2 \cdot 3 \cdot a} - \frac{1 \cdot x^5}{2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot a^3} - \frac{1 \cdot 3x^7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7 \cdot a^5} - \text{etc.}$$

IV. Pour l'ellipse (fig. 73), $y = \frac{b}{a}\sqrt{(a^2 - x^2)}$; d'où

$$t = \int \frac{b}{a}\sqrt{(a^2 - x^2)}\, dx = \frac{b}{a} \times z,$$

z désignant la partie de l'aire du cercle circonscrit qui est comprise entre les ordonnées limites. Les aires t et z sont donc dans le rapport constant de b à a. Ainsi, *l'aire du cercle est à celle de l'ellipse, ou l'aire d'un segment de cercle est à celle du segment de l'ellipse inscrite qui est terminée par les mêmes ordonnées, comme le grand axe est au petit;* et, puisque l'aire du cercle circonscrit est πa^2, celle de l'ellipse entière est $= \pi ab$.

V. Pour la cycloïde FMA (fig. 43), mettons l'origine en F, et soit $FS = x$, $SM = y$; nous aurons (nº 763, VI),

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\left(\frac{y}{2r - y}\right)},\quad t = \int y\, dx = \int \sqrt{(2ry - y^2)}dy.$$

Cette intégrale est l'aire de la portion FKN du cercle générateur; donc l'aire $FyAM = FKEB = \frac{1}{2}\pi r^2$. Comme d'ailleurs $AE = \pi r$, le rectangle $yE = 2\pi r^2$, d'où $AFE = \frac{3}{2}\pi r^2$: *l'aire AFA' de la cycloïde entière est triple de celle du cercle générateur.*

VI. La méthode de Simpson pour *évaluer les aires curvilignes planes* par approximation, mérite d'être exposée.

Cherchons d'abord l'aire d'un petit segment CEM (fig. 74) d'une courbe quelconque rapportée aux axes rectangulaires Ax, Ay, et nommons α l'angle MCH formé par la corde CM avec Ax. Menons l'ordonnée KE, par le milieu K entre les ordonnées terminales CB, MP. On peut sensiblement regarder l'arc CM comme appartenant à une parabole dont le sommet L répond au milieu I de la corde. L'aire du segment est donc $CEMI = \frac{2}{3}\, CM \,.\, LI$. Or les triangles LEI, MCH, donnent $LI = EI \cos\alpha$, $CM = \frac{CH}{\cos\alpha}$,

d'où $$CEMI = \frac{2}{3} EI \times CH.$$

Cela posé, faisons $BK = KP = h$, $CB = y'$, $KE = y''$, $PM = y'''$; l'aire $CBPME$ se compose

du trapèze $CBPMI = h(y' + y''')$, et de $CEMI = \frac{4}{3}\, h \,.\, EI$,

Or, $EI = EK - KI = \frac{1}{2}(2y'' - y' - y''')$; donc le segment $CEMI = \frac{2}{3}h(2y'' - y' - y''')$, et la petite aire

$$CEMPB = \frac{2}{3}h(\tfrac{1}{2}y' + 2y'' + \tfrac{1}{2}y''').$$

Supposons l'aire plane *BACD* (fig. 75) qu'on veut mesurer, limitée par la courbe *AC*, la droite *BD* et les perpendiculaires *AB*, *CD*; on coupera la base *BD* en *un nombre pair* de parties égales, dont h sera la longueur, et par les points de divisions, on mènera des ordonnées $y', y'', y''' \ldots y^n$, qui couperont l'aire en éléments dont les surfaces respectives seront exprimées deux à deux par la formule ci-dessus : la 2ᵉ, la 3ᵉ,.... seront

$$\frac{2}{3}h(\tfrac{1}{2}y''' + 2y^{\text{IV}} + \tfrac{1}{2}y^{\text{V}}),\ \frac{2}{3}h(\tfrac{1}{2}y^{\text{V}} + 2y^{\text{VI}} + \tfrac{1}{2}y^{\text{VII}}),\ \text{etc.}$$

$$\text{la somme} = \frac{2}{3}h(\tfrac{1}{2}y' + 2y'' + y''' + 2y^{\text{IV}} + y^{\text{V}} \ldots + \tfrac{1}{2}y^{(n)})$$

$$BACD = \frac{2}{3}h[(y' + y'' \ldots + y^n) + y'' + y^{\text{I}} \ldots + y^{n-1} - \tfrac{1}{2}(y + y^n)]:$$

ayant tracé un nombre impair d'ordonnées équi-distantes, faites leur somme, plus celle de toutes les ordonnées de rangs pairs, moins la moitié des deux extrêmes; le tout multiplié par $\frac{2}{3}$ *de leur intervalle* h.

La même règle s'applique évidemment au cas où l'aire est comme *ACFE* terminée par deux courbes opposées, en appelant $y', y'', y''' \ldots$ les longueurs totales de chaque parallèle.

Plus h est petit, et plus le résultat est approché de l'aire demandée. Ce théorème s'applique à toute surface irrégulière, parce qu'on peut la décomposer en d'autres qu'on évalue séparément, et qu'on ajoute ou retranche ensuite, selon les cas. Lorsqu'il arrive que la base se trouve coupée par la courbe, la même règle reçoit son application, en faisant égale à zéro l'ordonnée du point de section.

846. Nous ferons ici quelques remarques.

1° Si l'aire t est comprise entre les branches *BM*, *DK*, d'une même courbe (fig. 78), ou entre deux courbes différentes données, en nommant $Y = Fx$, $y = fx$, les ordonnées *PM*, *PE*, on a

$$BCPM = \int Y\mathrm{d}x,\ DCPE = \int y\mathrm{d}x,\ \text{d'où } BDEM = \int (Y - y)\mathrm{d}x.$$

2° Selon la méthode infinitésimale (nᵒˢ 802, 843) l'aire t peut être considérée comme la somme de rectangles tels que m (fig. 78), dont dx et dy sont les côtés; dxdy est donc l'élément de l'aire t, et il s'agit d'intégrer $\int\int \mathrm{d}x\mathrm{d}y$ entre les limites convenables.

Pareillement, concevons que dans le cercle CB (fig. 76) on ait pris un élément m en un lieu quelconque ; sa distance au centre, ou $Cm = r$, et l'angle $mCx = \theta$ en fixent la position. L'aire de l'élément peut être représentée par $dr \,.\, d\theta$, dont l'intégrale relative à θ est θdr : en la prenant depuis $\theta = 0$ jusqu'à $\theta = 2\pi r$, on a l'aire d'une couronne circulaire $= 2\pi r dr$, dont l'épaisseur dr est infiniment petite. L'intégrale est πr^2 ; prise depuis le centre C où $r = 0$, jusqu'à la circonférence B où $r = R =$ le rayon du cercle, on a πR^2 pour l'aire du cercle.

Appelons r la corde AB (fig. 77) formant le segment circulaire AOB, dont on demande l'aire ; a le rayon AC ; on peut considérer la surface comme ayant pour élément le triangle différentiel BAb, dont l'aire est $dt = -\frac{1}{2} r^2 d\alpha$, en appelant α l'angle BAD : on met ici le signe — parce que α diminue quand t augmente (n° 742). Or, dans le triangle rectangle ABD, on a $r = 2a \cos \alpha$, d'où

$$dr = -2a \sin \alpha d\alpha,\; d\alpha = \frac{-dr}{2a \sqrt{(1 - \cos^2\alpha)}} = \frac{-dr}{\sqrt{(4a^2 - r^2)}}.$$

Ainsi l'aire $dt = -\frac{1}{2} r^2 d\alpha$ donne

$$t = \int \tfrac{1}{2} r^2 \,.\, \frac{dr}{\sqrt{(4a^2 - r^2)}} = \int \tfrac{1}{2} r^2 dr\, (4a^2 - r^2)^{-\frac{1}{2}},$$

$$t = \int \frac{r^2 dr}{4a} \left(1 + \frac{1 . r^2}{2 . 2^2 . a^2} + \frac{1 . 3 . r^4}{2 . 4 . 2^4 . a^4} + \frac{1 . 3 . 5 . r^6}{2 . 4 . 6 . 2^6 . a^6} \text{ etc.}\right)$$

$$t = \frac{1}{4a}\left(\frac{r^3}{3} + \frac{r^5}{2 . 5 . 2^2 . a^2} + \frac{1.3.r^7}{2.4.7.2^4.a^4} + \frac{1.3.5.r^9}{2.4.6.9.2^9.a^9} \cdots\right)$$

l'intégrale est prise ici depuis $r = 0$, et exprime l'aire du segment AOB dont la corde est r. En faisant $r = a$, on a l'aire du demi-cercle $= \frac{1}{2}(2a)^2 \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3 . 5} + \frac{1 . 3}{2 . 4 . 7} \cdots\right)$; égalant à $\frac{1}{2}\pi a^2$, on trouve pour π cette série convergente dont la loi est manifeste,

$$\pi = 4\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2 . 5} + \frac{1 . 3}{2 . 4 . 7} + \frac{1 . 3 . 5}{2 . 4 . 6 . 9} + \frac{1 . 3 . 5 . 7}{2 . 4 . 6 . 8 . 11} + \ldots\right)$$

3° Quand l'aire sera renfermée entre deux courbes BM, DE (fig. 78), dont on a les équ. $Y = Fx$, $y = fx$, on intégrera l'élément $m = dydx$ depuis PE jusqu'à PM, c'est-à-dire que ydx devenant $(Y - y)dx$, sera une fonction connue de x, représentant

l'élément ME compris entre deux ordonnées infiniment voisines. Il restera à intégrer relativement à x entre les limites AC, AP; et si l'aire est comprise dans le contour d'une courbe fermée, on intégrera $(Y - y)\,dx$ depuis la moindre valeur de x jusqu'à la plus grande. Lorsque l'aire est renfermée entre quatre branches de courbes, telles que BM, BI, IK, KM, il est facile de la partager par des droites parallèles aux axes, en parties qu'on sache évaluer séparément d'après les principes précédents.

Les paraboles opposées AF, AF' (fig. 80) ont pour équation $y^2 = \pm\, 2px$; intégrons l'élément $m = dxdy$ relativement à x, de M' en M, c'est-à-dire depuis $-\dfrac{y^2}{2p}$ jusqu'à $+\dfrac{y^2}{2p}$; xdy donne $\dfrac{y^2dy}{p}$ pour l'aire de la tranche MM'. Intégrant de nouveau de A en C, ou depuis $y = 0$, l'aire $F'AFC$ sera $\dfrac{y^3}{3p}$, ou $\frac{2}{3}xy$.

4° L'ordonnée y de la courbe ne doit pas devenir infinie entre les limites de l'aire (n° 842).

5° L'élément ydx change de signe avec y ou x, d'où il suit que l'aire devient négative lorsque x ou y sont de signes contraires.

Lorsque la courbe coupe l'axe des x entre les limites de l'aire, il faut chercher chacune des deux parties et ajouter, parce que l'une est positive et l'autre négative, et que la somme demandée doit être obtenue sans avoir égard à ce dernier signe.

Par ex., la courbe $KACD$ (fig. 79) a pour équ. $y = x - x^3$, $AK = AI = 1$; l'origine est en A. L'aire $t = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}x^4 + c$; si elle doit commencer au point B pour lequel $AB = \sqrt{\frac{1}{3}}$, on trouve $c = -\frac{5}{36}$; d'où $t = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}x^4 - \frac{5}{36}$: et si l'aire doit être terminée en ED, où $AE = \sqrt{\frac{5}{3}}$, on trouve $t = 0$, ce qui indique seulement que les aires BCI, IED sont égales et de signes contraires. En effet, on voit aisément que $BCI = \frac{1}{9} = -DIE$. De même, l'aire prise depuis K jusqu'en I est nulle, parce que $ACI = \frac{1}{4} = -KOA$.

847. Pour donner une application de la formule (n° 769), $\tau' = \frac{1}{2}(xy' - y)$, qui sert à trouver l'aire τ comprise entre deux rayons vecteurs, cherchons l'aire CMO (fig. 73) dans l'ellipse ODO'; on a $a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$, $y' = -\dfrac{b^2x}{a^2y}$, d'où

$$\tau' = -\tfrac{1}{2}\left(\frac{b^2x^2}{a^2y} + y\right) = -\frac{b^2}{2y},\quad d\tau = -\frac{ab\,dx}{2\sqrt{(a^2 - x^2)}}.$$

Comme l'aire τ est comptée depuis un rayon fixe, tel que CO, jusqu'au rayon CM, le signe — provient de ce que x décroît quand τ croît (n° 742).

Mais la formule (n° 767) des rectifications, appliquée au cercle dont le rayon est a, donne pour longueur de son arc s, $ds = -\frac{adx}{\sqrt{(a^2 - x^2)}}$; d'où $d\tau = \frac{1}{2} bds$, et $\tau = \frac{1}{2} bs$, en prenant l'arc s entre les mêmes limites que τ, $x = CO$ et $x = CA$. Quand $b = a$, on a $\tau = \frac{1}{2} as$; ainsi

le secteur circulaire $BCO = \frac{1}{2} CO \times$ arc BO; et

le secteur elliptique $MCO = \frac{1}{2} b \times$ arc $BO = \frac{b}{a} \times OCB$.

Pour l'hyperbole MN (fig. 72), on a $xy = m^2$, d'où $\tau' = -y$ et $d\tau = -ydx$, $\tau = -\int ydx$: donc le secteur quelconque hyperbolique $CAM = CBPM$.

848. Lorsque les coordonnées sont polaires (fig. 45), on a (n° 769), $d\tau = \frac{1}{2} r^2 d\theta$. Ainsi, dans la spirale d'Archimède (n° 473), où $2\pi r = a\theta$, on trouve $\tau = \frac{\pi}{a} \int r^2 dr = \frac{\pi}{a} \cdot \frac{r^3}{3} + c$. Pour l'aire AIO formée par une révolution entière du rayon vecteur AM, il faut prendre l'intégrale depuis $r = 0$ jusqu'à $r = a$. On obtient $AIO = \frac{1}{3} \pi a^2 =$ le tiers du cercle dont le rayon est AI.

Remarquons que pour pouvoir étendre l'intégrale au delà de $\theta = 360°$, il faut avoir égard à ce que cette 2ᵉ aire contient celle qu'on vient d'obtenir, comme (n° 846, 5°).

849. Donnons quelques exemples de la formule (n° 767) des rectifications, $s = \int \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$.

I. Pour la parabole, $y^2 = 2px$ donne

$$ydy = pdx, \quad s = \int \frac{dy}{p} \sqrt{(y^2 + p^2)}.$$

Cette intégrale est (n° 813, p. 414)

$$s = c + \frac{y}{2p} \sqrt{(p^2 + y^2)} + \frac{1}{2} p \,\mathrm{l}\, [y + \sqrt{(p^2 + y^2)}].$$

Si l'arc s commence en A (fig. 71), $y = 0$ donne $s = 0$: on en tire $c = -\frac{1}{2} p^2 \mathrm{l}\, p$; donc

$$ACM = \frac{y\sqrt{(p^2 + y^2)}}{2p} + \frac{1}{2} p \,\mathrm{l} \left(\frac{y + \sqrt{(p^2 + y^2)}}{p} \right).$$

II. Pour la seconde parabole cubique $y^3 = ax^2$, on a

$$s = \int dy \sqrt{\left(1 + \frac{9y}{4a}\right)} = \tfrac{8}{27} a \sqrt{\left(1 + \frac{9y}{4a}\right)^3} + c.$$

En général, $y = ax^n$ représente toutes les paraboles ou les hyperboles, suivant que n est une fraction positive ou négative : on obtient $s = \int dx \sqrt{(1 + n^2a^2x^{2n-2})}$. Toutes les fois (n° 816) que $2(n - 1)$ est exactement contenu dans 1, ou que $\dfrac{1}{2(n-1)} + \frac{1}{2}$ est entier, on aura l'arc s sous forme finie.

III. Pour le cercle, suivant que l'origine est au centre ou à l'extrémité du diamètre, on a $y^2 = r^2 - x^2$, ou $y^2 = 2rx - x^2$. Dans ces deux cas, il vient $s = \int \dfrac{r dx}{y}$. En mettant pour y sa valeur en x, on voit que l'intégration ne peut s'effectuer que par séries (n° 840), ou par des arcs de cercle, ce qui ramène la question au point d'où l'on est parti.

IV. Pour l'ellipse, $a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$ donne

$$s = \int \frac{dx}{a} \sqrt{\left(\frac{a^4 - x^2\ (a^2 - b^2)}{a^2 - x^2}\right)} = \int dx\ \frac{\sqrt{(a^2 - e^2x^2)}}{\sqrt{(a^2 - x^2)}},$$

en faisant $ae = \sqrt{(a^2 - b^2)}$; e désigne le rapport de l'excentricité au demi-grand axe. On ne peut intégrer cette expression que par une série ; mais il faudra disposer le calcul de manière à la rendre convergente. Ainsi on pourra développer (n° 485, II), $\sqrt{(a^2 - e^2x^2)}$.

Ou bien on fera l'arc OB (fig. 73) du cercle circonscrit $= \theta$,

$$\text{d'où} \quad CA = x = a \cos\theta, \text{ et } \frac{dx}{\sqrt{(a^2 - x^2)}} = - d\theta,$$

puis $$s = - a \int d\theta \sqrt{(1 - e^2 \cos^2\theta)}.$$

On aura à intégrer une suite de termes de la forme $A \cos^{2m}\theta\, d\theta$ (n° 836) ; par là l'arc OM dépendra, à l'aide d'une série, de l'arc correspondant OB du cercle circonscrit.

La rectification de l'hyperbole offre un calcul semblable.

V. Dans la cycloïde (fig. 43), l'origine étant en F, on a (n° 763, VI)

$$y' = \sqrt{\frac{y}{2r - y}}, \quad s = \int \frac{\sqrt{2r}}{\sqrt{y}}\, dy = 2\sqrt{(2ry)}.$$

On n'ajoute pas de constante, lorsque l'arc s commence en F. Or $\sqrt{(2ry)} = KF$; donc $FM = 2$ fois la corde KF.

850. Si les coordonnées sont polaires (nº 769), on a

$$ds = \sqrt{(r^2 d\theta^2 + dr^2)}.$$

Ainsi, la spirale d'Archimède, ou $2\pi r = a\theta$, donne

$$s = \int \frac{2\pi dr}{a} \sqrt{\left(\frac{a}{4\pi^2} + r^2\right)}.$$

En comparant cette expression à celle de l'arc de parabole, on voit que les longueurs des arcs de ces courbes sont égales, lorsque r est l'ordonnée de la parabole, et $\frac{a}{\pi}$ le paramètre.

Dans la spirale logarithmique (nº 474), $\theta = 1r$; on trouve $s = \int dr\sqrt{2} = r\sqrt{2} + c$: si l'arc commence au pôle, $c = 0$, et l'on a $s = r\sqrt{2}$. Ainsi, quoique la courbe n'atteigne son pôle qu'après un nombre infini de révolutions, l'arc s est fini et égal à la diagonale du carré construit sur le rayon vecteur qui le termine.

Voyez, pour les courbes à double courbure, ce qu'on a dit nº 791.

Des aires et des volumes des Corps.

851. Le volume v et l'aire u d'un corps de révolution autour de l'axe des x s'obtiennent (nº 792) en intégrant

$$v = \int \pi y^2 dx, \quad u = \int 2\pi y ds = \int 2y\pi \sqrt{(dx^2 + dy^2)}.$$

Voici quelques applications de ces formules :

I. Pour l'ellipse, en recourant à la valeur de ds (nº 849, IV), on trouve

$$v = \frac{\pi b^2}{a^2} \int (a^2 - x^2) dx, \quad u = \frac{2\pi be}{a} \int \sqrt{\left(\frac{a^2}{e^2} - x^2\right)} dx.$$

La 1re donne $v = \pi b^2 \left(x - \frac{x^3}{3a^2} + c\right)$: si le sommet est une des limites, $c = -\frac{3}{2} a$. Soit donc z la hauteur du segment d'ellipsoïde, ou $x = a - z$, le volume $= \frac{\pi b^2 z^2}{3a^2}(3a - z)$. Pour l'el-

lipsoïde entier, $z = 2a$, et l'on a $\frac{4}{3}\pi b^2 a$. Il en résulte que, 1° le volume de la sphère $= \frac{4}{3}\pi a^3$; 2° l'ellipsoïde de révolution est à la sphère circonscrite :: $b^2 : a^2$; 3° chacun de ces corps est les $\frac{2}{3}$ du cylindre qui lui est circonscrit; 4° enfin le segment sphérique $= \pi z^2 (a - \frac{1}{3} z)$.

L'intégrale qui entre dans la valeur de u est visiblement l'aire d'une portion de cercle concentrique à l'ellipse comprise entre les mêmes limites que l'arc générateur, et dont le rayon est $\frac{a}{e}$. Soit z cette aire facile à obtenir; on aura $u = \frac{2\pi bez}{a}$.

S'il s'agit de la sphère, on a (n° 849, III), $ds = \frac{rdx}{y}$; d'où $u = \int 2\pi r dx$. On trouve aisément $2\pi rz$ pour la surface de la calotte ou de la zone dont z est la hauteur; et $4\pi r^2$ pour l'aire de la sphère entière.

II. Pour la parabole $y^2 = 2ax$, on trouve

$$v = \int 2\pi ax \,.\, dx = \pi ax^2 + c,$$

$$u = \int \frac{2\pi}{a} \cdot y dy \sqrt{(y^2 + a^2)} = \frac{2\pi}{3a} \left[\sqrt{(y^2 + a^2)^3} + C\right]:$$

si l'origine est au sommet, $c = 0$ et $C = -a^3$. On a donc ainsi le volume et l'aire d'un segment de paraboloïde de révolution.

II. Soit $y^m = ax^n$; on en tire

$$v = \int \pi \sqrt[m]{a^2} \cdot \sqrt[m]{x^{2n}} \,.\, dx = \frac{m\pi x}{m+2n} \sqrt[m]{(ax^n)^2} = \frac{m\pi xy^2}{m+2n}.$$

Ce calcul se rapporte aux paraboles et aux hyperboles, suivant que n est positif ou négatif.

852. Le volume V et l'aire U d'un corps sont donnés par les formules (n° 794)

$$V = \int\int z dx dy, \quad U = \int\int dx dy \sqrt{(1 + p^2 + q^2)}.$$

Voici comment on doit entendre ces doubles intégrales. Après avoir mis pour z, p et q leurs valeurs en x et en y, tirées de l'équ. de la surface proposée (n° 787), on intégrera, en regardant comme constant x ou y à volonté, suivant que l'une offrira des calculs plus

simples que l'autre. On aura ensuite égard aux limites que la question détermine.

Par ex., si l'aire U, qu'on demande, doit être comprise entre deux plans parallèles aux xz, $y=a$, $y=b$, et qu'on ait intégré par rapport à y, on prendra l'intégrale entre les limites a et b, x étant regardé comme constant. On aura ainsi l'aire MB (fig. 69) d'une tranche dont l'épaisseur est infiniment petite $= \mathrm{d}x$, terminée aux deux plans ME, SB, dont il s'agit. Cette 1[re] intégrale sera de la forme $\varphi x \,.\, \mathrm{d}x$, c'est-à-dire délivrée de y, mais contenant x. On intégrera de nouveau, relativement à x, depuis la plus petite jusqu'à la plus grande valeur de cette variable ; et l'on aura l'aire demandée, qu'on regarde comme la somme d'une série infinie de tranches semblables.

Si le corps est terminé latéralement par des surfaces courbes, on devra introduire, dans la 1[re] intégrale, des fonctions de x, pour les limites de y, en opérant d'une manière analogue au n° 846. Des exemples éclairciront tout ceci.

Pour la sphère (fig. 81), $x^2+y^2+z^2=r^2$; d'où

$$p=-\frac{x}{z},\quad q=-\frac{y}{z},\quad \sqrt{(1+p^2+q^2)}=\frac{r}{z}.$$

$$U=\iint\frac{r\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\sqrt{(r^2-x^2-y^2)}},\quad V=\iint\mathrm{d}x\mathrm{d}y\sqrt{r^2-x^2-y^2}.$$

On fera d'abord y constant, et $r^2-y^2=A^2$; d'où

$$U=\iint\frac{r\mathrm{d}x}{\sqrt{(A^2-x^2)}}\,\mathrm{d}y,\quad V=\iint\mathrm{d}x\mathrm{d}y\sqrt{(A^2-x^2)}.$$

Une 1[re] intégration donne, pour l'une, $r\mathrm{d}y \,.\, \text{arc}\left(\sin=\frac{x}{A}\right)$. Or, le plan xy coupe la sphère suivant un cercle Cy, dont l'équ. est $x^2+y^2=r^2$, et dans lequel l'abscisse $AF=\pm\sqrt{(r^2-y^2)}=\pm A$ est le rayon du cercle formé par le plan coupant DmC. Si donc on prend cette intégrale depuis $x=-A$ jusqu'à $x=+A$, on aura l'aire infiniment étroite DmC d'une bande parallèle aux xz, et tracée sur l'hémisphère supérieur.

Faisons donc $x=-A$ et $x=+A$ dans notre arc ci-dessus, puis retranchant le 1[er] résultat du 2[e], nous aurons $\pi r\mathrm{d}y$, parce que l'arc dont le sinus $=1$, est $\frac{1}{2}\pi$. Intégrons par rapport à y, qu'on a

prise pour constante ; nous aurons πry pour 2e intégrale, et les limites étant $-r$ et r, qui sont la plus petite et la plus grande valeur de y, $2\pi r^2$ sera l'aire de l'hémisphère supérieur.

Disons-en autant pour le volume V (p. 421),

$$\int \sqrt{(A^2 - x^2)}\,dx = \tfrac{1}{2} x \sqrt{(A^2 - x^2)} + \tfrac{1}{2} A^2 \operatorname{arc}\left(\sin = \frac{x}{A}\right).$$

Prenons les limites $-A$ et $+A$, comme ci-dessus ; le 1er terme disparaît, et l'on a $\frac{1}{2}\pi A^2$. Il faut donc intégrer de nouveau $\frac{1}{2}\pi(r^2 - y^2)\,dy$, qui représente le volume de la tranche $DmCE$; et l'on a $\frac{1}{2}\pi(r^2y - \frac{1}{3}y^3)$, qui revient à $V = \frac{2}{3}\pi r^3$ entre les limites $-r$ et $+r$. C'est le volume de la demi-sphère.

L'élément du volume V est $dxdydz$: on intègre d'abord par rapport à z, depuis le z de la surface inférieure, qui limite le corps, jusqu'au z de la surface supérieure : ainsi, l'on met dans $zdxdy$ ces deux valeurs de z en fonction de x et y, telles qu'on les tire des équ. de ces deux surfaces : on a ainsi le parallélipipède compris entre elles, et élevé sur la base $dxdy$. On intègre ensuite relativement à x, pour former la somme de tous les prismes qui composent une tranche dont dy est l'épaisseur, et qui est comprise entre deux plans parallèles aux xz. Supposons que le volume V soit compris dans un cylindre MNg (fig. 82), élevé sur une base donnée mng, les limites de cette 2e intégrale résultent d'une section quelconque Pmn, faite dans le corps par un plan perpend. aux y : ainsi l'on prendra l'intégrale depuis $x = Pm$ jusqu'à $x = Pn$, valeurs qu'on tire en fonction de y de l'équ. de la courbe $mfng$, base de notre cylindre. Soient $x = fy$ et $x = Fy$ ces valeurs ; on les mettra successivement pour x dans l'intégrale, et l'on retranchera les résultats l'un de l'autre. Il ne restera plus qu'à intégrer une fonction de y, depuis la moindre valeur AB de y jusqu'à la plus grande AC, valeurs qu'on tire encore de l'équ. de la base fng.

Cherchons, par ex., le volume du cône droit. Prenons son axe pour celui des y, et le sommet pour origine : l'équ. est (no 661) $l^2y^2 = z^2 + x^2$, l étant la tang. de l'angle formé par l'axe et les génératrices. Or, $zdxdy$ devient $2\sqrt{(l^2y^2 - x^2)}dxdy$, depuis le z inférieur jusqu'au supérieur, puisque $z = \pm\sqrt{(l^2y^2 - x^2)}$. L'intégrale relative à x a été donnée ci-dessus et p. 416, savoir,

$$x\sqrt{(l^2y^2 - x^2)} + 2l^2y^2 \cdot \operatorname{arc}\left(\operatorname{tang} = \sqrt{\frac{ly + x}{ly - x}}\right) + c.$$

Comme en faisant $z = 0$, l'équ. du cône donne $x = \pm ly$ pour les limites du corps, il faut changer ici x en $-ly$ (ce qui donne zéro), puis en $+ly$ [d'où $2l^2y^2$. arc (tang $= \infty$) $= \pi l^2y^2$] ; il vient, en retranchant, πl^2y^2dy, qu'il faut intégrer depuis $y = 0$, ou le sommet, jusqu'à $y = h$, qui répond à la base. Donc enfin le volume du cône droit est $\frac{1}{3}\pi l^2h^3$, ce qui revient au théorème connu.

De même, si les limites de l'aire sont déterminées par une courbe *FMNG* tracée sur la surface dont il s'agit, on cherchera sa projection *fg* sur le plan xy (nº 656), qui déterminera un cylindre droit, pour lequel on raisonnera précisément de la même manière. On intégrera donc $dxdy\sqrt{(1+p^2+q^2)}$ entre les limites ci-dessus désignées.

En voici un exemple :

Soient tracées, sur le plan xy, les deux paraboles égales et opposées *FAE*, *F'AE'* (fig. 80), dont $y^2 = nx$, $y^2 = -nx$ sont les équ. ; puis la parallèle *FF'* à l'axe des x, *AC* étant $= b$. De plus, concevons un cône droit à base circulaire, dont le sommet serait à l'origine *A*, et qui aurait pour axe celui des z, l'équ. étant $z = k\sqrt{(x^2+y^2)}$, (nº 661). On demande de trouver l'aire du cône comprise dans le cylindre droit élevé sur *AMFF'M'*. L'équ. du cône donne

$$p = \frac{kx}{\sqrt{(x^2+y^2)}},\quad q = \frac{ky}{\sqrt{(x^2+y^2)}},\quad 1+p^2+q^2 = 1+k^2\,;$$

l'élément de l'aire du cône est $\sqrt{(1+k^2)}\,dxdy$, sa projection est en m. L'intégrale relative à x est $\sqrt{(1+k^2)}\,xdy$, qu'il faut prendre depuis M' jusqu'en M, et l'on aura l'aire de la bande infiniment étroite qui est projetée en MM'. Or, les équ. des paraboles donnent, pour les abscisses des points M' et M, limites de l'intégrale,

$$x = -\frac{y^2}{n},\quad x = +\frac{y^2}{n};\quad \text{d'où}\quad \frac{2y^2}{n}\sqrt{(1+k^2)}\,dy.$$

Opérant maintenant pour y sur cette 1re intégrale, il vient $\frac{2y^3}{3n}\sqrt{(1+k^2)}$, qu'il faut prendre de *A* en *C*, c'est-à-dire depuis $y = 0$ jusqu'à $y = b$. On obtient, pour l'aire demandée, $\frac{2b^3}{3n}\sqrt{(1+k^2)}$.

L'application de ces principes à la recherche des centres de gravité et des moments d'inertie est surtout remarquable (*voy.* ma *Mécanique*, nos 64 et 241).

CHAPITRE IV.

INTÉGRATION DES ÉQUATIONS ENTRE DEUX VARIABLES.

Séparation des Variables; Équations homogènes.

853. Intégrons les équ. du 1er ordre entre deux variables.

Soit proposée l'équ. différentielle $M\mathrm{d}y + N\mathrm{d}x = 0$, qui est du 1er ordre entre les deux variables x et y. Il est clair que si elles ne sont pas mêlées, en sorte que M ne contienne pas x, et que N soit sans y, l'intégrale de l'équ. sera la somme des intégrales qu'on trouvera par les principes antérieurs,

$$\int M\mathrm{d}y + \int N\mathrm{d}x = \text{const.}$$

Il en sera de même de toute équ. dont on pourra *séparer* les variables. Le cas le plus simple est celui où M est fonction de x, et N de y seulement ; car, divisant l'équation par MN, on a

$$\frac{\mathrm{d}y}{N} + \frac{\mathrm{d}x}{M} = 0.$$

C'est ainsi que $\quad \mathrm{d}x\sqrt{(1+y^2)} - x\mathrm{d}y = 0.$

donne $$\frac{\mathrm{d}x}{x} = \frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{(1+y^2)}};\ \text{d'où (n° 813)}$$

$$\mathrm{l}(cx) = \mathrm{l}[y + \sqrt{(1+y^2)}], \quad \text{et} \quad cx = y + \sqrt{(1+y^2)}.$$

854. Si $M = XY$, $N = X_{,}Y_{,}$, X et $X_{,}$ étant des fonctions de x, Y et $Y_{,}$ des fonctions de y, on a $XY\mathrm{d}y + X_{,}Y_{,}\mathrm{d}x = 0$, qui donne, en divisant par $XY_{,}$,

$$\frac{Y}{Y_{,}}\mathrm{d}y + \frac{X_{,}}{X}\mathrm{d}x = 0.$$

855. La séparation des variables est encore possible dans les équ. *homogènes* (n° 322) par rapport à x et y. Soit m le degré de

chaque terme Ay^kx^h, ou $m = h + k$; en divisant l'équ. par x^m, le terme Ay^kx^h devient $A\left(\frac{y}{x}\right)^k = Az^k$, en faisant $y = xz$. On voit donc que M et N deviendront des fonctions de z seul, en sorte que si l'on divise par M l'équation $Mdy + Ndx = 0$, on aura $dy + Zdx = 0$. Mais $y = xz$ donne $dy = xdz + zdx$, donc $xdz + (z + Z)\,dx = 0$; d'où

$$\frac{dx}{x} + \frac{dz}{z + Z} = 0, \quad \text{et} \quad lx + \int \frac{dz}{z + Z} = 0.$$

I. Prenons, pour 1[er] ex., $(ax + by)\,dy + (fx + gy)\,dx = 0$. Divisons par $ax + by$; nous trouverons

$$dy + \frac{f + gz}{a + bz}\,dx = 0, \quad \text{d'où} \quad \frac{dx}{x} + \frac{(a + bz)\,dz}{bz^2 + (a + g)\,z + f} = 0,$$

équ. facile à intégrer. Il faudra ensuite substituer $\frac{y}{x}$ pour z.

C'est ainsi que $ydy + (x + 2y)\,dx = 0$, à cause de $a = 0$, $b = f = 1$, $g = 2$, donne $\frac{dx}{x} + \frac{zdz}{z^2 + 2z + 1} = 0$; on ajoute dz au numérateur du 2[e] terme, qui devient $\frac{dz\,(1 + z)}{(1 + z)^2}$ ou $\frac{dz}{1 + z}$. On a donc à intégrer

$$\frac{dx}{x} + \frac{dz}{1 + z} - \frac{dz}{(1 + z)^2} = 0;$$

d'où
$$l(cx) + l(1 + z) + \frac{1}{1 + z} = 0,$$

ou
$$l\,.\,c\,(x + xz) = \frac{-1}{1 + z}, \quad lc\,(x + y) + \frac{x}{x + y} = 0.$$

II. Pour $ay^m dy + (x^m + by^m)\,dx = 0$, on a

$$dy + \frac{1 + bz^m}{az^m}\,dx = 0, \quad \frac{dx}{x} + \frac{az^m dz}{az^{m+1} + bz^m + 1} = 0.$$

III. Soit $xdy - ydx = dx\sqrt{(x^2 + y^2)}$; posant $y = xz$, et divisant par x, on trouve

$$dy - zdx = dx\sqrt{(1 + z^2)}, \quad \text{d'où} \quad \frac{dx}{x} = \frac{dz}{\sqrt{(1 + z^2)}},$$

dont l'intégrale (n° 813) est $x = cz + c\sqrt{(1+z^2)}$, ou . . . . $x^2 = cy + c\sqrt{(x^2+y^2)}$, qu'on réduit à $x^2 = 2cy + c^2$, en transposant cy et élevant au carré.

IV. Quelle est la courbe dont l'aire $BCMP$ (fig. 71) est égale au cube de l'ordonnée PM, qui la termine, divisé par l'abscisse ; et cela pour chacun de ses points, à partir d'une ordonnée fixe BC?

De $\int y\,dx = \frac{y^3}{x}$, on tire, en différentiant, $(x^2y + y^3)\,dx = 3xy^2dy$; faisant $y = zx$, on trouve (p. 408) $\frac{dx}{x} = \frac{3zdz}{1-2z^2}$, ... d'où $x^4(1-2z^2)^3 = c$, puis enfin

$$(x^2 - 2y^2)^3 = cx^2.$$

856. Toute équation qu'on pourra rendre homogène sera donc intégrable. Ainsi pour

$$(ax+by+c)\,dy + (mx+ny+p)\,dx = 0,$$

on fait $\quad ax+by+c = z \qquad mx+ny+p = t,$

d'où $\quad adx + bdy = dz \qquad mdx + ndy = dt;$

puis $\quad dy = \frac{mdz - adt}{mb - na}, \quad dx = \frac{bdt - ndz}{mb - na};$

la proposée devient homogène,

$$zdy + tdx = 0, \text{ ou } (mz - nt)\,dz + (bt - az)\,dt = 0.$$

Quand $mb - na = 0$, ce calcul cesse d'être possible, mais alors $m = \frac{na}{b}$, et la proposée est

$$bcdy + bpdx + (ax+by)(bdy + ndx) = 0,$$

dont on sépare les variables en faisant $ax + by = v$; on substitue cette valeur, et $dy = \frac{dv - adx}{b}$, etc.

857. Prenons l'équation *linéaire*, ou du 1er degré en y,

$$dy + Pydx = Qdx,$$

P et Q étant des fonctions de x; on fera $y = zt$, d'où

$$zdt + tdz + Pztdx = Qdx;$$

dans l'équ. $y = zt$, z et t sont des fonctions de x, dont l'une est visiblement arbitraire; on peut donc la déterminer en égalant à zéro le coefficient de z; donc

$$dt + Ptdx = 0, \quad tdz = Qdx.$$

La 1re donne $\frac{dt}{t} = -Pdx$, d'où $lt = -\int Pdx$, et comme Pdx ne contient pas y, l'intégrale u de Pdx est facile à trouver. On a donc

$$lt = -u + a, \quad \text{ou} \quad t = e^{-u+a} = e^a e^{-u}.$$

L'équ. $tdz = Qdx$, devient $e^a dz = Qe^u dx$; d'où

$$e^a z = \int Qe^u dx + c,$$

Q et u sont des fonctions connues de x, et l'intégrale $\int Qe^u dx$ étant obtenue, on remettra pour z sa valeur $\frac{y}{t}$ ou ye^{u-a}, ce qui donnera enfin l'intégrale demandée

$$ye^u = \int Qe^u dx + c, \quad \text{équ. où } u = \int Pdx.$$

Il suit de ce calcul, qu'il est inutile d'ajouter une constante a à l'intégrale $\int Pdx = u$.

Soit, par exemple, $dy + ydx = ax^3dx$; on a

$$P = 1, \quad Q = ax^3, \quad u = \int Pdx = x,$$

$$\int Qe^u dx = \int ax^3 e^x dx = ae^x(x^3 - 3x^2 + 6x - 6);$$

donc $$y = ce^{-x} + a(x^3 - 3x^2 + 6x - 6).$$

Pour l'équ. $(1 + x^2)dy - yxdx = adx$, on a

$$P = \frac{-x}{1 + x^2}, \quad Q = \frac{a}{1 + x^2}, \quad u = -\int \frac{xdx}{1 + x^2} = -l\sqrt{(1 + x^2)};$$

donc $e^u = (1 + x^2)^{-\frac{1}{2}}$ (*voy.* nº 149, 12º);

$$\int Qe^u dx = \int \frac{adx}{(1 + x^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{ax}{\sqrt{(1 + x^2)}} + c \text{ (page 419)};$$

enfin $$y = ax + c\sqrt{(1 + x^2)}.$$

858. Traitons enfin *l'éq.* de *Riccati*, ainsi nommée parce que ce savant s'en est le premier occupé ;

$$dy + by^2dx = a^m dx;$$

1° Si $m = 0$, on a (p. 204)

$$\frac{dy}{a - by^2} = dx = \frac{1}{2\sqrt{a}}\left(\frac{dy}{\sqrt{a} + y\sqrt{b}} + \frac{dy}{\sqrt{a} - y\sqrt{b}}\right)$$

donc $2x\sqrt{(ab)} + c = l(\sqrt{a} + y\sqrt{b}) - l(\sqrt{a} - y\sqrt{b})$.

2° Quand m n'est pas nul, on pose $y = b^{-1}x^{-1} + zx^{-2}$, et l'on trouve

$$x^2dz + bz^2dx = ax^{m+4}dx,$$

transformée homogène si $m = -2$, et qu'on intègre en séparant les variables, quand $m = -4$.

3° Dans tout autre cas, soit fait $z = t^{-1}$, $x^{m+3} = u$, puis

$$n = -\frac{m+4}{m+3}, \quad b' = \frac{a}{m+3}, \quad a' = \frac{b}{m+3},$$

et l'on a cette équ. semblable à la proposée,

$$dt + b't^2du = a'u^n\,du;$$

on pourra donc la traiter comme ci-dessus, et l'intégrer lorsque n sera -2 ou -4.

Et si n n'est pas -2 ou -4, en effectuant une transformation semblable, et continuant de proche en proche, selon les mêmes procédés, on sera ramené à des équ. de mêmes formes que la proposée, ayant pour la variable, dans le 2e membre, un exposant successivement $= -\dfrac{m+4}{m+3}$, $-\dfrac{n+4}{n+3}$, $-\dfrac{p+4}{p+3}$, c'est-à-dire que cet exposant est

$$= -\frac{m+4}{m+3}, \quad -\frac{3m+8}{2m+5}, \quad -\frac{5m+12}{3m+7}, \quad -\frac{7m+16}{4m+9} \ldots$$

Que l'une de ces fractions soit nulle, ou -2, ou -4, l'intégrale sera facile à trouver ; savoir, $m = \dfrac{-4i}{2i-1}$, i étant un entier quelconque, positif, ou zéro.

Si l'on eût commencé par faire $y = t^{-1}$, $x^{m+1} = z$, dans la proposée, le même calcul aurait conduit à trouver que l'intégration est possible lorsque $m = \frac{-4i}{2i+1}$; ainsi $m = \frac{-4i}{2i \pm 1}$ est la condition d'intégrabilité de l'équ. de Riccati.

Du Facteur propre à rendre intégrable.

859. L'équ. $Mdy + Ndx = 0$ ne résulte pas toujours immédiatement de la différentiation d'une équ. $f(x, y) = 0$; car on a pu, après ce calcul, multiplier ou diviser toute l'équ. par une fonction quelconque, ou en éliminer une constante (nº 727) à l'aide de $f(x,y) = 0$, ou enfin faire telle combinaison qu'on voudra de ces équ. entre elles. L'équ. proposée peut donc ne pas être une *différentielle exacte.*

En général, soit $u = f(x,y)$, la différentielle étant $du = Mdy + Ndx$, la relation $\frac{d^2u}{dxdy} = \frac{d^2u}{dydx}$ devient ici

$$\frac{dM}{dx} = \frac{dN}{dy}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Ainsi, *toutes les fois que* Mdy + Ndx *est une différentielle exacte, la condition* (1) *doit être remplie. Réciproquement, si* M *et* N *satisfont à la condition* (1) Mdy + Ndx *est une différentielle exacte qu'il sera toujours possible d'intégrer.*

Pour démontrer cette réciproque, intégrons Mdy en regardant x comme constant, et soit P l'intégrale, fonction connue de x et y, résultant de $\int Mdy$, relative à y seul, ou $M = \frac{dP}{dy}$. Prenant pour la constante arbitraire une quantité X, qui pourra contenir x, nous aurons $P + X$ pour l'intégrale de Mdy relative à y. Prouvons que $P + X$ est l'intégrale de $Mdy + Ndx$, quand l'éq. (1) a lieu.

La différentielle complète de $P + X$ est

$$\frac{dP}{dx}dx + \frac{dP}{dy}dy + dX \quad \text{ou} \quad \frac{dP}{dx}dx + Mdy + dX;$$

d'où l'on doit conclure que $P + X$ sera l'intégrale de $Mdy + Ndx$ (qui sera par conséquent une différentielle exacte), si l'on peut

déterminer X de sorte que ce trinôme soit $= M\mathrm{d}y + N\mathrm{d}x$, ou

$$N\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x + \mathrm{d}X, \quad \text{ou} \quad \mathrm{d}X = \left(N - \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x}\right)\mathrm{d}x \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Or, en différentiant $M = \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}y}$ par rapport à x, on trouve, en vertu de la condition supposée (1),

$$\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}^2P}{\mathrm{d}y\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}y}, \quad \text{ou} \quad \frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}y} - \frac{\mathrm{d}^2P}{\mathrm{d}y\mathrm{d}x} = 0,$$

ou $\quad 0 = \mathrm{d}\left(N - \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x}\right)$, relative à y; $N - \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x}$ est donc une fonction de x, ce qu'il s'agissait de démontrer.

L'intégrale cherchée est donc $P + X$, P étant celle de $M\mathrm{d}y$ par rapport à y seul, et X l'intégrale de la fonction de x donnée par l'équ. (2). Nous avons donc démontré notre réciproque en même temps que nous avons donné un procédé d'intégration de $M\mathrm{d}y + N\mathrm{d}x$.

Il est inutile de dire qu'on peut également commencer par intégrer $N\mathrm{d}x$, y étant constant, et compléter l'intégrale par une fonction Y de y, etc.... On préférera celle de ces deux voies qui facilitera davantage le calcul.

I. Soit proposé d'intégrer $\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(1+x^2)}} + a\mathrm{d}x + 2by\mathrm{d}y$, où

$$M = 2by, \quad N = \frac{1}{\sqrt{(1+x^2)}} + a:$$

on trouve $P = by^2$; ainsi $by^2 + X$ est l'intégrale cherchée, puisque la condition (1) est remplie. La différentielle de $by^2 + X$ relative à x, comparée à $N\mathrm{d}x$, donne (p. 414)

$$\mathrm{d}X = \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(1+x^2)}} + a\mathrm{d}x, \text{ d'où } X = ax + \mathrm{l}\,.\,c\left[x + \sqrt{(1+x^2)}\right];$$

donc, on a $by^2 + ax + \mathrm{l}\,.\,c\left[x + \sqrt{(1+x^2)}\right]$.

II. De même pour

$$\frac{a(x\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y)}{\sqrt{(x^2+y^2)}} + \frac{y\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y}{x^2+y^2} + 3by^2\mathrm{d}y,$$

$$M = \frac{ay}{\sqrt{(x^2+y^2)}} - \frac{x}{x^2+y^2} + 3by^2,$$

$$N = \frac{ax}{\sqrt{(x^2+y^2)}} + \frac{y}{x^2+y^2}.$$

Après avoir reconnu que l'équ. (1) est satisfaite, on intégrera $N\mathrm{d}x$ par rapport à x; on trouvera

$$a\sqrt{(x^2+y^2)}+\text{arc}\left(\text{tang}=\frac{x}{y}\right)+Y,$$

en désignant par Y une fonction de y. Différentiant cette expression par rapport à y, et comparant à $M\mathrm{d}y$, on aura $\mathrm{d}Y=3by^2\mathrm{d}y$, d'où $Y=by^3+c$. Ainsi l'intégrale est obtenue complétement. En faisant $a=b=0$, on trouve

$$\int\frac{y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y}{x^2+y^2}=\text{arc}\left(\text{tang}=\frac{x}{y}\right)+c.$$

Cette intégrale, employée par M. Laplace (*Mécan. cél.*, t. I, p. 6), est un cas particulier de la précédente.

III. On trouvera de même

$$\int\frac{\mathrm{d}x\left[x+\sqrt{(x^2+y^2)}\right]+y\mathrm{d}y}{\left[x+\sqrt{(x^2+y^2)}\right]\sqrt{(x^2+y^2)}}=\mathrm{l}\,.\,c\left[x+\sqrt{(x^2+y^2)}\right].$$

860. Quand $M\mathrm{d}y+N\mathrm{d}x$ ne satisfait pas à la condition d'intégrabilité, on peut se proposer de trouver si, en multipliant cette expression par une fonction z de x et y, elle pourrait devenir une différentielle exacte. $M\mathrm{d}y+N\mathrm{d}x=0$ résulte de l'élimination d'une constante entre la primitive $f(x, y, c)=0$, et sa différentielle immédiate. Mettons ces équations sous la forme $y'+K=0$, $c=\varphi(x,y)$, ce qui est permis; K représente une fonction quelconque de x et y. La dérivée de $c=\varphi(x, y)$ étant $\varphi'=Py'+Q=0$, on a $y'+\frac{Q}{P}=0$, et, comme la constante c n'entre plus ici, cette expression (n° 727) est identique avec $y'+K$, ou

$$y'+K=\frac{Py'+Q}{P}=\frac{\varphi'}{P}; \quad \text{on a} \quad \varphi'=P(y'+K);$$

comme ces deux membres sont identiques, et que φ' est une dérivée exacte, $P(y'+K)$ doit également en être une, ce qui prouve qu'*il y a toujours un facteur* P *propre à rendre intégrable la fonction* y' + K, *ainsi que toute équation différentielle du premier ordre entre* x *et* y.

Cherchons ce facteur, que nous représenterons par z.

$Mz\mathrm{d}y+Nz\mathrm{d}x$ ne peut être différentielle exacte qu'autant que

$$\frac{\mathrm{d}(Mz)}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}(Nz)}{\mathrm{d}y}, \text{ ou } z\left(\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}x}-\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}y}\right)=N\,.\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}-M\,.\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\ldots \quad (3)$$

Cette équ. aux différentielles partielles est rarement utile à cause de la difficulté des calculs ; mais on peut en tirer quelques propriétés remarquables.

1° Si l'intégrale u de $z\,(M\mathrm{d}y + N\mathrm{d}x)$ était connue, le facteur z serait facile à trouver ; car en comparant $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x + \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}y$ avec $z(M\mathrm{d}y + N\mathrm{d}x)$, qui lui est identique, on en tirerait aisément z.

2° Multipliant l'équ. $\mathrm{d}u = z\,(M\mathrm{d}y + N\mathrm{d}x)$ par une fonction quelconque de u, telle que φu, nous avons

$$\varphi u\,.\,\mathrm{d}u = z\,.\,\varphi u\,(M\mathrm{d}y + N\mathrm{d}x).$$

Or, le premier membre étant une différentielle exacte, le deuxième, qui lui est identique, doit jouir de la même propriété ; d'où il suit qu'il y a une infinité de facteurs $z\,.\,\varphi u$ propres à rendre intégrable toute fonction de x et de y, et que la connaissance de l'un d'entre eux z suffit pour en obtenir un nombre infini d'autres $z\,.\,\varphi u$.

3° Si le facteur z ne contient que l'une des variables x ou y, on le trouve aisément ; car soit z fonction de x seul, l'équ. (3) se réduit à

$$\frac{\mathrm{d}z}{z} = \frac{\mathrm{d}x}{M}\left(\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}y} - \frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}x}\right), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

parce que $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y} = 0$, et que $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$ n'est plus une différence partielle. L'intégration de cette équ. donnera z ; car l'hypothèse exige que le 2ᵉ membre soit indépendant de y ; on reconnaîtra même à ce caractère si la supposition est légitime.

De même, si z est fonction de y seul, on a

$$\frac{\mathrm{d}z}{z} = \frac{\mathrm{d}y}{N}\left(\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}x} - \frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}y}\right), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

et le 2ᵉ membre doit être indépendant de x. On remarque dans les équ. (4) et (5) que la partie renfermée dans les parenthèses est nulle, lorsque $M\mathrm{d}y + N\mathrm{d}x$ est une différentielle exacte.

I. Soit, par exemple, $\mathrm{d}x + (a\mathrm{d}x + 2by\mathrm{d}y)\sqrt{(1+x^2)} = 0$; la condition d'intégrabilité n'est pas remplie, puisque

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}y} - \frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}x} = -\frac{2byx}{\sqrt{(1+x^2)}}\,;$$

mais cette quantité, divisée par M ou $2by\sqrt{(1+x^2)}$, donne pour quotient cette fonction de x, $\frac{-x}{1+x^2}$; donc l'équ. sera rendue intégrable par un facteur fonction de x. L'équation (4) donne

$$\mathrm{l}z = \int \frac{-x\mathrm{d}x}{1+x^2} = -\tfrac{1}{2}\mathrm{l}(1+x^2) = -\mathrm{l}\sqrt{(1+x^2)}.$$

Donc $z = \frac{1}{\sqrt{(1+x^2)}}$. La proposée prend alors la forme qu'on a traitée n° 859, I.

II. L'équ. linéaire $\mathrm{d}y + Py\mathrm{d}x = Q\mathrm{d}x$ donne $\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}y} - \frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}x} = P$, aussi la condition (1) n'a pas lieu ; mais cette fonction P, divisée par $M=1$, donne une fonction de x; ainsi $\frac{\mathrm{d}z}{z} = P\mathrm{d}x$, d'où $\mathrm{l}z = \int P\mathrm{d}x = u$, et $z = e^u$. Tel est le facteur qui rend la proposée intégrable. Elle devient $e^u\mathrm{d}y + e^u(Py - Q)\,\mathrm{d}x = 0$; il ne s'agit plus que de suivre le procédé du n° 859. Intégrant $e^u\mathrm{d}y$ par rapport à y, on a $e^u y + X$, dont la différentielle relative à x, comparée à $e^u(Py - Q)\,\mathrm{d}x$, donne $\mathrm{d}X = -e^u Q\mathrm{d}x$; donc l'intégrale cherchée est, comme on le sait déjà (n° 857),

$$e^u y = \int Qe^u\mathrm{d}x + c, \quad \text{équ. où } u = \int P\mathrm{d}x.$$

III. De même, $x^3\mathrm{d}y + \left(4x^2y - \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)}}\right)\mathrm{d}x = 0$, donne $\mathrm{l}z = \mathrm{l}x$; ainsi, il faut multiplier la proposée par x pour qu'elle soit intégrable. On trouve enfin, pour intégrale,

$$x^4y + \sqrt{(1-x^2)} = c.$$

IV. Le facteur propre à rendre intégrables les fonctions homogènes se trouve aisément. Soit m le degré (n° 322) d'une telle fonction F des variables $x, y \ldots$; si on les remplace par $lx, ly \ldots,$ l étant un nombre quelconque, F deviendra l^mF; faisant $l = 1+h$, F devient donc

$$(1+h)^m F = F[1 + mh + \tfrac{1}{2}m(m-1)h^2 \ldots].$$

D'un autre côté, $x, y \ldots$ sont devenus $x + hx$, $y + hy \ldots$, et

la fonction F de $(x+hx)$, $(y+hy)\ldots$ se développe suivant le théorème (n° 743),

$$F+\frac{dF}{dx}hx+\frac{dF}{dy}hy+\frac{d^2F}{dx^2}\frac{h^2x^2}{2}+\frac{d^2F}{dxdy}h^2xy+\frac{d^2F}{dy^2}\frac{h^2y^2}{2}\ldots$$

Comparant les puissances semblables de h, dans ces deux développements, on trouve

$$mF=\frac{dF}{dx}x+\frac{dF}{dy}y\ldots,$$

$$m(m-1)F=\frac{d^2F}{dx^2}x^2+\frac{d^2F}{dxdy}2xy+\frac{d^2F}{dy^2}y^2+\ldots$$

861. Pour appliquer ce théorème à $Mdy+Ndx$, M et N étant homogènes du degré p, cherchons s'il existe un facteur homogène z, qui rende $zMdy+zNdx$ une différentielle exacte; soit n le degré de z. Comme Nz est homogène du degré $p+n$, la propriété ci-dessus donne

$$(p+n)Nz=x\frac{d(Nz)}{dx}+y\frac{d(Nz)}{dy};$$

or, on suppose $$\frac{d(Mz)}{dx}=\frac{d(Nz)}{dy};$$

en substituant dans la précédente pour ce dernier terme sa valeur, il vient

$$(p+n)Nz=x\frac{d(Nz)}{dx}+\frac{d(Myz)}{dx}=\frac{d(Nxz+Myz)}{dx}-Nz,$$

ou $$(p+n+1)Nz=\frac{d[z(My+Nx)]}{dx}:$$

cette équation est satisfaite, en faisant $z=\frac{1}{My+Nx}$; car alors le degré n de z est $=-p-1$, d'où $p+n+1=0$. Donc $\frac{Mdy+Ndx}{My+Nx}$ est intégrable; l'intégration ne présente plus ensuite de difficulté (n° 859).

On trouve que $xdy-dx[y+\sqrt{(x^2+y^2)}]=0$, doit être divisé par $x\sqrt{(x^2+y^2)}$; intégrant $\frac{dy}{\sqrt{(x^2+y^2)}}$, par rapport à y, on a

$l\,[y+\sqrt{(x^2+y^2)}]$ (n° 813); ajoutant X, différentiant par rapport à x, et comparant, il vient

$$dX = -dx\left(\frac{y+\sqrt{(x^2+y^2)}}{x\sqrt{(x^2+y^2)}} + \frac{x}{\sqrt{(x^2+y^2)}\,[y+\sqrt{(x^2+y^2)}]}\right)$$

$$= -2dx\left(\frac{x^2+y^2+y\sqrt{(x^2+y^2)}}{x\sqrt{(x^2+y^2)}\,[y+\sqrt{(x^2+y^2)}]}\right) = -\frac{2dx}{x},$$

ainsi, $X = lc - lx^2$, et l'intégrale cherchée est

$$cy + c\sqrt{(x^2+y^2)} = x^2,$$

comme n° 855, III.

862. On a quelquefois besoin de différentier, relativement à y, des fonctions qui, telles que $u = \int M dx$, sont affectées du signe d'intégration par rapport à x; on différentie alors sous le signe $\int$. En effet, puisqu'on a

$$\frac{du}{dx} = M, \quad \frac{d^2u}{dydx} = \frac{d^2u}{dxdy} = \frac{dM}{dy};$$

et intégrant par rapport à x, on trouve $\dfrac{du}{dy} = \displaystyle\int \frac{dM}{dy}\,dx.$

Sur les Solutions singulières ou particulières.

863. Soit proposée une équ. différentielle $V = 0$, qui ait pour intégrale complète $f(x, y, c) = 0$, c étant la constante arbitraire. La différentielle immédiate de cette équation sera $Pdy + Qdx = 0$; la proposée doit résulter de l'élimination de c entre ces deux dernières (n° 727). Tant que celles-ci demeurent les mêmes, on doit retomber sur la proposée $V = 0$, par l'élimination de c, quelque grandeur qu'on prenne pour c, dans l'une et l'autre, quand même c serait une fonction de x et y : cela est évident. Différentiant $f = 0$ par rapport à x, y et c, on a

$$Pdy + Qdx + Cdc = 0,$$

qui se réduit à $Pdy + Qdx = 0$, en posant $Cdc = 0$; donc, toute valeur de c qui satisfait à cette condition, change $f = 0$ en une équation $S = 0$, telle que sa différentielle est encore $Pdy + Qdx = 0$: l'élimination de c entre les équ. $Cdc = 0$, $f = 0$ redonnera la pro-

posée $V=0$; donc $S=0$ est une relation entre x et y qui satisfait à l'équ. $V=0$, et en est une intégrale.

$Cdc=0$ donne

1° $dc=0$, $c=$ const., et la fonction f reste la même.

2° $C=0$ peut donner une valeur constante et déterminée de c; $f=0$ devient alors une *intégrale particulière,* qui n'offre rien de remarquable : c'est un cas renfermé dans le précédent, où l'on a pris pour c un nombre désigné.

3° C ne contient pas c, quand c n'est dans f qu'au 1[er] degré; alors on ne doit pas poser $C=0$, cette équ. ne pouvant donner de valeur de c; ou plutôt $C=0$ donne une intégrale particulière, qui répond à c infini.

4° $C=0$, ou $\frac{df}{dc}=0$, peut donner pour c une fonction variable, $c=\varphi(x, y)$; φ étant substituée à c dans $f=0$, on aura une équ. $S=0$, dont la différentielle sera encore $Pdy+Qdx=0$, en éliminant φ.

En général, S n'est pas compris dans $f(x,y,c)$, puisque c ne peut y recevoir que des valeurs constantes, tandis que c est devenu variable. L'équ. $S=0$, qui ne renferme pas de constante arbitraire, offre donc une relation entre x et y, qui satisfait à la proposée $V=0$, quoique n'étant pas comprise dans son intégrale générale. C'est ce qu'on nomme une *Solution singulière* ou *particulière.*

Par exemple, l'élimination de la constante c entre l'équation $y^2-2cy+x^2=c^2$, et sa dérivée, donne (n° 727)

$$(x^2-2y^2)\,y'^2-4xyy'-x^2=0\,;$$

mais si l'on regarde c comme seule variable dans l'équation primitive proposée, on aura $c=-y$, ce qui la changera en $x^2+2y^2=0$. On peut aisément s'assurer, par le calcul, que cette équ. satisfait à notre équ. différentielle, quoiqu'elle ne soit pas comprise dans son intégrale.

Pareillement $x^2-2cy-b-c^2=0$, a pour dérivée, après l'élimination de c,

$$y'^2(x^2-b)-2xyy'=x^2.$$

La dérivée relative à c seul donne $y+c=0$; d'où $c=-y$, puis $x^2+y^2=b$; c'est la solution singulière de notre équ. dérivée.

L'équ. $y = x + (c - 1)^2 \sqrt{x}$, donne $C = 2(c - 1)\sqrt{x} = 0$; d'où $c = 1$, puis $y = x$, cas particulier de l'intégrale complète ; ce n'est donc pas une solution singulière. Ceci se rapporte à ce qui a été dit (2°).

Enfin, l'équ. $y^2 + x^2 = 2cx$, donne $C = 2x = 0$, qui, ne contenant pas c, ne donne encore qu'une intégrale particulière relative à $c = \infty$ (*voyez* le cas 3°).

864. Nous ferons ici quelques remarques.

1° Les solutions singulières doivent être cherchées avec autant de soin que les intégrales complètes, parce qu'elles peuvent renfermer la vraie solution du problème, qui conduit à l'équation différentielle qu'on a intégrée.

2° L'équ. $\frac{df}{dc} = 0$ exprime la condition pour que $f(x, y, c) = 0$ ait des racines égales relatives à c (n° 524). Si donc, à l'aide de l'équ. singulière, on chasse x ou y, l'intégrale complète de l'équ. résultante aura des facteurs égaux. C'est ainsi que, dans notre 1er exemple, si l'on fait $x^2 = -2y^2$, la proposée devient

$$y^2 + 2cy + c^2 = (y + c)^2 = 0.$$

3° Puisque la constante c est arbitraire, on peut considérer l'intégrale complète $f(x,y,c) = 0$ comme l'équ. d'une infinité de courbes, dont le paramètre c est différent. Si donc on attribue à c toutes les valeurs possibles, ces lignes consécutives se couperont deux à deux en une série de points, dont le système formera une courbe tangente à chacune. L'équ. $f(x, y, c) = 0$ appartient à l'une de nos courbes, ainsi qu'à la courbe qui les embrasse toutes ; seulement c est constant dans le 1er cas, quels que soient x et y ; tandis que dans le 2e, c est une fonction variable des coordonnées du point de contact. La tangente, en ce point, étant déterminée par y', est la même pour l'une et pour l'autre ; y' doit donc conserver la même valeur, que c soit constant ou variable dans $f(x, y, c) = 0$; d'où il suit que si l'on élimine c entre $f = 0$, et $\frac{df}{dc} = 0$, l'équation résultante en x et y, qui est *la solution singulière, appartient à la ligne de contact des courbes comprises dans l'intégrale complète* (*voyez* n° 805).

4° Résolvons par rapport à c l'équ. $f(x,y,c) = 0$, et soit $c = \psi(x, y)$. Si l'on substituait $\psi(x, y)$ pour c, dans $f(x, y, c) = 0$,

le résultat serait identiquement nul, ainsi que toutes les dérivées relatives, soit à x, soit à y. On a donc (nº 712)

$$\frac{df}{dx} + \frac{df}{dc} \cdot \frac{dc}{dx} = 0, \quad \text{d'où } \frac{dc}{dx} = -\frac{df}{dx} : \frac{df}{dc};$$

or, $\dfrac{df}{dc} = 0$, donne $\dfrac{dc}{dx} = \infty$; de même $\dfrac{dc}{dy} = \infty$. Ce caractère, propre aux solutions singulières, offre encore un moyen de les obtenir.

De $x^2 - 2cy - c^2 - b = 0$, on tire

$$c = -y + \sqrt{(x^2 + y^2 - b)}, \quad \frac{dc}{dx} = \frac{x}{\sqrt{(x^2 + y^2 - b)}};$$

donc $x^2 + y^2 = b$, qui rend cette fraction infinie, est la solution singulière.

En posant $\dfrac{dc}{dx}$, ou $\dfrac{dc}{dy}$ infini, il conviendra de s'assurer si la relation entre x et y, qui en résulte, combinée avec la proposée, ne donne pas $\varphi(x, y) =$ const.; car alors on n'aurait qu'une intégrale particulière.

5° L'existence des solutions singulières est une conséquence de ce que l'équ. $\dfrac{df}{dc} = C = 0$, donne pour c une valeur variable $c = \varphi(x, y)$: mais il se peut que la fonction φ soit réductible à une constante, en vertu de l'intégrale complète $f(x, y, c) = 0$, ou que f contînt c sous la forme $(c - a)(c - \varphi)$, en sorte que $c = \varphi$ reviendrait à $c = a$; alors on n'aurait plus qu'une intégrale particulière, comme si l'on eût pris un nombre déterminé pour c. Donc, *pour que* C $= 0$ *donne une solution singulière, il faut qu'il n'en résulte pour* c, *ni une constante, ni même une fonction variable* φ *qui, mise dans* f$=0$, *reviendrait à y prendre pour* c *une valeur constante.*

Par exemple,

$$(x^2 + y^2 - b)(y^2 - 2cy) + (x^2 - b)c^2 = 0,$$

donne $\quad C = -y(x^2 + y^2 - b) + (x^2 - b)c = 0;$

d'où $\quad c = \dfrac{y(x^2 + y^2 - b)}{x^2 - b}$, puis $y^2(y^2 + x^2 - b) = 0$.

Cette équ. n'est qu'une intégrale particulière provenue de $c = 0$.

De même, $c^2 - (x+y)c - c + x + y = 0$, donne

$$C = 2c - x - y - 1 = 0, \quad c = \tfrac{1}{2}(x + y + 1);$$

la proposée, qui revient à $(c - 1)(c - x - y) = 0$, devient $(x + y - 1)^2 = 0$; ainsi on a $x + y = 1$, intégrale particulière provenue de $c = 1$, après avoir divisé par $c - 1$.

L'équ. $y = x + (c - 1)^2 (c - x)^2$, donne

$$C = (c - x)(c - 1)(2c - x - 1) = 0.$$

$c = 1$ donne l'intégrale particulière $y = x$; $c = x$ donne la même chose, et non pas une solution singulière, quoique c soit variable.

Enfin, $c = \tfrac{1}{2}(x + 1)$ donne la solution singulière.

6° Soit z le multiplicateur qui rend dérivée exacte l'équation $y' + K = 0$, en sorte que $z(y' + K) = \varphi' = 0$ ait pour primitive $\varphi(x, y) = c$; la solution singulière $S = 0$ ne doit pas être comprise dans cette équation. Par conséquent, si de $S = 0$, on tire y en fonction de x, $y = \psi x$, la substitution dans la fonction $\varphi(x, y)$ ne doit pas la réduire à une constante ; ainsi sa dérivée φ' ne doit pas être nulle.

On voit donc que des deux expressions $y' + K$, et φ' ou $z(y' + K)$, l'une doit être nulle en vertu de $y = \psi x$, tandis que l'autre ne doit pas l'être ; ce qui ne peut avoir lieu qu'autant que z est infini. Il en résulte que les solutions singulières rendent infinis tous les facteurs propres à rendre intégrable l'équ. différentielle proposée ; ou plutôt, que les solutions singulières de cette équ. ne sont autre chose que les facteurs algébriques, que l'on peut mettre en évidence, et séparer entièrement de cette équ. par une transformation convenable.

(*Voyez* un Mémoire de M. Poisson, 13ᵉ *Journ. Polyt.*, où il est démontré qu'on peut toujours délivrer une équ. du 1ᵉʳ ordre de sa solution particulière, ou en introduire une à volonté.)

865. Concevons que $y = X$ satisfasse à une équation proposée $y' = F(x,y)$, X étant une fonction donnée de x, et qu'on ait

$$X' = F(x, X); \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

cherchons à reconnaître si $y = X$ *est une solution singulière, ou une intégrale particulière ;* X ne renfermant pas de constante arbitraire. Soit $y = \psi(x,a)$ l'intégrale complète de $y' = F(x,y)$; a étant la

constante arbitraire : si $y = X$ est un cas particulier de $y = \psi(x,a)$, en sorte que $\psi(x,a)$ devienne X lorsqu'on attribue à a une valeur b, il faut que $\psi(x,a) - X$ soit zéro pour $a = b$: donc (n° 540)

$$\psi(x, a) - X = (a - b)^m z,$$

m étant la plus haute puissance de $a - b$, et z une fonction de x et a qui ne devient 0, ni ∞, pour $a = b$. Représentons la constante $(a - b)^m$ par c ; l'intégrale complète de $y' = F(x,y)$ sera donc

$$y = X + cz.$$

Si l'on substitue cette valeur de y dans $y' = F(x, y)$, cette relation deviendra identique,

$$X' + cz' = F(x, X + cz).$$

Or, d'une part, le développement de z suivant les puissances ascendantes de c, a la forme (n° 738) $z = K + Ac^a + Bc^b + \ldots.$ les exposants $a, b \ldots.$ étant croissants et positifs, et $K, A, B \ldots.$ des fonctions de x ; car z n'est ni ∞, ni 0, lorsque $c = 0$. Donc

$$X' + cz' = X' + K'c + A'c^{a+1} + \ldots.$$

De l'autre part, le développement de $F(x,X + cz)$ doit pareillement être $F(x,X) + Nc^n z^n + Mc^m z^m + \ldots. . n, m \ldots.$ étant croissants et positifs. Cette série est d'ailleurs facile à obtenir (n° 746), et l'on doit regarder comme connus les nombres $n, m\ldots.$, ainsi que les fonctions de x désignées par $N, M\ldots.$ Si donc l'on met ici pour z sa valeur développée, on a, en vertu de (1),

$$K'c + A'c^{a+1} + \ldots. = Nc^n(K + Ac^a + \ldots.)^n$$
$$+ Mc^m(K + Ac^a + \ldots.)^m + \text{etc.}$$

Il s'agit donc de savoir s'il est possible de déterminer z, ou plutôt les coefficients $A, B \ldots.$ en fonction de x, et les nombres $a, b \ldots.$, de manière à rendre cette équation identique ; car, si cela n'est pas possible, $y = X$ est une solution singulière ; dans le cas contraire, on a une intégrale particulière.

Il se présente trois cas :

1° Si $n > 1$, le terme $K'c$ n'en rencontre pas de semblable qui puisse le détruire : on fera donc $K' = 0$, d'où $K = \text{const.}$ Puis on posera $a + 1 = n$, $A' = NK^n$, ce qui déterminera $a = n - 1$,

et $A = \int NK^n dx$; et ainsi des autres termes. L'identité sera donc toujours possible, et $y = X$ sera une intégrale particulière.

2° Si $n = 1$, la même chose aura lieu; car, posant $K' = NK$, on aura $1K = \int N dx$: il sera facile ensuite d'ordonner les deux membres, et de comparer les exposants et les coefficients respectifs des termes de même rang. On déterminera ainsi les exposants $a, b \ldots$, et les coefficients $K, A, B \ldots$

3° Enfin, si $n < 1$, le terme $Nc^n K^n$ n'en trouvera aucun autre qui lui soit semblable, puisqu'il n'y a pas d'exposant de c qui soit < 1 dans le 1er membre : et comme K ne peut être nul, il ne sera possible en aucune manière de satisfaire à l'identité : $y = X$ sera donc une solution singulière.

866. Puisque $n < 1$ dans ce dernier cas, en mettant $X + cz$ pour y dans $F(x,y)$, si le développement de Taylor est fautif entre le 1er et le 2e terme, c'est-à-dire si la dérivée de $F(x,y)$ relative à y est infinie (n° 736, 3°), $y = X$ est une solution singulière. Réciproquement une valeur $y = X$ qui satisfait à $y' = F(x,y)$, et rend $\frac{dF}{dy}$ infinie, est une solution singulière, puisqu'elle donne au développement de $F(x, X + cz)$ la forme $X' + Nc^n K^n \ldots$, n étant < 1.

La condition $\frac{dF}{dy}$, ou $\frac{dy'}{dy} = \infty$, forme donc le véritable caractère des solutions singulières, et l'on voit que pour qu'elle soit remplie, si la fonction F est algébrique, elle doit renfermer un radical (n° 739, 3°) que l'hypothèse $y = X$ fait disparaître. Dans le 1er de nos exemples, p. 462, on a

$$y' = \frac{x[y \pm \sqrt{(x^2 + y^2 - b)}]}{x^2 - b}, \frac{dy'}{dy} = \frac{x}{x^2 - b}\left(1 \pm \frac{y}{\sqrt{(x^2 + y^2 - b)}}\right),$$

et cette dernière fraction est rendue infinie par la solution singulière $y^2 = b - x^2$.

867. *Il est donc facile d'obtenir les solutions singulières sans connaître l'intégrale complète;* car en tirant la valeur de $\frac{dy'}{dy}$, on l'égalera à l'infini : soit $\frac{dy'}{dy} = \frac{U}{T}$, on fera $T = 0$, ou $U = \infty$. Considérant tous les facteurs de ces équations, les résultats qui satisferont à $y' = F(x,y)$ seront seuls les solutions singulières.

Pour $y' = a(y - n)^k$, on a $ak(y - n)^{k-1} = \infty$, ce qui exige que

k soit < 1, et $y = n$: et comme la proposée n'est satisfaite par $y = n$ que si k est positif, on voit qu'elle n'est susceptible de solution singulière que si k est entre 0 et 1. L'intégrale complète est

$$\frac{(y-n)^{1-k}}{1-k} = ax + c.$$

Il n'est pas nécessaire de donner à l'équation dérivée la forme explicite $y' = F(x,y)$ pour appliquer notre théorème; car, soit $V = 0$, la relation donnée entre x, y et y'; on peut considérer y' comme une fonction de x et y, que cette équation détermine ; ainsi, la différence partielle de y' relative à y, sera donnée (nº 712) par

$$\frac{dV}{dy} + \frac{dV}{dy'} \cdot \frac{dy'}{dy} = 0 ;$$

or, $\frac{dy'}{dy}$ est infini quand $\frac{dV}{dy'} = 0$, ou $\frac{dV}{dy} = \infty$:

en sorte qu'on obtiendra toutes les solutions singulières par cette voie. S'il arrive même que la fonction V soit algébrique, rationnelle et entière, cette dernière condition ne sera pas possible. Il faudra ensuite éliminer y' entre $V = 0$ et $\frac{dV}{dy'} = 0$. On ne devra d'ailleurs prendre que les facteurs de cette dernière, qui ne sont pas communs entre $\frac{dV}{dy'}$ et $\frac{dV}{dy}$.

Ce calcul ne fera connaître que celles des solutions singulières qui contiennent y; celles qui ne renferment que x échappent à cette règle ; pour obtenir celles-ci, on devra raisonner de même par rapport à x : on trouvera ainsi, outre les solutions déjà connues où entrent x et y, celles qui ne dépendent pas de y.

1º Ainsi, $(x^2 - 2y^2)\, y'^2 - 4xyy' - x^2 = 0$ donne

$$(x^2 - 2y^2)\, y' - 2xy = 0,$$

en différentiant par rapport à y' seul : éliminant y' entre ces équ., on trouve la solution singulière, qui est $x^2 + 2y^2 = 0$.

2º De même $xdx + ydy = dy \sqrt{(x^2 + y^2 - c^2)}$,

ou $$x^2 + 2xyy' + y'^2(c^2 - x^2) = 0,$$

donne $$xy + y'(c^2 - x^2) = 0, \text{ puis } x^2 + y^2 = c^2.$$

3° Pour $y\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y = a\mathrm{d}s$, où $\mathrm{d}s = \sqrt{(\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2)}$, on trouve

$$y^2 - a^2 = 2xyy' + y'^2 (a^2 - x^2),$$

d'où $xy = y'(x^2 - a^2)$; puis éliminant y', on a, pour la solution singulière, $x^2 + y^2 = a^2$.

4° Celle de $y = xy' + Y_1$, où Y est une fonction quelconque de y', s'obtient en éliminant y' à l'aide de $x + \frac{\mathrm{d}Y_1}{\mathrm{d}y'} = 0$.

868. Puisque sans connaître l'intégrale complète d'une équ. dérivée $V = 0$, on sait en trouver les solutions singulières, et que le facteur z, propre à rendre intégrable la proposée, est alors infini (n° 864, 6°), on peut souvent, par des artifices d'analyse, trouver ce facteur z. Un exemple tiré du *Mémoire* de Trembley (Acad. Turin, 1790 — 91) suffira pour faire entendre ce procédé.

Dans l'ex. 3ᵉ nous avons trouvé $x^2 + y^2 - a^2 = 0$ pour solution singulière; la proposée résolue par rapport à y', donne

$$(a^2 - x^2)\, y' + xy = a\sqrt{(y^2 + x^2 - a^2)},$$

qui est visiblement satisfaite par $x^2 - a^2 = 0$: on essayera si le facteur z a la forme $(x^2 - a^2)^m (y^2 + x^2 - a^2)^n$, m et n étant des indéterminées. Pour cela, on multipliera l'équ. ci-dessus par cette fonction, et l'on posera la condition (1) (n° 859), puis on verra qu'elle est remplie en prenant $m = -1$, $n = -\frac{1}{2}$; ainsi, le facteur qui rend la proposée intégrable est

$$(x^2 - a^2)^{-1} (y^2 + x^2 - a^2)^{-\frac{1}{2}}.$$

Des Équations où les Différentielles passent le premier degré.

869. Cherchons l'intégrale de $F(x, y, y', y'^2 \ldots y'^m) = 0$. Comme cette équ. ne peut provenir que de l'élimination d'une constante c entre l'équ. intégrale et sa dérivée immédiate, dans lesquelles c entre à la puissance m, soit $c = \varphi(x,y)$ la valeur de cette constante tirée de l'intégrale ; $\varphi'(x,y) = 0$ ne contiendra y' qu'au 1ᵉʳ degré, et l'on pourra en tirer $y' = X$, X contenant x et y affectés de radicaux : et puisqu'en les faisant disparaître par des élévations de puissances, on doit reproduire la proposée $F = 0$, il s'ensuit que $y' - Y$ doit être facteur de F.

Si donc on résout la proposée par rapport à y', et qu'on intègre ses facteurs $y' - X = 0$, $y' - X_1 - = 0 \ldots$, on voit que ces intégrales seront celles de la proposée qui répondent aux diverses valeurs de $c = \varphi(x, y)$. Soient $P = 0$, $Q = 0$, $R = 0 \ldots$, ces intégrales; leurs produits $PQ = 0$, $PQR = 0 \ldots$, satisferont aussi à la proposée, car la dérivée du produit $PQR \ldots$ étant

$$P'QR \ldots + PQ'R \ldots + PQR' \ldots + \text{etc.},$$

chaque terme est nul en particulier.

Par exemple, $yy'^2 + 2xy' = y$ donne

$$y' = \frac{-x \pm \sqrt{(y^2 + x^2)}}{y}, \quad \text{d'où} \frac{yy' + x}{\sqrt{y^2 + x^2}} = \pm 1;$$

et comme le 1[er] membre est visiblement (n° 809, IV) la dérivée de $\sqrt{(x^2 + y^2)}$, on a pour intégrale

$$\pm \sqrt{(y^2 + x^2)} = x + c, \quad \text{ou } y^2 = 2cx + c^2.$$

870. Au reste, il est des cas où l'on peut, par des artifices de calcul, éviter la résolution des équations par rapport à y' : les deux exemples qui suivent sont dans ce cas.

I. Supposons que l'équ. ne contienne que x et y', et soit facile à résoudre par rapport à x, en sorte qu'on ait $x = Fy'$. Comme $\mathrm{d}y = y'\mathrm{d}x$ donne (n° 809, V), $y = xy' - \int x\mathrm{d}y'$, en mettant pour x sa valeur Fy', on a

$$y = y' \,.\, Fy' - \int Fy' \,.\, \mathrm{d}y'.$$

Après avoir intégré $\int Fy' \,.\, \mathrm{d}y'$, ce qui rentre dans les quadratures, on éliminera y' à l'aide de la proposée $x = Fy'$.

Ainsi pour $(1 + y'^2)\, x = 1$, on a

$$Fy' = \frac{1}{1 + y'^2}, \quad y = \frac{y'}{1 + y'^2} - \int \frac{\mathrm{d}y'}{1 + y'^2};$$

ce dernier terme $=$ arc $(\text{tang} = y') + c$; éliminant y', on trouve enfin, pour l'intégrale demandée,

$$y = \sqrt{(x - x^2)} - \text{arc}\left(\text{tang} = \sqrt{\frac{1 - x}{x}}\right) + c.$$

II. Si l'équ. a la forme $y = y'x + Fy'$, en différentiant, on a

$$dy = y'dx + \left(x + \frac{dF}{dy'}\right) dy', \quad \text{ou} \left(x + \frac{dF}{dy'}\right) dy' = 0,$$

à cause de $dy = y'dx$.

En égalant chaque facteur à 0, il vient $y' = c$ et $x + \frac{dF}{dy'} = 0$. Il ne reste plus qu'à éliminer y', entre la proposée et l'une ou l'autre de ces équations. Celle-ci ne donne qu'une solution singulière (n° 867, 4°) : la 1re conduit à l'intégrale complète $y = cx + C$, en désignant par C ce que devient Fy' lorsqu'on y remplace y' par c, ou $C = Fc$.

Ainsi, $ydx - xdy = a\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$ se met sous la forme

$$y = y'x + a\sqrt{(1 + y'^2)}:$$

d'où
$$y' = c \text{ et } x + \frac{ay'}{\sqrt{(1 + y'^2)}} = 0;$$

la 1re donne pour intégrale complète $y = cx + a\sqrt{(1 + c^2)}$; la 2e conduit à la solution singulière $y^2 + x^2 = a^2$, lorsqu'on en tire la valeur de y' pour la substituer dans la proposée.

Des Constantes arbitraires; de l'Intégration des équations différentielles à l'aide des séries et de leurs constructions.

871. Reprenons la série de Maclaurin (n° 746),

$$y = fx = f0 + xf'0 + \tfrac{1}{2}x^2 f''0 + \text{etc.},$$

dans laquelle $f0$, $f'0$, $f''0$.... sont les valeurs constantes que prennent fx, $f'x$, $f''x$...., lorsqu'on fait $x = 0$. Si l'équ. dérivée donnée est du 1er ordre, on en tirera y', y'', y'''.... en fonction de y et x, par des dérivations successives. Puisque $x = 0$ répond à $y = f0$, en substituant ces deux valeurs dans y', y''...., on aura celles de $f'0$, $f''0$, et par conséquent, tout sera connu dans notre série, excepté $f0$ qui demeurera arbitraire.

De même, si la dérivée donnée est du 2e ordre, on en tire y'', y'''... en fonction de x, y et y'; or, $x = 0$ répond à $y = f0$ et $y' = f'0$; mettant ces valeurs dans celles de y'', y'''...., puis dans la série, tout y est connu, excepté les constantes $f0$ et $f'0$ qui sont quelconques.

Et ainsi des ordres supérieurs.

Ce mode d'intégration ne peut être employé lorsqu'on rencontre l'infini en faisant $x=0$; dans $fx, f'x, f''x\ldots$, et la série de Maclaurin ne subsiste plus. Mais faisons $x=a$ dans celle de Taylor, a étant un nombre quelconque, qui ne rende infinie aucune de ces fonctions (n° 735); en désignant par $A, A', A''\ldots$ les valeurs qu'elles prennent alors, nous avons

$$f(a+h)=A+A'h+\tfrac{1}{2}A''h^2+\tfrac{1}{6}A'''h^3\ldots;$$

d'où $y=fx=A+A'(x-a)+\frac{1}{2}A''(x-a)^2+\frac{1}{6}A'''\ldots,$

en posant l'arbitraire $h=x-a$. Le même raisonnement que ci-dessus montre que tout est ici connu, excepté la constante A, si l'équation proposée est du 1er ordre; excepté A et A', si elle est du 2e, etc.; du reste, quoiqu'on ait pris a à volonté, cette lettre ne compte pas pour une constante arbitraire; c'est la valeur A que prend alors y qui en tient lieu.

Concluons de là que, 1° *il existe toujours une série qui est l'intégrale de toute équ. différentielle entre deux variables; on sait trouver cette série, aux difficultés près que le calcul peut offrir.*

2° *L'intégrale renferme toujours autant de constantes arbitraires qu'il y a d'unités dans l'ordre de la dérivée.* Quoique fondée sur la théorie des suites, cette conséquence a pourtant toute la rigueur convenable, puisqu'on peut regarder toute série comme le développement d'une expression finie $y=fx$, laquelle doit contenir autant de constantes arbitraires que la série.

3° *De quelque manière qu'on soit parvenu à une intégrale, qui renferme le nombre convenable de constantes arbitraires, cette équ. sera la primitive de la proposée, et renfermera nécessairement toute autre intégrale qui y satisferait aussi avec le même nombre de constantes arbitraires.*

872. En faisant $h=-x$ dans

$$f(x+h)=y+y'h+\tfrac{1}{2}y''h^2+\ldots,$$
$$f'(x+h)=y'+y''h+\tfrac{1}{2}y'''h^2+\ldots,$$
$$f''(x+h)=y''+y'''h+\tfrac{1}{2}y^{\text{IV}}h^2+\ldots,\text{etc.},$$

on a

$$(1)\ldots f0=y-y'x+\tfrac{1}{2}y''x^2-\ldots,$$
$$(2)\ldots f'0=y'-y''x+\tfrac{1}{2}y'''x^2-\ldots,$$
$$(3)\ldots f''0=y''-y'''x+\tfrac{1}{2}y^{\text{IV}}x^2-\ldots,\text{etc.}$$

Donc, 1° si l'équation dérivée donnée est du 1er ordre, on aura $y', y'' \ldots$ en fonction de x et y; en sorte qu'en substituant dans la formule (1), on aura l'intégrale, $f0$ étant la constante arbitraire.

2° Si l'équation proposée est du deuxième ordre, $y'', y''' \ldots$ seront données en x, y et y'; en sorte qu'en substituant dans (1) et (2), on aura deux équations entre x, y et y', chacune contenant une constante arbitraire, ce qui formera deux équations intégrales du premier ordre.

Et ainsi de suite.

Il est d'ailleurs évident, par la forme même de ces intégrales, qu'elles sont différentes. Ainsi, *toute équation du* n^e *ordre, a* n *intégrales de l'ordre* n — 1. Si ces dernières étaient connues, l'intégrale finie le serait bientôt, puisqu'il suffirait d'éliminer entre elles $y', y'' \ldots, y^{n-1}$. Donc, ayant une équation dérivée du 2e ordre, on aura également sa primitive absolue, soit en éliminant y' entre ses deux dérivées du 1er ordre, soit en cherchant une relation finie entre x et y, qui contienne deux constantes arbitraires, et qui satisfasse à la proposée.

On en dira autant des autres ordres.

Il nous resterait à démontrer, sur l'intégration des équ. des ordres supérieurs, plusieurs théorèmes relatifs aux facteurs propres à rendre intégrables et aux solutions singulières. Vol. 12e, *Journ. Polyt.*, leçons 13, 14, et 15, par Lagrange.

873. La théorie que nous venons d'exposer est démontrée complétement; mais elle n'est pas toujours propre à faire connaître l'intégrale approximative, à moins qu'on ne recoure à des transformations qui amènent la fonction à l'état nécessaire pour qu'on puisse y appliquer les principes précédents.

Lorsque l'intégrale ne doit pas procéder suivant les puissances entières et positives de x, on aura

$$y = Ax^a + Bx^b + Cx^c + \ldots \quad (1)$$

et il s'agira de déterminer les exposants $a, b, c \ldots$, et les coefficients $A, B, C \ldots$ Pour cela, on en tirera les valeurs de $y', y'' \ldots$ et on les substituera dans la dérivée proposée, que nous supposons du 1er ordre et qui devra être rendue identique; puis ordonnant par rapport à x, on comparera terme à terme les puissances de même ordre, ainsi que leurs coefficients, comme page 240; ce qui déterminera $A, a, B, b \ldots$

Ainsi, pour $(1 + y')\,y = 1$, on aura

$$(1 + Aax^{a-1} + Bbx^{b-1} + \ldots)(Ax^a + Bx^b + \ldots) = 1;$$

d'où
$$\left.\begin{array}{llll} A^2ax^{2a-1} & + ABax^{a+b-1} & + ACax^{a+c-1} & + \ldots \\ & + ABbx^{a+b-1} & + B^2bx^{2b-1} & + \ldots \\ & & + ACcx^{a+c-1} & + \ldots \\ -1 & + Ax^a & + Bx^b & + \ldots \end{array}\right\} = 0.$$

Donc $2a - 1 = 0,\ a + b - 1 = a,\ a + c - 1 = b = 2b - 1\ldots$

$$a = \tfrac{1}{2}, \qquad b = 1, \qquad c = \tfrac{3}{2}\ldots;$$

puis $A^2a = 1,\quad AB\,(a + b) + A = 0\ldots,$

$$A = \sqrt{2},\quad B = -\tfrac{2}{3},\quad C = \tfrac{1}{18}\sqrt{2}\ldots,$$

et $$y = x^{\frac{1}{2}}\sqrt{2} - \tfrac{2}{3}x^{\frac{2}{2}} + \tfrac{1}{18}x^{\frac{3}{2}}\sqrt{2} - \ldots$$

Si l'on eût pu présumer la loi des exposants, $\frac{1}{2}, \frac{2}{2}, \frac{3}{2}\ldots$, on les aurait employés sur-le-champ dans la série (1), ce qui aurait simplifié les calculs ; ou plutôt, faisant la transformation $z^2 = x$, on aurait pu ensuite appliquer la série de Maclaurin.

On verra de même que l'équ. $dy + ydx = ax^m dx$, donne

$$\frac{y}{a} = \frac{x^{m+1}}{m+1} - \frac{x^{m+2}}{(m+1)(m+2)} + \frac{x^{m+3}}{(m+1)\ldots(m+3)} - \ldots$$

874. L'intégrale ainsi obtenue manque de généralité, parce qu'elle est privée de constante arbitraire ; mais si l'on change dans l'équ. différentielle proposée x en $z + a$, et y en $t + b$, on développera t en z ; en sorte que la série t soit nulle lorsque $z = 0$; puis substituant pour z et t leurs valeurs $x - a$ et $y - b$, on aura l'intégrale cherchée, où a et b tiendront lieu de la constante arbitraire c, puisque dans l'intégrale $f(x, y, c) = 0$, c peut être déterminé en fonction de a et b. Il sera aisé d'étendre ces principes aux ordres supérieurs.

875. On peut aussi approcher des intégrales à l'aide des fractions continues. Soit $y = Ax^a, Bx^b, Cx^c\ldots$, en suivant la notation p. 160, cette valeur de y sera représenté par $y = \dfrac{Ax^a}{1+z}$, z désignant le reste de la fraction continue, ou $z = Bx^b, Cx^c\ldots$ Substituant dans l'équ. différentielle proposée pour y cette valeur, en négligeant z, ou faisant $y = Ax^a$, on ne conservera que les 1[ers] ter-

mes, parce qu'on regardera x comme très-petit (note, page 282). On trouvera A et a par la comparaison des coefficients et des exposants; puis on fera, dans l'équ. différentielle proposée, $y=\frac{Ax^a}{1+z}$; raisonnant de même pour la transformée en z, on fera $z=Bx^b$; puis, après avoir trouvé B et b, on posera $z=\frac{Bx^b}{1+t}$ dans l'équ. en z; et ainsi de suite.

Par exemple, $my+(1+x)y'=0$, en faisant $y=Ax^a$, devient $(m+a).Ax^a+aAx^{a-1}=0$, qui se réduit à $aAx^{a-1}=0$, à cause de x très-petit; donc $a=0$, et A reste indéterminé. On fait ensuite $y=\frac{A}{1+z}$, et l'on a $m(1+z)=(1+x)z'$; d'où posant $z=Bx^b$, on tire $m+Bx^b(m-b)=bBx^{b-1}$; ou plutôt $m=bBx^{b-1}$; donc $b=1$, et $B=m$. On fera ensuite $z=\frac{mx}{1+t}$.... : enfin on obtiendra cette fraction continue pour intégrale :

$$y=A,\ mx,\ -\tfrac{1}{2}(m-1)x,\ \tfrac{1}{6}(m+1)x,\ -\tfrac{1}{6}(m-2)x,\ \ldots$$

Comme l'équ. proposée a pour intégrale $y=A(1+x)^{-m}$, on a ainsi le développement de cette fonction en fraction continue.

On pourrait en déduire l'intégrale sous la forme d'une série (*voy.* la note, p. 162).

De même, l'équ. $dx=(1+x^2)\,dy$ donne ce développement de l'arc en fonction de la tangente (*voy.* n° 631),

$$y=\text{arc}\,(\text{tang}=x)=x,\ \frac{x^2}{3},\ \frac{(2x)^2}{3.5},\ \frac{(3x)^3}{5.7},\ \frac{(4x)^2}{7.9}\ldots$$

Consultez sur ce sujet le Calcul intégral de Lacroix, tome II, n° 668, ouvrage dont on ne saurait trop recommander la lecture, et dans lequel on trouve réuni tout ce qui est connu sur la doctrine de l'Intégration.

876. Lorsqu'une équ. différentielle proposée appartient à une courbe, il peut être utile de construire cette courbe, sans intégrer l'équ., en opérant ainsi qu'il suit :

Supposons d'abord que l'équ. soit du 1er ordre, $F(x, y, y')=0$; concevons que la constante soit déterminée par la condition que $x=a$ donne $y=b$. On prendra (fig. 83) $AB=a$, $BC=b$, et le

point C sera sur la courbe cherchée. En substituant a et b pour x et y dans $F=0$, on en tirera pour y' une valeur qui fixera la direction de la tangente KC au point C. Prenons un point D assez voisin de C, pour qu'on puisse, sans erreur notable, regarder la droite CD comme confondue avec l'arc de courbe; $AF=a'$, $FD=b'$, seront les coordonnées d'un autre point D de notre courbe; en sorte qu'on pourra faire $x=a'$, et $y=b'$ dans $F=0$, et en tirer la valeur de y' correspondante, et par conséquent la situation de la tangente IE, qui s'écartera très-peu de la 1re. On continuera d'opérer de même pour un 3e point; et l'on voit que la courbe sera remplacée par un polygone $CDEZ$.

On pourrait encore raisonner de la manière suivante. On tirerait de l'équ. $F=0$ et de sa dérivée les valeurs de y' et y'', en fonction de x et y, et on les substituerait dans celle du rayon de courbure R (n° 773); puis, traçant la tangente KC, et menant une perpend. CN égale à ce rayon, x et y étant remplacés par a et b, on décrirait du centre N un arc de cercle CD; on regarderait ensuite le point D comme étant sur la courbe, ses coordonnées étant a' et b'. On mènerait de nouveau la tangente ID et le rayon de courbure DO, etc. La courbe serait alors remplacée par un système d'arcs de cercles contigus. Il est même évident que l'erreur serait moindre qu'en se servant des tangentes seules, et qu'on pourrait en conséquence, prendre les points C, D, E plus écartés les uns des autres; ce qui rendrait les constructions moins pénibles.

877. Si l'équation différentielle proposée est du 2e ordre, $F(x, y', y'')=0$; après avoir choisi de même un point arbitraire C pour un de ceux de la courbe, il faut en outre prendre à volonté une droite quelconque KC pour tang. en C; cette double condition détermine les deux constantes. On tirera la valeur de y'', et par suite celle du rayon de courbure R, en fonction de x, y et y'; et comme ces quantités sont connues pour le point C, on décrira l'arc de cercle CD, comme précédemment. Le point D de cet arc étant supposé sur la courbe, on décrira sa normale DN, en menant au premier centre N une ligne droite. Pour le second point D, on connaîtra donc ses coordonnées a', b', et la valeur de y' qui résulte de la direction de la tangente ID en D, et l'on calculera la valeur de R' pour ce point D : prenant $OD=R'$ on décrira l'arc DE, et l'on aura un 3e point E, dont on connaîtra les coordonnées et la direction de la normale ; et ainsi de suite.

Un raisonnement semblable donne le moyen de remplacer la courbe par une série d'arcs de paraboles osculatrices.

On pourrait aussi appliquer ces principes aux équ. différentielles du 3e ordre; mais alors non-seulement il faudrait prendre arbitrairement un point C et sa tangente KC, mais encore le rayon CN du cercle osculateur en ce premier point, ce qui déterminerait les trois constantes arbitraires. On ne pourrait ensuite remplacer la courbe que par une suite de paraboles dont le contact serait du 3e ordre. On en dira autant des ordres supérieurs.

Concluons de là que *toute équ. différentielle entre deux variables peut être construite par une courbe, qui a autant de paramètres arbitraires que d'unités dans l'ordre de l'équation.* Ceci s'accorde avec le nº 871, où l'on a prouvé que cette équ. a toujours une intégrale.

Des Équations des ordres supérieurs, et en particulier du second ordre.

878. Dans les équ. du 1er ordre, on a pu prendre pour principale telle variable qu'on a voulu, sans que pour cela les procédés d'intégration exigeassent des modifications : c'est un des avantages qu'offre la notation de Leibnitz (nº 734). Mais il est maintenant indispensable d'indiquer, dans chaque équ., quelle est la différentielle qu'on a prise pour constante, et d'y avoir égard à chaque transformation que peut nécessiter le calcul.

Si donc on veut que $\mathrm{d}x$ soit constant, au lieu de toute autre différentielle, qu'on a regardée comme telle, dans une équation donnée, il faut modifier cette équ. à l'aide de la théorie connue (nº 731). Ainsi, pour $\mathrm{d}s \,.\, \mathrm{d}y = a\mathrm{d}^2x$, ou $ax'' = y'$, on a pris pour constante $\mathrm{d}s = \sqrt{(\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2)}$; donc $a(s'x'' - x's'') = y's'^2$; puis posant

$$x' = 1, \quad \text{on a} \quad x'' = 0,\ s'^2 = 1 + y'^2, \quad s's'' = y'y'',$$

$$y's'^2 = -as'',\ s'^3 = -ay'',\ \text{ou}\ (\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2)^{\frac{3}{2}} = -a\mathrm{d}x\mathrm{d}^2y,$$

où $\mathrm{d}x$ est constant. Cette équation, mise sous la forme . . . . . . $ay'' + (1 + y'^2)^{\frac{3}{2}} = 0$, va bientôt être intégrée (nº (880).

Pareillement, pour que $\mathrm{d}x$ soit constant au lieu de $\mathrm{d}s$ dans $(\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2)\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^4} = \dfrac{1}{a} \,.\, \cos\dfrac{x}{c}$, on remarquera que cette équation

équivaut à

$$\frac{d^2y}{ds^2} = \frac{dx^4}{ds^4} \cdot \frac{1}{a} \cos \frac{x}{c};$$

qu'on écrit $y'' = x'^4 \cdot \frac{1}{a} \cos \frac{x}{c}$, s étant toujours variable principale ; d'où $\frac{s'y'' - s''y'}{s'^3} = \frac{x'^4}{s'^4} \cdot \frac{1}{a} \cos \frac{x}{c}$, aucune dérivée n'étant constante. Enfin, $x' = 1$, donne $s'^2 = 1 + y'^2$, $s's'' = y'y''$, puis

$$y'' = \frac{1}{a} \cos \frac{x}{c}, \quad \text{ou } dy' = \frac{dx}{a} \cos \frac{x}{c};$$

dx est constant, et k et b sont les constantes arbitraires :

$$y' = \frac{c}{a} \sin \frac{x}{c} + b, \quad \text{d'où } y = k + bx - \frac{c^2}{a} \cos \frac{x}{c}.$$

Ce n'est pas, au reste, qu'on ne puisse quelquefois préférer à x toute autre variable principale, et intégrer ; mais, par la suite, à moins que nous n'avertissions du contraire, nous prendrons toujours dx constant.

879. L'équation la plus générale du 2e ordre a la forme $F(y'', y', y, x) = 0$; il convient d'examiner d'abord les cas particuliers où elle ne renfermerait pas les quatre quantités y'', y', y et x. S'il n'en entre que deux, l'équation peut avoir l'une de ces trois formes,

$$F(y'', x) = 0, \quad F(y'', y') = 0, \quad F(y'', y) = 0.$$

Quand y'' n'est accompagné que de y' et x, ou de y' et y, l'équ. est de l'une des deux formes :

$$F(y'', y', x) = 0, \quad F(y'', y', y) = 0.$$

Intégrons d'abord ces cinq cas particuliers.

I. Si l'on a $y'' = fx$, comme $y''dx = dy'$, la proposée revient à $dy' = fx \cdot dx$. Soit $y' = X + C$, l'intégrale de cette équation ; comme $y'dx = dy$, on a

$$dy = Xdx + Cdx : \quad \text{d'où } y = A + Cx + \int Xdx.$$

Soit, par exemple, $d^2y = adx^2$, ou $dy' = adx$; il vient d'abord $y' = c + ax$, ou $dy = cdx + axdx$; enfin $y = A + cx + \frac{1}{2}ax^2$.

De même, soit $d^2y = ax^n dx^2$, ou $y'' = ax^n$, ou enfin ..... $dy' = ax^n dx$; on trouve $y = A + cx + \frac{ax^{n+2}}{(n+1)(n+2)}$. Si $n = -1$, on obtient $y = A + cx + ax\,lx$; et si $n = -2$, on a

$$y = A + cx - a\,lx.$$

Observez que le calcul ci-dessus s'applique également à

$$y^{(n)} = fx, \quad \text{ou d} \,.\, y^{(n-1)} = fx \,.\, dx, \quad \text{d'où} \quad y^{n-1} = c + X.$$

Il ne s'agit plus que d'opérer de nouveau comme sur la proposée. L'intégrale a la forme

$$y = A + Bx + Cx^2 \ldots + Kx^{n-1} + \int^n fx \,.\, dx^n,$$

le signe $\int^n$ désignant n intégrations successives.

II. 880. Si la proposée a la forme $F(y'', y') = 0$, en mettant $\frac{dy'}{dx}$ pour y'', elle devient du 1er ordre entre y' et x; et l'on en tire $dx = fy' \,.\, dy'$. De plus, comme $dy = y'dx$, on a $dy = y'f'y' \,.\, dy'$. Ces deux équ. étant intégrées, désignons-en les intégrales par

$$x = M + A, \quad y = N + B;$$

A et B étant les constantes arbitraires, M et N des fonctions connues de y'. On voit donc qu'il ne s'agit plus que d'éliminer y' entre ces équ. (n° 872), et l'on aura l'intégrale cherchée avec ses deux constantes.

Soit $ay'' + (1 + y'^2)^{\frac{3}{2}} = 0$; on trouve

$$-ady' = (1 + y'^2)^{\frac{3}{2}} dx;$$

d'où $\qquad dx = \frac{-ady'}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad dy = \frac{-ay'dy'}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}},$

puis (n° 817) $x = A - \frac{ay'}{\sqrt{(1+y'^2)}}, \quad y = B + \frac{a}{\sqrt{(1+y'^2)}};$

et enfin $\qquad (A - x)^2 + (B - y)^2 = a^2.$

Cette intégration donne la solution de ce problème : quelle est la courbe dont le rayon de courbure est constant, ou $R = a$? Le cercle jouit seul de cette propriété.

Ce procédé s'applique à tous les ordres, pourvu que l'équ. soit de la forme $F[y^{(n)}, y^{(n-1)}] = 0$. Ainsi pour $f(y''', y'') = 0$, on fera

$$dy'' = y'''dx, \quad \text{d'où} \quad x = \int Fy'' \, . \, dy'',$$

et
$$y' = \int y''dx = \int (F'y \, . \, y''dy'').$$

Mettant ensuite pour y' cette intégrale dans $dy = y'dx$, on parvient à des valeurs de x et de y exprimées en y'', et renfermant trois constantes arbitraires : on élimine ensuite y'' entre elles (nº 872).

III. 881. Passons aux équ. de la forme $y'' = Fy$; en multipliant $dy' = y''dx$ par $y'dx = dy$, on trouve

$$y'dy' = y''dy; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (A)$$

mettant ici pour y'' sa valeur Fy, on a $y'dy' = Fy \, . \, dy$; d'où

$$\tfrac{1}{2} y'^2 = \tfrac{1}{2} c + \int Fy \, . \, dy, \quad y' = \sqrt{(c + 2\int Fy \, . \, dy)};$$

puis
$$x = \int \frac{dy}{y'} = \int \frac{dy}{\sqrt{(c + 2\int Fy \, . \, dy)}}.$$

Par exemple, $a^2d^2y + ydx^2 = 0$, ou $a^2y'' = -y$, devient $a^2y'dy' = -ydy$, d'où $a^2y'^2 = c^2 - y^2$; puis $dx = \dfrac{ady}{\sqrt{(c^2 - y^2)}}$; donc, intégrant, on a

$$x = a \, . \, \text{arc}\left(\sin = \frac{y}{c}\right) + b, \quad \text{ou} \quad \frac{y}{c} = \sin\left(\frac{x-b}{a}\right),$$

qui équivaut à $y = c \sin \dfrac{x}{a} + c' \cos \dfrac{x}{a}$.

De même, $d^2y \, . \, \sqrt{(ay)} = dx^2$ donne $\frac{1}{4} ay'^2 = C + \sqrt{(ay)}$; d'où $2dx = \dfrac{dy \, . \, \sqrt[4]{a}}{\sqrt{(c + \sqrt{y})}}$: on fait $c + \sqrt{y} = z^2$; on intègre et on trouve enfin

$$x = \tfrac{2}{3} \sqrt[4]{a} \, . \, (\sqrt{y} - 2c) \sqrt{(c + \sqrt{y})} + b.$$

Ce procédé s'applique à toutes les équations de la forme $y^{(n)} = Fy^{(n-2)}$; car soit, par exemple, $y^{\text{iv}} = Fy''$; comme $y^{\text{iv}}dx^2 = d^2y'' = Fy'' \, . \, dx^2$, on intégrera deux fois, et l'on aura $x = \varphi y''$, avec deux constantes. D'ailleurs, $y' = \int y''dx$ s'intègre après avoir mis pour dx sa valeur en y'' : substituant ensuite cette

valeur de dx et celle de y' dans $y = \int y' dx$, on obtient aussi y en y''. Il ne reste plus qu'à éliminer y'' à l'aide de $x = \varphi y''$; et le résultat, qui contient quatre constantes arbitraires, est l'intégrale complète cherchée.

IV. 882. Si l'équ. a la forme $F(x, y', y'') = 0$, *elle ne contient pas* y ; on la ramène au 1er ordre en mettant $\frac{dy'}{dx}$ pour y'', puisqu'elle ne renferme plus que y' et x; elle rentre alors dans les cas déjà traités, et l'on sait l'intégrer toutes les fois qu'elle est séparable, ou homogène, ou, etc. (*voy.* p. 449).

Supposons donc cette intégration effectuée, et soit $\psi(x, y', c) = 0$ cette intégrale; il se présentera trois cas :

1° Lorsqu'on sait résoudre l'intégrale par rapport à y', et qu'on a $y' = fx$, on en tire $y = \int y' dx = \int fx \,.\, dx$.

2° Si, au contraire, on peut tirer la valeur de x en y', telle que $x = fy'$, on a $y = \int y' dx$, et à l'aide de l'intégration par parties, $y = xy' - \int x dy' = xy' - \int fy' \,.\, dy'$. On élimine ensuite y' à l'aide de $x = fy'$.

3° Si l'on ne peut employer l'une ou l'autre de ces voies, on cherchera à exprimer x et y', à l'aide de quelque transformation, par des fonctions X et Y d'une 3e variable z; car $x = X$ et $y' = Y$, donne $y = \int y' dx = \int Y dX$.

Quelle est la courbe dont le rayon de courbure R est réciproque à l'abscisse? Soit $R = \frac{a^2}{2x}$; d'où (n° 773)

$$2x(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}} = a^2 y'',$$

ou $2x(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}} dx = a^2 dy'$, équ. qui est séparable :

$$2x dx = \frac{a^2 dy'}{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad x^2 + c = \frac{a^2 y'}{\sqrt{(1 + y'^2)}}.$$

En tirant la valeur de y', $y = \int y' dx$ donne

$$y = \int \frac{(x^2 + c)\, dx}{\sqrt{[a^4 - (x^2 + c)^2]}};$$

la ligne demandée est formée par une lame *élastique* qu'on courbe (*voyez* n° 938).

Si l'on eût voulu que R fût une fonction donnée X de l'abscisse x, on aurait posé $(1+y'^2)^{\frac{3}{2}} = Xy''$. Le même calcul aurait donné

$$\frac{y'}{\sqrt{(1+y'^2)}} = \int \frac{dx}{X} = V; \quad \text{d'où} \quad y = \int \frac{V dx}{\sqrt{(1-V^2)}}.$$

Telle est la solution du *problème inverse des rayons de courbure.*

Soit $(1+y'^2) + xy'y'' = ay''\sqrt{(1+y'^2)}$: on met cette équ. sous la forme

$$dx(1+y'^2) + xy'dy' = ady' \cdot \sqrt{(1+y'^2)}$$

qui est linéaire (n° 857) et devient intégrable en la divisant par $\sqrt{(1+y)^2}$ (*voy.* p. 458). On trouve

$$x = \frac{(ay'+b)}{\sqrt{(1+y'^2)}}.$$

Mais $y = y'x - \int x dy'$, devient

$$y = y'x - a\sqrt{(1+y'^2)} - b\,\mathrm{l}[y' + \sqrt{(1+y'^2)}] + b\,\mathrm{l}\,c$$

$$= \frac{by'-a}{\sqrt{(1+y'^2)}} - b\,\mathrm{l}\left(\frac{y'+\sqrt{(1+y'^2)}}{c}\right);$$

il ne reste plus qu'à chasser de là y', à l'aide de la valeur de x. On trouve, tout calcul fait, et en faisant, pour abréger, $z = \sqrt{(a^2+b^2-x^2)}$,

$$y = z + b\,\mathrm{l}\,\frac{x+a}{c\,(b+z)}.$$

Enfin $2(a^2y'^2+x^2)y'' = xy'$ donne l'équ. homogène (n° 855) $2(a^2y'^2+x^2)dy' = xy'dx$, qu'on sépare en posant $x = y'z$; d'où

$$\frac{dy'}{y'} = \frac{zdz}{2a^2+z^2}.$$

On intègre par log., et il vient

$$y' = c\sqrt{(2a^2+z^2)}, \quad \text{et} \quad x = cz\sqrt{(2a^2+z^2)};$$

or, $y = \int y'dx$, lorsqu'on met pour y' et dx leurs valeurs en z, devient $y = \frac{2}{3}c^2z(3a^2+z^2)+b$. Il faudra enfin éliminer z entre ces valeurs de x et de y.

V. 883. Supposons que l'équation du 2e ordre ait la forme $F(y'', y', y) = 0$, c'est-à-dire que x *n'y entre pas*. La substitution de la valeur (*A*, p. 479) de y'', réduira la proposée au 1er ordre entre y et y'.

Par ex., si $y'' = f(y', y)$, on trouve $y'dy' = dy \,.\, f(y', y)$, dont la forme est assez simple.

1° Si l'intégrale qu'on obtiendra est résoluble par rapport à y', en sorte que $y' = fy$, on aura $dx = \frac{dy}{y'} = \frac{dy}{fy}$, et l'on en conclura aisément x en y.

2° Si l'on peut tirer y en fonction de y', ou $y = fy'$, $dy = y'dx$ donnera

$$x = \int \frac{d \,.\, fy'}{y'} = \frac{fy'}{y'} + \int \frac{fy'}{y'^2} \,.\, dy';$$

on chassera ensuite y' de l'intégrale à l'aide de $y = fy'$.

3° Enfin, si ces deux cas n'ont pas lieu, on cherchera à exprimer y' et y en fonctions d'une 3e variable z, et $y'dx = dy$ deviendra $Zdx = Tdz$, etc.

L'équ. $y''(yy' + a) = y'(1 + y'^2)$ se change en

$$dy'(yy' + a) = dy(1 + y'^2);$$

d'où (p. 451) $$y = ay' + c\sqrt{(1 + y'^2)};$$

$$x = \int \frac{dy}{y'} = a\,\mathrm{l}(by') + c\,\mathrm{l}[y' + \sqrt{(1 + y'^2)}].$$

Il faut ensuite éliminer y' entre ces équ. On trouve, par ex., lorsque $c = 0$,

$$x = a\,\mathrm{l}\left(\frac{by}{a}\right); \quad \text{d'où} \quad y = Ce^{\frac{x}{a}}.$$

L'équ. $aby'' = \sqrt{(y^2 + a^2y'^2)}$ devient

$$aby'dy' = dy\sqrt{(y^2 + a^2y'^2)}.$$

Pour intégrer, on fera $y' = \frac{y}{z}$, à cause de l'homogénéité, et l'on aura $abzdy - abydz = z^2dy\sqrt{(z^2 + a^2)}$; l'équ. est séparable, et faisant ensuite $\sqrt{(z^2 + a^2)} = tz$, on en tire z, dz, et l'on substitue ;

on trouve $\frac{dy}{y} = \frac{-btdt}{bt^2 - at - b}$; il sera aisé d'obtenir y en fonction de t, ainsi que y' : par conséquent aussi $x = \int \frac{dy}{y'}$. On éliminera ensuite t.

Soit $y'' + Ay' + By = 0$, A et B étant constants : on a l'équ. homogène $y'dy' + Ay'\,dy + B\,ydy = 0$; on fait $y' = yu$;

d'où $$\frac{dy}{y'} = \frac{dy}{yu} = \frac{-du}{u^2 + Au + B} = \frac{-du}{(u-a)\,(u-b)},$$

en désignant par a et b les racines de $u^2 + Au + B = 0$; et à cause de $dy = y'dx$, on trouve

$$\frac{dy}{y} - adx = \frac{-du}{u-b}, \qquad \frac{dy}{y} - bdx = \frac{-du}{u-a},$$

$$\mathrm{l}\,y - ax = \mathrm{l}\left(\frac{m}{u-b}\right), \qquad \mathrm{l}\,y - bx = \mathrm{l}\left(\frac{n}{u-a}\right),$$

$$u - a = \frac{n}{y}e^{bx}, \qquad u - b = \frac{m}{y}e^{ax};$$

enfin, retranchant, on obtient pour intégrale complète,

$$y\,(b-a) = -me^{ax} + ne^{bx},$$

qu'on peut mettre sous la forme $y = Ce^{ax} + De^{bx}$, C et D étant des constantes arbitraires.

Si a et b sont imaginaires, ou $a = k - h\sqrt{-1}$, $b = k + h\sqrt{-1}$, on trouve, en substituant ci-dessus,

$$y = e^{kx}\,(Ce^{-hx\sqrt{-1}} + De^{hx\sqrt{-1}}).$$

Mettant pour $e^{\mp hx\sqrt{-1}}$ sa valeur (L, p. 232), on a

$$y = e^{kx}\,(C'\cos hx + D'\sin hx) = C''\,e^{kx}\cos(hx + f).$$

Enfin, si $a = b$, en reprenant le calcul, on a

$$\frac{dy}{y} = \frac{-udu}{(u-a)^2}, \text{ d'où } y\,(u-a) = ce^{\frac{a}{u-a}};$$

or, $$dx = \frac{dy}{y'} = \frac{dy}{yu} = \frac{-du}{(u-a)^2}; \quad \text{d'où} \quad u - a = \frac{1}{x+k}:$$

éliminant $u - a$, on trouve enfin

$$y = ce^{a(x+k)}\,(x+k) = Ce^{ax}\,(x+k).$$

884. L'équ. $y'' + Py' + Qy = 0$, P et Q étant des fonctions quelconques de x, s'intègre par une transformation très-simple. On fait

$$y = e^{\int u dx}, \quad y' = ue^{\int u dx}, \quad y'' = e^{\int u dx}(u' + u^2);$$

d'où
$$u' + (u^2 + Pu + Q) = 0,$$

parce que le facteur commun $e^{\int u dx}$ disparaît. Le calcul est donc réduit à l'intégration de l'équation du premier ordre,

$$du + (u^2 + Pu + Q)\,dx = 0.$$

Par exemple, si P et Q sont constants, et a, b les racines de $u^2 + Pu + Q = 0$, il est évident que $u = a$ et $u = b$ satisfont à cette transformée : donc on a $\int u dx = ax + m$, ou $= bx + n$, et

$$y = e^{ax+m} = Ce^{ax}, \quad \text{ou} \quad y = e^{bx+n} = De^{bx}.$$

La somme de ces valeurs de y satisfait donc à la proposée ; ainsi son intégrale complète est, à cause des deux constantes arbitraires C et D, $y = Ce^{ax} + De^{bx}$.

Quand les racines de $u^2 + Pu + Q = 0$ sont imaginaires, ou $u = k \pm h\sqrt{-1}$, on a vu ci-dessus comment ce résultat prend la forme $y = Ce^{kx} \cos(hx + f)$. Et si les racines sont égales, il faut intégrer l'équation $du + (u - a)^2 dx = 0$, qui donne

$$u - a = \frac{1}{x + k}; \text{ d'où}$$

$$\int u dx = 1(x + k) + ax + D, \quad y = e^{\int u dx} = Ce^{ax}(x + k).$$

On retrouve donc ainsi les résultats obtenus dans le dernier exemple.

885. Intégrons l'équ. *linéaire* ou du 1er *degré* en y,

$$y'' + Py' + Qy = R,$$

P, Q et R étant des fonctions quelconques de x seul. Il est aisé de ramener l'intégrale de cette équ. à celle du paragraphe précédent, en faisant disparaître le terme R. Pour cela, faisons, comme n° 857, $y = tz$; d'où

$$y' = tz' + zt', \quad y'' = tz'' + 2z't' + zt''.$$

En substituant et partageant l'équ. résultante en deux autres, à cause des variables t et z, on a

$$z'' + Pz' + Qz = 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

et
$$t'' + t'\left(P + \frac{2z'}{z}\right) = \frac{R}{z},$$

ou
$$\mathrm{d}t' + t'\left(P + \frac{2z'}{z}\right)\mathrm{d}x = \frac{R\mathrm{d}x}{z}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Supposons que la 1re soit intégrée (n° 884), et qu'on en ait tiré la valeur de z en x; la 2e sera linéaire du 1er ordre entre t' et x, et sera facile à intégrer d'après ce qu'on a vu (n° 857).

En changeant (n° 857), y en t', P en $P + \frac{2z'}{z}$, Q en $\frac{R}{z}$, on a

$$u = \int P\mathrm{d}x + 2\,\mathrm{l}z,$$

$e^u = e^{\int P\mathrm{d}x} \, . \, e^{\mathrm{l}z^2} = \varphi \, . \, z^2$ (n° 149, 12°), en faisant, pour abréger,

$$\varphi = e^{\int P\mathrm{d}x}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Donc on a
$$\varphi z^2 t' = \int R\varphi z\mathrm{d}x,$$

puis
$$y = tz = z\int\left(\frac{\mathrm{d}x}{\varphi z^2}\int R\varphi z\mathrm{d}x\right). \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

La double intégration que renferme ce résultat introduit deux constantes arbitraires, et par conséquent l'intégrale complète de la proposée permet d'employer pour les valeurs de z et φ des fonctions quelconques de x qui satisfassent aux équ. (1) et (3).

Appliquons ces préceptes à $y'' + \frac{y'}{x} - \frac{y}{x^2} = \frac{a}{x^2 - 1}$,

équ. où
$$P = \frac{1}{x}, \quad Q = -\frac{1}{x^2}, \quad R = \frac{a}{x^2 - 1};$$

1° l'équ. (1) devient

$$z'' + \frac{z'}{x} = \frac{z}{x^2}; \quad \text{d'où } \mathrm{d}u + \left(u^2 + \frac{u}{x} - \frac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}x = 0,$$

à cause de $z = e^{\int u\mathrm{d}x}$ (n° 884) : cette équ. est rendue homogène e faisant $u = v^{-1}$, et l'on sépare ensuite, en posant $x = vs$ (n° 855).

On trouve

$$\frac{dv}{v} = -\frac{s^2 + s - 1}{s(s^2 - 1)}\,ds, \quad \text{d'où} \quad v = \frac{1}{s}\sqrt{\left(\frac{s+1}{s-1}\right)}:$$

on n'ajoute pas de constante. Restituant pour v et s leurs valeurs u^{-1} et ux, on obtient

$$u = \frac{x^2 + 1}{x(x^2 - 1)}, \quad \int u\,dx = l\frac{x^2 - 1}{x}, \quad z = e^{\int u dx} = \frac{x^2 - 1}{x}.$$

2° D'un autre côté, l'équ. (3) donne $\varphi = x$; d'où l'on tire $\int R\varphi z dx = \int a dx = ax + b$, et l'équ. (4) devient

$$y = \frac{x^2 - 1}{x}\int \frac{(ax + b)\,x dx}{(x^2 - 1)^2}:$$

cette dernière intégrale revient (n° 617) au quart de

$$\int\left(\frac{a-b}{(x+1)^2} - \frac{a}{x+1} + \frac{a+b}{(x-1)^2} + \frac{a}{x-1}\right)dx = -2\frac{ax+b}{x^2-1} + a\,l\left(c\frac{x-1}{x+1}\right);$$

donc $\quad y = -\dfrac{ax + b}{2x} + \dfrac{x^2 - 1}{4x}\,a\,l\left[c\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)\right].$

De même, $y'' - \dfrac{a^2 - 1}{4x^2}y = \dfrac{m}{\sqrt{x^{a+1}}}$ donne pour l'équ. (1), $z'' - \dfrac{(a^2 - 1)z}{4x^2} = 0$; on y satisfait en prenant $z = \sqrt{x^{a+1}}$. D'ailleurs $\varphi = 1$, et $\int R\varphi z dx = \int m dx = mx + b$; donc

$$y = z\int\frac{(mx + b)\,dx}{x^{a+1}} = \frac{1}{\sqrt{x^{a-1}}}\left(cx^a - \frac{b}{a} - \frac{mx}{a-1}\right).$$

886. Lorsqu'en comptant y, x, dy, dx, et d^2y, chacun pour un facteur, l'équ. est *homogène;* on l'intègre en posant

$$y = ux, \quad dy = y'dx, \quad y''x = z, \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

u, y' et z étant de nouvelles variables. En effet, la transformée, dans notre hypothèse d'homogénéité, aura partout x en facteur à la même puissance, attendu que y' et y'' sont censés être des degrés, 0 et -1 (n° 855). Ainsi, la division dégageant l'équ. de la variable x, elle sera réduite à la forme $z = f(y', u)$.

Or, on a $dy = y'dx = udx + xdu$, $xdy' = zdx$,

$$(2) \ldots\ldots \frac{dx}{x} = \frac{du}{y' - u}, \quad \text{ou} \quad \frac{dy'}{z} = \frac{du}{y' - u}; \ldots\ldots (3)$$

mettant f pour z dans (3), cette équ. est du 1er ordre en y et u, et on l'intégrera : qu'on tire de là $y' = \varphi u$, et qu'on substitue dans (2), cette équ. séparée aura pour intégrale $\mathrm{l}\, x = \psi u$; il restera à éliminer u, à l'aide de $y = ux$, et l'on aura l'intégrale complète, puisque les équ. (3) et (2) ont introduit chacune une constante arbitraire.

Par ex., $xd^2y = dydx$, ou $xy'' = y'$, donne $z = y'$, et (3) devient

$$dy'(y' - u) = y'du, \text{ d'où } \tfrac{1}{2} y'^2 = \int (udy' + y'du) = y'u + \tfrac{1}{2} c.$$

Or, $\dfrac{dx}{x} = \dfrac{dy'}{y'}$ donne $x = ay'$; ainsi, éliminant y' entre ces deux intégrales, il vient $x^2 - 2axu = C$; puis, éliminant u de $y = ux$, $x^2 - 2ay = C$ est l'intégrale cherchée.

887. Soit l'équ. $Ay + By' + \ldots Ky^{(n)} = 0$, dont les coefficients sont constants; faisons $y = ce^{hx}$, d'où

$$A + Bh + Ch^2 + \ldots Kh^n = 0 \quad \ldots\ldots (M)$$

Donc, si l'on prend pour h les n racines $h, k, l \ldots$ de cette équ., et pour c les n constantes $c, c', c'' \ldots$, la proposée sera satisfaite par toutes les valeurs $y = ce^{hx}, c'e^{kx} \ldots$ ainsi que par la somme de ces quantités : l'intégrale complète est donc

$$y = ce^{hx} + c'e^{kx} + c''e^{lx} + \ldots\ldots (N)$$

S'il y a des racines imaginaires, elles seront par couples, $h = a \pm b\sqrt{-1}$, et deux de nos termes réunis formeront $e^{ax}(ce^{bx\sqrt{-1}} + c'e^{-bx\sqrt{-1}})$, qu'on réduit (équ. *L*. p. 232) à

$$e^{ax}(m \cos bx + n \sin bx) = ke^{ax} \sin(bx + l).$$

888. Lorsque l'équ. (*M*) a des racines égales, (*N*) n'est plus qu'une intégrale particulière. Que $h = k$, par ex., les deux premiers termes de (*N*) se réduisent à $(c + c')e^{hx}$, où $c + c'$ ne compte que pour une seule constante, et il n'y a plus que $n - 1$ arbitraires.

1° Si toutes les racines de (*M*) sont égales, la proposée est

$$h^n y - nh^{n-1} y' + \tfrac{1}{2} n(n-1) h^{n-2} y'' \ldots \pm y^{(n)} = 0, \ldots (P)$$

puisque (M) revient alors à $(h - h)^n = 0$. Or, soit $y = ut$, d'où $y' = ut' + tu'$, $y'' = ut'' + 2t'u' + u''t$, $y''' = ut''' + 3$, etc..., faisons $t = e^{hx}$; comme $t' = he^{hx} = ht$, $t'' = h^2t \ldots$, $t^{(i)} = h^it$, on trouve

$$y = ut,\ y' = t(hu + u'),\ \ y'' = t(h^2u + 2hu' + u'')\ldots.$$
$$y^{(i)} = t(h^iu + ih^{i-1}u' + \tfrac{1}{2}i(i-1)h^{i-2}u'' \ldots. + u^{(i)}).$$

Substituons dans (P), et nous aurons une équ. dont tous les termes s'entre-détruiront, excepté le dernier $u^{(n)}$; donc $u^{(n)} = 0$, savoir, $u = a + bx + cx^2 \ldots. + fx^{n-1}$; et il vient pour l'intégrale complète, dans le cas supposé,

$$y = ut = (a + bx + cx^2 \ldots. + fx^{n-1})e^{hx}.$$

2° Quand l'équ. (M) a m racines $= \alpha$, elle a $(h - \alpha)^m$ pour facteur, sous la forme $h^m + Ah^{m-1} + Bh^{m-2} + \ldots. + \alpha^m$. Composons l'équ.

$$h^my + Ah^{m-1}y' + Bh^{m-2}y'' \ldots. \pm y^{(m)} = 0.$$

On a vu que l'intégrale de celle-ci est $(a + bx \ldots. + fx^{m-1})e^{\alpha x}$. D'un autre côté, la proposée est satisfaite par $y = ce^{hx}$, $c'e^{lx} \ldots.$, valeurs correspondantes aux $n - m$ racines inégales de h dans l'équ. (M). Comme, par la propriété des équ. linéaires, la somme de ces solutions doit aussi satisfaire à la proposée, l'intégrale complète est

$$y = (a + bx \ldots. + fx^{m-1})e^{\alpha x} + ce^{hx} + c'e^{lx} + \ldots.$$

$a, b \ldots. f, c, c' \ldots.$ sont les n constantes arbitraires; $\alpha, h, l \ldots.$ sont les racines de l'équ. (M).

Ainsi pour $y - 2y' + 2y'' - 2y''' + y^{\text{IV}} = 0$, on trouve

$$1 - 2h + 2h^2 - 2h^3 + h^4 = 0 = (1 - h)^2(1 + h^2),$$

d'où
$$y = (a + bx)e^x + ce^{x\sqrt{-1}} + de^{x\sqrt{-1}},$$
$$y = e^x(a + bx) + A\cos x + B\sin x.$$

889. L'équation *Linéaire de tous les ordres* est

$$Ay + By' + Cy'' + \ldots. + Ky^{(n)} = X.$$

Supposons que X désigne une fonction donnée de x, et que $A, B\ldots.$ soient constants. On sait toujours réduire l'intégration à la résolution des équ. par le procédé suivant, que nous appliquerons seulement au 2[e] ordre :

$$Ay + By' + Cy'' = X.$$

Soit $e^{-hx}dx$ le facteur qui rend cette équation intégrable : comme $Xe^{-hx}dx$ est la différentielle d'une fonction de x, telle que P, le 1[er] membre $e^{-hx}dx\,(Ay + By' + Cy'')$, est aussi celle d'une fonction de la forme $e^{-hx}(ay + by')$. Différentions donc ce résultat, et comparons terme à terme, nous aurons

$$-ha = A, \quad -hb + a = B, \quad b = C,$$

d'où $$A + Bh + Ch^2 = 0, \quad a = -\frac{A}{h}, \quad b = C.$$

La constante inconnue h est l'une des racines de la 1[re] de ces équ. ; les deux autres donnent a et b, et l'intégrale du 1[er] ordre,

$$ay + by' = e^{hx}(P + c).$$

Il faudra de nouveau opérer sur cette équation, ou plutôt mettre pour h les deux racines h' et h'', puis éliminer y' entre les deux résultats, ce qui donnera l'intégrale complète (n° 872).

Pour l'équation du degré n, le même raisonnement prouve que h est racine de l'équ.

$$A + Bh + Ch^2 \ldots. + Kh^n = 0,$$

et autant on connaîtra de ces racines, autant on aura d'intégrales de l'ordre $n - 1$, de la forme

$$ay + by' + cy'' + \ldots. ky^{(n-1)} = e^{hx}(P + c),$$

entre lesquelles on éliminera un nombre égal de quantités $y^{(n-1)}$, $y^{(n-2)}\ldots.$, ce qui réduira le problème à un ordre d'autant moindre, ou même fera connaître l'intégrale complète, si l'on a toutes les racines h (*voyez* le *Calcul intégr. d'Euler*, t. II, p. 402). On a

$$a = -\frac{A}{h}, \quad b = \frac{a - B}{h}, \quad c = \frac{b - C}{h} \ldots. l = \frac{k - L}{h}.$$

Eliminations entre les Équations différentielles.

890. Si l'on a deux équ. entre x, y et t, l'élimination de t conduira à une relation entre x et y ; mais si ces équ. sont différentielles, ce calcul exige des procédés nouveaux.

$$(Mx + Ny)\,dt + P\,dx + Q\,dy = \tau dt,$$
$$(M_{,}x + N_{,}y)\,dt + P_{,}\,dx + Q_{,}\,dy = \tau_{,}dt,$$

étant les équ. les plus générales à trois inconnues, éliminons dy, divisons par le coefficient de dx, et faisons-en autant pour dx ; nos équ. seront mises sous la forme la plus simple

$$(ax + by)\,dt + dx = T dt,$$
$$(a'x + b'y)\,dt + dy = S dt.$$

Nous supposerons ici que les coefficients sont constants, et T, S des fonctions de t. Multiplions la 2e par une indéterminée k, et ajoutons à la 1re, nous aurons

$$(a + a'k)\left(x + \frac{b + b'k}{a + a'k}y\right)dt + (dx + kdy) = (T + Sk)\,dt.$$

Cela posé, il est visible que le 2e terme $dx + kdy$ serait la différentielle du 1er, abstraction faite de $(a + a'k)dt$, si l'on avait

$$k = \frac{b + b'k}{a + a'k}, \text{ où } a'k^2 + (a - b')\,k = b.$$

Prenant pour k l'une des racines de cette équ., l'on aura

$$(a + a'k)\,(x + ky)\,dt + dx + kdy = (T + Sk)\,dt,$$

ou $$(a + a'k)\,udt + du = T + Sk)\,dt,$$

en faisant $x + ky = u$. Il sera aisé d'intégrer cette équation linéaire (n° 857), et d'en tirer la valeur de u en fonction de t, ou $x + ky = ft$; on mettra tour à tour pour k les deux racines de notre équ., et il ne restera plus qu'à éliminer t entre les résultats.

Si les racines de k sont imaginaires, on remplace les exponentielles par des sin. et cos., comme n°s 883 et 884. Et si elles sont

égales, on n'obtient, il est vrai, qu'une seule intégrale entre x, y et t; mais en tirant la valeur de l'une de ces variables, et substituant dans l'une des proposées, on doit intégrer de nouveau l'équ. résultante à deux variables.

891. Si l'on a trois équ. et quatre variables x, y, z et t, pour éliminer z et t, et obtenir une relation entre x et y, on posera

$$(ax + by + cz)\,dt + dx = T\,dt,$$
$$(a'x + b'y + c'z)\,dt + dy = S\,dt,$$
$$(a''x + b''y + c''z)\,dt + dz = R\,dt.$$

Nous supposons que T, S et R sont fonctions de t seul, et que les autres coefficients sont constants. Pour opérer de même, multiplions la 2e par k et la 3e par l, k et l étant deux indéterminées; puis, ajoutant le tout, mettons le résultat sous la forme

$$(a + a'k + a''l)\left(x + \frac{b + b'k + b''l}{a + a'k + a''l}\,y + \frac{c + c'k + c''l}{a + a'k + a''l}\,z\right)dt$$
$$+ dx + k\,dy + l\,dz = (T + Sk + Rl)\,dt.$$

Or, il est clair que la partie renfermée entre les crochets aura pour différentielle $dx + k\,dy + l\,dz$, si l'on détermine l et k par les conditions

$$\frac{b + b'k + b''l}{a + a'k + a''l} = k, \quad \frac{c + c'k + c''l}{a + a'k + a''l} = l;$$

donc, si l'on fait $x + ky + lz = u$, on aura

$$(a + a'k + a''l)\,u\,dt + du = (T + Sk + Rl)\,dt.$$

Intégrant cette équation linéaire, il viendra u en fonction de t, ou $x + ky + lz = ft$; et comme k et l sont donnés par des équ. du 3e degré, en en substituant les racines dans cette intégrale, elle donnera trois équ. entre x, y, t et z, qui serviront à éliminer t et z.

892. Si l'on a les équ. du 2e ordre

$$d^2y + (a\,dy + b\,dx)\,dt + (cy + gx)\,dt^2 = T\,dt^2,$$
$$d^2x + (a'\,dy + b'\,dx)\,dt + (c'y + g'x)\,dt^2 = S\,dt^2,$$

on fera $$dy = p\,dt, \quad dx = q\,dt,$$

et l'on aura $$dp + (ap + bq + cy + gx)\,dt = T\,dt,$$
$$dq + (a'p + b'q + c'y + g'x)\,dt = S\,dt;$$

on aura donc quatre équ. entre les cinq variables p, q, x, y et t, et on les traitera par le procédé expliqué ci-dessus. On voit que ce genre de calcul s'applique en général aux équ. du 1er degré et de tous les ordres, quel que soit leur nombre.

Quelques Problèmes de Géométrie.

893. Lorsque, dans l'équ. $F(x, y, c) = 0$ d'une courbe, la constante c est arbitraire, et qu'on lui attribue successivement toutes les valeurs possibles, on a un système infini de lignes. On nomme *Trajectoires* les courbes qui coupent celles-ci sous le même angle; en sorte que si, par ex., la trajectoire est *Orthogonale*, en menant des tangentes à cette courbe et à la courbe variable, à leur point d'intersection, ces tangentes seront à angles droits.

Voici le moyen général d'obtenir l'éq. $f(x, y) = 0$ des trajectoires. Soit $F(Y, X, c) = 0$ l'équ. de la courbe mobile, à raison du paramètre variable c. Pour une valeur de c, cette courbe prend une situation déterminée AM (fig. 84) : menons des tangentes à cette ligne et à la trajectoire DM en leur point commun M; Y' et y' en fixeront les inclinaisons sur l'axe des x, et l'angle $T'MT$ qu'elles forment entre elles a pour tangente $a = \frac{y' - Y'}{1 + Y'y'}$, d'où

$$(1 + Y'y')a + Y' - y' = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Il faut ici remplacer Y et X par y et x, parce qu'il s'agit d'un point commun aux deux courbes : a est une constante ou une fonction donnée. Le raisonnement du n° 462 démontre que si l'on élimine c entre cette équation et celle $F(y, x, c) = 0$ de la courbe coupée, et qu'on intègre, on aura celle de la trajectoire. Si elle est orthogonale, on trouve simplement, au lieu de (1), l'éq.

$$1 + Y'y' = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Par ex., si l'on demande la courbe qui coupe à angle droit une droite qui tourne autour de l'origine, $Y = cX$ donnera $Y' = c$, et l'équ. (2) deviendra $1 + cy' = 0$: éliminant c à l'aide de $y = cx$, on trouve $xdx + ydy = 0$; d'où $x^2 + y^2 = A^2$. Donc la trajectoire st un cercle de rayon arbitraire.

Mais si la droite doit être coupée sous un angle donné, dont a est la tangente, le même calcul appliqué à l'équ. (1) donne pour la trajectoire, cette équ. différ. homogène (nº 855)

$$y + ax = y'(x - ay);$$

d'où $$a\,\mathrm{l}\,(c\sqrt{x^2 + y^2}) = \text{arc}\left(\text{tang} = \frac{y}{x}\right),$$

équ. qui appartient à la spirale logarithmique (nº 474), ainsi qu'on peut s'en convaincre en traduisant cette relation en coordonnées polaires (nº 385).

Pour l'équ. $X^m Y^n = c$, qui appartient aux hyperboles et paraboles de tous les ordres, le même calcul donne l'équ. homogène

$$(nx + amy)\,y' = anx - my.$$

Quand la trajectoire doit être orthogonale, $myy' = nx$ ayant pour intégrale $my^2 - nx^2 = A$, cette courbe est une hyperbole du deuxième degré, ou une ellipse, suivant que l'exposant n est positif ou négatif.

La trajectoire orthogonale du cercle qui a pour équation $y^2 = 2cx - x^2$, est un autre cercle dont l'équ. est $y^2 + x^2 = Ay$. On le construit en prenant pour centre un point quelconque de l'axe des y, et pour rayon la distance de ce point à l'origine.

894. Lorsqu'on se propose de trouver une courbe dont la soustangente ou la tangente.... soit une fonction donnée φ de x et de y, il suit des formules (nº 762) qu'il faut intégrer les équations $y = y'\varphi$, $y\sqrt{(1 + y'^2)} = y'\varphi$.... C'est pour cela qu'on a donné le nom de *méthode inverse des tangentes* à la branche de calcul qui est relative à l'intégration des équ. du 1er ordre entre x et y.

En voici quelques exemples :

Quelle est la courbe dont en chaque point la longueur n de la normale et l'abscisse t du pied de cette droite, ont entre elles une relation donnée $n = Ft$? Puisque (nº 762) on a $t = x + yy'$ et $n = y\sqrt{(1 + y'^2)}$, il est clair que le problème proposé se réduit à intégrer l'équ. $y\sqrt{(1 + y'^2)} = F(x + yy')$.

Si l'on veut que n et t soient les coordonnées d'une parabole, dont $2p$ est le paramètre, il faut que $n^2 = 2pt$, d'où

$$y^2(1 + y'^2) = 2p(x + yy').$$

Pour intégrer cette équ., résolvons-la par rapport à yy', puis divisons tout par le radical, nous aurons

$$\frac{p - yy'}{\sqrt{(p^2 + 2px - y^2)}} + 1 = 0 :$$

or, le 1[er] terme est visiblement la dérivée de $\sqrt{(p^2 + 2px - y^2)}$, donc $\sqrt{(p^2 + 2px - y^2)} = a - x$. Si l'on carre, on obtient, en mettant c au lieu de la constante arbitraire $a + p$,

$$y^2 + x^2 - 2cx + c^2 - 2pc = 0.$$

La courbe cherchée est donc un cercle dont le centre est en un lieu quelconque de l'axe des x, et dont le rayon est moyen proportionnel entre $2p$ et la distance de ce point à l'origine. C'est, au reste, ce qui est d'ailleurs visible.

Mais, outre cette multitude infinie de cercles qui satisfont au problème, il y a encore pour solution une parabole; car, en remontant aux procédés des n[os] 863 et 867, on trouvera l'équ. singulière $y^2 = 2px + p^2$. Il est facile de vérifier (comme on l'a vu n° 864, 3°) que cette parabole résulte de l'intersection continuelle de tous les cercles successifs compris dans la solution générale.

895. Trouver une courbe telle, que les perpend. abaissées de deux points fixes sur toutes ses tangentes forment un rectangle constant $= k$. Prenons pour axe des x la ligne qui joint les deux points, l'un étant à l'origine, et l'autre distant de $2a$: le n° 374 fait connaître les expressions des distances de ces deux points à la tangente, qui a pour équ. $Y - y = y'(X - x)$, et l'on trouve

$$(2ay' + y - y'x)(y - y'x) = k(1 + y'^2). \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Cette équ. s'intègre en la différentiant d'abord; y'' est facteur commun, et l'on trouve $y'' = 0$, et

$$-x(2ay' + y - y'x) + (y - y'x)(2a - x) = 2ky'; \ldots . (2)$$

la 1[re] donne $y' = c$, qui change la proposée en

$$(2ac + y - cx)(y - cx) = k(1 + c^2);$$

ce sont les équ. de deux droites ; et il est aisé de s'assurer qu'elles répondent en effet au problème. Le nombre des droites comprises par couple dans cette relation est d'ailleurs infini.

Quant à l'équ. (2), si l'on en tire la valeur de y', et qu'on la substitue dans (1), en changeant x en $x+a$, on a

$$y^2(a^2+k)+x^2=k\,(a^2+k).$$

On trouve donc une ellipse qui a pour foyers les points fixes donnés, et pour demi-axes $\sqrt{(k+a^2)}$ et $\sqrt{k}$. Cette courbe est une solution singulière du problème, et résulte de l'intersection successive des droites comprises dans l'intégrale complète.

On pourra s'exercer encore aux questions suivantes :

Trouver une courbe telle, que toutes les perpend. abaissées d'un point donné sur ses tangentes soient égales.

Quelle est la courbe telle, que les lignes menées à deux points fixes, d'un point quelconque de son cours, soient également inclinées sur la tangente ?

CHAPITRE V.

INTÉGRATION DES ÉQUATIONS QUI RENFERMENT TROIS VARIABLES.

Équations différentielles totales.

896. Puisque l'équ. $dz=pdx+qdy$ résulte de la somme des dérivées (n° 744) de $z=f(x,y)$, prises relativement à x et y considérées comme variables indépendantes, on en conclut que les fonctions de x et y représentées par p et q doivent être telles, qu'on ait (n° 743)

$$\frac{dp}{dy}=\frac{dq}{dx} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Si une équ. proposée satisfait à cette condition, on intégrera la différentielle exacte $pdx+qdy$, par le procédé du n° 859; le résultat sera la valeur de z ou $f(x,y)$. C'est ainsi que, d'après l'ex. I, p. 455, l'on voit que l'intégrale de

$$dz=\frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)}}+adx+2bydy,$$

est $$z=by^2+ax+\mathrm{l}\,c\,(x+\sqrt{1+x^2}).$$

897. Si l'équ. différentielle proposée est implicite,

$$Pdx + Qdy + Rdz = 0;$$

P, Q et R étant des fonctions de x, y et z, on pourra la mettre sous la forme $dz = pdx + qdy$, en faisant $p = -\frac{P}{R}$, $q = -\frac{Q}{R}$. Pour reconnaître si la condition (1) est remplie, comme p contient z qui est fonction de x et y, pour obtenir le premier membre de l'équ. (1), il ne faut pas se borner à regarder x comme constant dans p, et y comme variable; il faut en outre faire varier z par rapport à y; d'où (n° 744), $\frac{dp}{dy} + q \cdot \frac{dp}{dz}$, à cause de $q = \frac{dz}{dy}$. On en dira autant de q relativement à x; on a donc, au lieu de la condition (1),

$$\frac{dp}{dy} + q\frac{dp}{dz} = \frac{dq}{dx} + p\frac{dq}{dz}.$$

Remettant pour p et q leurs valeurs, on a

$$P\frac{dR}{dy} - R\frac{dP}{dy} + R\frac{dQ}{dx} - Q\frac{dR}{dx} + Q\frac{dP}{dz} - P\frac{dQ}{dz} = 0, \ldots (2)$$

équ. qui exprime que z est une fonction de deux variables indépendantes, auxquelles elle est liée par une seule équ.

898. Soit F le facteur qui rend l'équ. $Pdx + Qdy + Rdz = 0$, la différentielle exacte de $f(x, y, z) = 0$. Il suit des principes développés (p. 340), que, si l'on fait x constant, ou $dx = 0$, l'équation $FQdy + FRdz = 0$ doit être une différentielle exacte entre y et z: on doit en dire autant pour $dy = 0$, et $dz = 0$; d'où l'on tire

$$\frac{d \cdot FR}{dy} = \frac{d \cdot FQ}{dz}, \quad \frac{d \cdot FP}{dz} = \frac{d \cdot FR}{dx}, \quad \frac{d \cdot FQ}{dx} = \frac{d \cdot FP}{dy},$$

ou

$$\left.\begin{aligned} F\left\{\frac{dR}{dy} - \frac{dQ}{dz}\right\} &= Q\frac{dF}{dz} - R\frac{dF}{dy} \\ F\left\{\frac{dP}{dx} - \frac{dR}{dx}\right\} &= R\frac{dF}{dx} - P\frac{dF}{dz} \\ F\left\{\frac{dQ}{dx} - \frac{dP}{dy}\right\} &= P\frac{dF}{dy} - Q\frac{dF}{dx} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (3)$$

Or, si l'on multiplie respectivement ces équ., par P, Q et R, et qu'on les ajoute, les 2[es] membres se détruiront, en sorte que le facteur commun F disparaissant, on retombera sur la relation (2) ; donc on ne peut espérer de rendre la proposée intégrable à l'aide d'un facteur F, qu'autant que la condition (2) est satisfaite. Toute équation entre deux variables est intégrable, au moins par approximation, tandis qu'il n'en est pas de même des équ. à trois variables ou plus.

899. Si les différentielles passent le 1[er] degré, voici ce qui a lieu. Quelle que soit l'intégrale cherchée en la différentiant, il est clair qu'on peut la mettre sous la forme $Pdx + Qdy + Rdz = 0$, à laquelle la proposée doit être réductible ; donc, si l'on résout la proposée par rapport à dz, les dx et dy ne doivent pas demeurer engagés sous le radical : elle n'est donc intégrable qu'autant qu'elle est décomposable en facteurs rationnels. Pour

$$Adx^2 + Bdy^2 + Cdz^2 + Ddxdy + Edxdz + Fdydz = 0,$$

le radical compris dans la valeur de dz est

$$\sqrt{[(E^2 - 4AC)dx^2 + 2\,(EF - 2DC)dxdy + (F^2 - 4BC)dy^2]}\,;$$

en le soumettant à la condition connue (nº 138), on trouve

$$(EF - 2DC)^2 - (E^2 - 4AC)(F^2 - 4BC) = 0 \quad . \; . \; . \; (4)$$

Si cette équ. est satisfaite, on aura à intégrer deux équ. de la forme $Pdx + Qdy + Rdz = 0$, dont la proposée est le produit.

900. Pour intégrer $Pdx + Qdy + Rdz = 0$, lorsque la condition (2) est remplie, on regardera comme constante l'une des variables, telle que z ; puis on intégrera $Pdx + Qdy = 0$. Soit $f(x, y, z, Z) = 0$ l'intégrale, Z étant la constante arbitraire qui peut contenir z : on différentiera cette équ. complétement, et l'on comparera à la proposée ; il devra en résulter pour dZ une expression indépendante de x et y, fonction de z et Z seuls ; l'intégration fera connaître Z. Ce procédé résulte des principes mêmes de la différentiation des équ. (nº 744).

I. Soit $dx\,(y + z) + dy\,(x + z) + dz\,(x + y) = 0$; en faisant $dz = 0$, on a $dx\,(y + z) + dy\,(x + z) = 0$, dont l'intégrale (nº 853) est $(x + z)(y + z) = Z$. Différentions ce résultat, et comparons à la proposée, nous aurons $dZ = 2zdz$, d'où $Z = z^2 + c$. Donc l'intégrale demandée est $xz + yz + xy = c$.

II. Avant de traiter l'équ. $zdx + xdy + ydz = 0$, on la soumettra à la condition (2) ; et comme $x + y + z$ n'est pas nul, on voit que l'équ. n'est pas intégrable. Si l'on exécutait le calcul indiqué pour l'intégration, on trouverait que Z ne peut être dégagé de x et y.

III. Pour $[x(x-a)+y(y-b)]dz = (z-c)(xdx+ydy)$, la même chose a lieu, à moins que a et b ne soient nuls. Dans ce cas, on a $(x^2+y^2)dz = (z-c)(xdx+ydy)$; on intègre en faisant $dz=0$; d'où $x^2+y^2=Z^2$. Différentiant et comparant à la proposée, on trouve $Zdz = (z-c)dZ$; d'où $Z = A(z-c)$. Ainsi l'intégrale est $x^2+y^2 = A^2(z-c)^2$.

IV. Soit encore proposée l'équ.

$$(y^2+yz+z^2)dx + (x^2+xz+z^2)dy + (x^2+xy+y^2)dz = 0.$$

En faisant dz nul, on doit intégrer

$$\frac{dx}{x^2+xz+z^2} + \frac{dy}{y^2+yz+z^2} = 0 ; \text{ d'où}$$

$$\frac{2}{z\sqrt{3}}\left[\text{arc}\left(\text{tang} = \frac{z+2x}{z\sqrt{3}}\right) + \text{arc}\left(\text{tang} = \frac{z+2y}{z\sqrt{3}}\right)\right] = fz,$$

$$\text{ou* } \quad \text{arc}\left(\text{tang} = \frac{(x+y+z)z\sqrt{3}}{z^2-zx-zy-2xy}\right) = \tfrac{1}{2}z\sqrt{3}\,.fz.$$

Puisque cet arc est une fonction de z, sa tangente l'est aussi, et l'on peut poser, en faisant le dénominateur $=\varphi$,

$$\frac{(x+y+z)z}{z^2-zx-zy-2xy} = \frac{(x+y+z)z}{\varphi} = Z \ldots (a)$$

Différentions cette équ., chassons le dénominateur φ^2, et comparons à la proposée multipliée par $2z$; comme les termes en dx et dy sont

* On trouve souvent des formules dans lesquelles on doit ajouter des arcs donnés par leurs tang. Soit arc (tang $=\alpha$) + arc (tang $=\beta$) ; m et n désignant ces deux arcs, ou $\alpha = \text{tang}\, m$, $\beta = \text{tang}\, n$, il s'agit de trouver l'expression de l'arc $m+n$. On a (équ. K, nº 359)

$$\text{tang}\,(m+n) = \frac{\alpha+\beta}{1-\alpha\beta} ; \quad \text{d'où} \quad m+n = \text{arc}\left(\text{tang} = \frac{\alpha+\beta}{1-\alpha\beta}\right).$$

C'est ainsi qu'on a réduit l'équ. ci-dessus.

les mêmes des deux parts, on égale entre eux les autres termes ; savoir :

$$2(x^2+xy+y^2)z\,dz=-2(z^2x+z^2y+2xyz+x^2y+y^2x)\,dz-\varphi^2.dZ,$$
$$2(x^2z+3xyz+y^2z+z^2x+z^2y+x^2y+y^2x)\,dz+\varphi^2.dZ=0.$$

Mettons pour φ sa valeur tirée de (a), et supprimons le facteur commun $x+y+z$,

$$2(xy+yz+xz)Z^2dz+(x+y+z)z^2.dZ=0.$$

C'est cette équ. qui est destinée à donner Z en z, et qui doit ne pas contenir x et y. On tire de (a)

$$xz+yz=\frac{z^2Z-z^2-2xyZ}{Z+1}.$$

Substituant, on trouve que $2Z(z^2-xy)$ est facteur commun, et l'on a $Z(Z-1)\,dz+z.dZ=0$; donc

$$\frac{dz}{z}=\frac{dZ}{Z}-\frac{dZ}{Z-1},\quad z=\frac{cZ}{Z-1},\quad Z=\frac{z}{z-c}.$$

Avec cette valeur de Z, l'équ. (a) est l'intégrale demandée, qu'on peut écrire $xy+xz+yz=c(x+y+z)$.

901. Si la condition (2) n'est pas satisfaite, en suivant le procédé qu'on vient d'indiquer, dZ ne peut plus être exprimé en z et Z seuls. F étant le facteur qui rend intégrable $Pdx+Qdy$, et $u+Z$ l'intégrale de $FPdx+FQdy$; comparons la différentielle de $u+Z=0$ avec $FPdx+FQdy+FRdz=0$; nous trouvons

$$u+Z=0,\quad \frac{du}{dz}+\frac{dZ}{dz}=FR\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (6)$$

x, y et z entrent ici, en sorte qu'on ne peut en tirer Z, ni l'intégrale demandée $u+Z=0$, comme cela arrive quand la condition d'intégrabilité est remplie. Il n'en résulte pas moins que $u+Z=0$ satisferait à la proposée et en serait l'intégrale, si l'on déterminait Z en fonction de z, $Z=\varphi z$, de manière à avoir en même temps la relation (5). Or, on a vu (nº 744) que, dans la différentiation des équ., on suppose tacitement que les variables x et y sont dépendantes, en vertu d'une relation arbitraire qui les lie l'une à l'autre. Dans le cas actuel, on ne peut intégrer sans établir cette dépendance : on

voit que, si l'on pose $Z=\varphi z$, le système de nos deux équ.

$$u+\varphi z=0,\quad \frac{du}{dz}+\varphi' z=FR. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

satisfait à la proposée, quelle que soit d'ailleurs la forme de la fonction φ.

Les équ. qui ne satisfont point à la condition d'intégrabilité étaient autrefois appelées *Absurdes* : on établissait en principe qu'elles ne signifiaient rien, et qu'un problème susceptible de solution ne pouvait jamais conduire à ces sortes de relations, qu'on prétendait équivaloir aux imaginaires. Monge prouva que cette opinion est fausse, en donnant la théorie précédente.

Si l'on cherche une surface courbe qui remplisse certaines conditions, lesquelles, traduites en analyse, conduisent à une équ. différentielle entre les coordonnées x, y et z, les points de l'espace qui satisfont au problème sont donc, dans le cas présent, non pas ceux d'une surface, mais ceux d'une courbe à double courbure, parce que l'équ. ne peut exister qu'en se partageant d'elle-même en deux, ainsi que cela s'est souvent rencontré d'ailleurs (nos 112, 573, 616). Bien plus, comme φ est arbitraire, ce n'est pas une seule courbe qui répond au problème, mais une infinité de courbes soumises à une loi commune.

Ainsi, pour $zdz+xdy+ydz=0$, on trouvera

$$F=x^{-1},\quad R=y,\quad y+z\,\mathrm{l}x=u;$$

d'où $$y+z\,\mathrm{l}x+\varphi z=0,\quad \mathrm{l}x+\varphi' z=yx^{-1},$$

pour les équ. (6) dont le système satisfait à la proposée, quelle que soit la fonction φ.

Dans l'ex. III du n° 900, on a

$$R=-x(x-a)-y(y-b),\quad F=(z-c)^{-1};\ \text{donc}$$

$$x^2+y^2+2\varphi z=0,\quad (z-c)\varphi' z+x(x-a)+y(y-b)=0.$$

Équations différentielles partielles du premier ordre.

902. Soit l'équ. $dz=pdx+qdy$; p et q sont les différentielles partielles de z, par rapport à x et y respectivement. Nous avons

donné les moyens de remonter de cette équation à son intégrale $z = f(x, y)$; proposons-nous maintenant de trouver l'équation $z = f(x, y)$ par la seule connaissance de l'un des coefficients p et q, ou d'une relation entre eux.

Prenons d'abord le cas où q n'entre pas dans la relation, savoir, $F(p, x, y, z) = 0$. On sait que les variables x et y sont indépendantes dans l'intégrale $z = f(x, y)$, l'une pouvant varier sans l'autre (n° 744); comme q n'est pas dans la proposée, cette équation se rapporte au cas où x et z ont seuls varié, puisque si y variait, la relation donnée $F = 0$ demeurerait la même. Il s'agit donc de faire $p = \frac{dz}{dx}$ dans la proposée, et d'intégrer une équ. entre les variables x et z, y étant supposé constant. Alors la constante additive à l'intégrale devra être *une fonction arbitraire de y*, que nous représenterons par φy.

Donc, *pour intégrer l'équation* F(p, x, y, z) = 0, *il faut en éliminer* p *à l'aide de* dz = pdx, *intégrer en prenant* y *constant, et ajouter* φy.

On raisonnera de même à l'égard de q pour intégrer l'équation

$$F(q, x, y, z) = 0.$$

Par ex., $p = 3x^2$ a pour intégrale $z = x^3 + \varphi y$.

Celle de $x = p\sqrt{(x^2 + y^2)}$, est $z = \sqrt{(x^2 + y^2)} + \varphi y$.

Pour $p\sqrt{(a^2 - y^2 - x^2)} = a$, on trouve

$$z = a \,.\, \text{arc}\left(\sin = \frac{x}{\sqrt{(a^2 - y^2)}}\right) + \varphi y.$$

Soit $qxy + az = 0$; on intègre $xydz + azdy = 0$, x étant constant, et l'on a $\text{l}\,(z^x y^a) = \text{l}\,c$; d'où $z^x y^a = \varphi x$.

Enfin, soit $p(y^2 + x^2) = y^2 + z^2$; d'où résulte l'équation homogène $(y^2 + x^2)\,dz = (y^2 + z^2)\,dx$, puis

$$\text{arc}\left(\text{tang} = \frac{z}{y}\right) - \text{arc}\left(\text{tang} = \frac{x}{y}\right) = c,$$

ou (note, page 498)

$$\text{arc}\left(\text{tang} = \frac{y(z - x)}{y^2 + xz}\right) = c, \quad \frac{z - x}{y^2 + xz} = \varphi y.$$

903. Prenons l'équ. générale *linéaire du* 1er *ordre*

$$Pp + Qq = V,$$

P, Q, V étant des fonctions données des x, y, z. Éliminons p de $dz = pdx + qdy$, nous aurons

$$Pdz - Vdx = q(Pdy - Qdx). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

équ. à laquelle il faut satisfaire de la manière la plus générale, q étant quelconque, puisque, d'après l'équ. proposée, q reste indéterminé. Quand les variables x, y, z, sont séparées dans cette équ., chaque membre peut être rendu intégrable en particulier. Soient $\pi = \alpha$, $\rho = \beta$, les intégrales des équations respectives

$$Pdz - Vdx = 0, \quad Pdy - Qdx = 0; \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

l'équation revient à $\mu d\pi = q\mu' d\rho$, μ et μ' étant les facteurs qui rendent les équ. (2) intégrables ; et pour que cette équ. le soit elle-même, il faut que $\frac{\mu'}{\mu} q$ soit une fonction de ρ, savoir, $\pi = \varphi\rho$, φ désignant une fonction tout à fait arbitraire.

Lorsque les x, y, z sont mêlées dans les équ. (2), si $\pi = \alpha$, et $\rho = \beta$, sont des fonctions qui y satisfont, la proposée a encore pour intégrale $\pi = \varphi\rho$; et c'est ce qui nous reste à démontrer.

En effet, pour reconnaître si la proposée est satisfaite par une équ. quelconque $\pi = \varphi\rho$, il faut qu'en la différentiant sous la forme $dz = pdx + qdy$, les valeurs qu'on trouvera pour p et q, étant substituées, donnent $Pp + Qq = V$. Les différentielles de $\pi = \alpha$, $\rho = \beta$ étant

$$d\pi = Adx + Bdy + Cdz = 0, \quad d\rho = adx + bdy + cdz = 0,$$

on trouve pour la différentielle de $\pi - \varphi\rho = 0$, relative

$$\text{à } z \text{ et } x. \ . \ . \ . \ (C - c \,.\, \varphi'\rho)p + A - a \,.\, \varphi'\rho = 0,$$
$$\text{à } z \text{ et } y. \ . \ . \ . \ (C - c \,.\, \varphi'\rho)q + B - b \,.\, \varphi'\rho = 0.$$

Tirant de là p et q, pour substituer dans $Pp + Qq = V$, on trouve que l'équ. $\pi = \varphi\rho$ satisfait à la proposée, si l'on a

$$AP + BQ + CV = \varphi'\rho \times (aP + bQ + cV).$$

Mais si l'on admet que les fonctions π et ρ ont été choisies de manière à satisfaire aux équ. (2), on peut tirer de celles-ci, dz et dx, pour substituer dans $d\pi = 0$ et $d\rho = 0$; et l'on trouve que les équ. qui expriment la condition déterminante de π et ρ, sont

$$AP + BQ + CV = 0, \quad aP + bQ + cV = 0;$$

ainsi $\pi = \varphi\rho$ satisfait à la proposée, la fonction φ demeurant arbitraire, et $\pi = \varphi\rho$ est l'intégrale demandée.

Si l'on élimine dx entre les équ. (2), il vient $Qdz - Vdy = 0$; deux des équ. suivantes contiennent donc la 3[e], et peuvent être employées indifféremment :

$$Pdz - Vdx = 0, \quad Pdy - Qdx = 0, \quad Qdz - Vdy = 0 \ldots \ (3)$$

Concluons de là, que *l'intégration de l'équ. aux différentielles partielles du* 1[er] *ordre* $Pp + Qq = V$, *se réduit à satisfaire à deux des équ.* (3), *par des fonctions* $\pi = \alpha$, $\rho = \beta$, *et à poser* $\pi = \varphi\rho$, φ *désignant une fonction arbitraire*, α et β des constantes, qui n'entrent pas dans l'intégrale, attendu que la fonction φ contient autant de constantes qu'on veut.

Si l'on fait $\varphi\rho =$ const., on a $\pi =$ const., qui satisfait aussi à la proposée ; en sorte que $\pi = \alpha$ et $\rho = \beta$ en sont des intégrales particulières.

904. Examinons d'abord ce qui arrive dans divers cas.

1° Si V est nul, l'une de nos équ. (3) est $dz = 0$, $z = \alpha = \pi$; il ne restera donc, dans la 2[e], que les deux variables x et y; l'intégrale $\rho = \beta$ s'obtiendra ensuite (chap. IV), et $z = \varphi\rho$ sera l'intégrale de $Pp + Qq = 0$.

Par ex., $py = qx$, donne $P = y$, $Q = -x$, $ydy + xdx = 0$, d'où $\rho = x^2 + y^2$, puis $z = \varphi(x^2 + y^2)$, équ. finie des surfaces de révolution autour de l'axe des z (n[os] 662 et 745).

Pour $px + qy = 0$, on trouve $xdy - ydx = 0$, $\mathrm{l}\,y = \mathrm{l}\,\alpha x$, $y = \alpha x$, $\dfrac{y}{x} = \rho$; enfin $z = \varphi\left(\dfrac{y}{x}\right)$; c'est l'équ. des conoïdes (n° 788).

De même, soit $q = pP$, P ne contenant pas z, l'intégrale est

$$z = \varphi\rho, \quad \rho = \int F(dx + Pdy),$$

F étant le facteur qui rend intégrable $dx + Pdy$.

2° Quand il arrive que deux des équ. (3) ne contiennent que deux variables et leurs différentielles, l'intégration donne aisément π et ρ.

Soit proposée l'équation $px + qy = nz$; d'où $xdz = nzdx$, $xdy = ydx$, puis $z = \alpha x^n$, $y = \beta x$; on en tire α et β, valeurs de π et ρ, et par suite l'intégrale cherchée $z = x^n\varphi\left(\dfrac{y}{x}\right)$. On voit que φ est homogène et quelconque ; et comme la proposée est l'énoncé

du théorème des fonctions homogènes (p. 459), on en retrouve ainsi la démonstration pour le cas de deux variables.

Pour $px^2 + qy^2 = z^2$, on a $x^2dz = z^2dx$, $x^2dy = y^2dx$; d'où $z^{-1} - x^{-1} = \pi$, $y^{-1} - x^{-1} = \rho$; donc l'intégrale est

$$\frac{1}{z} - \frac{1}{x} = \varphi\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{x}\right), \quad u \ \frac{x-z}{xz} = \varphi\left(\frac{x-y}{xy}\right).$$

X et V étant des fonctions de x seul, l'équ. $q = pX + V$, donne $Xdz + Vdx = 0$, $Xdy + dx = 0$, et

$$z = -\int \frac{Vdx}{X} + \varphi\left(y + \int \frac{dx}{X}\right).$$

3° Quand l'une des équ. (3) est seule entre deux variables, après l'avoir intégrée, on élimine à l'aide de ce résultat $\pi = \alpha$, l'une des variables de la 2e ou 3e de nos équ., puis on intègre, et l'on a $\rho = \beta$; on remet π pour α dans ρ, et l'on a $\pi = \varphi\rho$, ou $\rho = \varphi_1\pi$.

Soit $qxy - px^2 = y^2$; d'où $x^2dz + y^2dx = 0$, $x^2dy + xydx = 0$; celle-ci donne $xy = \beta$; mettant dans l'autre βx^{-1} pour y, il vient $dz + \beta^2x^{-4}dx = 0$; d'où $z = \frac{1}{3}\beta^2x^{-3} + \alpha$; remettant ici xy pour β, on a $z - \frac{1}{3}y^2x^{-1} = \alpha = \pi$; partant, l'intégrale demandée est $3zx = y^2 + 3x\varphi(xy)$.

Pour $px + qy = n\sqrt{(x^2 + y^2)}$, on a

$$xdz = ndx\sqrt{(x^2 + y^2)}, \quad xdy = ydx;$$

la 2e donne $y = \beta x$; chassant y de la 1re, elle devient

$$dz = n\sqrt{(1 + \beta^2)}\,dx; \quad \text{d'où} \quad z - nx\sqrt{(1 + \beta^2)} = \alpha,$$

puis $$\pi = z - n\sqrt{(x^2 + y^2)}, \quad \rho = yx^{-1};$$

et enfin $$z = n\sqrt{(x^2 + y^2)} + \varphi\left(\frac{y}{x}\right).$$

905. Mais quand x, y et z sont mêlées dans les équ. (3), il n'est plus possible d'intégrer chacune en particulier, car y ne peut être supposé constant dans la 1re, ni z dans la 2e.... On est alors obligé de recourir à des artifices particuliers d'analyse. C'est ainsi qu'on parvient souvent à intégrer, en substituant pour p ou q, dans les équ. suivantes, la valeur tirée de la proposée; ces équ. résultent de $dz = pdx + qdy$, traité par l'intégration par parties :

$$z = px + \int(qdy - xdp), \quad \ldots\ldots \quad (4)$$
$$z = qy + \int(pdx - ydq), \quad \ldots\ldots \quad (5)$$
$$z = px + qy - \int(xdp + ydq). \quad \ldots\ldots \quad (6)$$

Par ex., si p est une fonction donnée de q, telle que $p = Q$, la relation (6) devient

$$z = Qx + qy - \int (xQ' + y)\,dq;$$

d'où il suit que le facteur de dq doit ne contenir ni x, ni y,

$$xQ' + y = \varphi q, \quad z = Qx + qy - \varphi q;$$

la fonction φ est arbitraire. L'intégrale résulte ensuite de l'élimination de q entre ces deux équ., lorsque cette fonction φ a été déterminée (n° 919).

906. Après avoir mis dans $dz = p dx + q dy$, la valeur de p ou celle de q, tirée de la proposée, on a une équ. différentielle entre les quatre variables x, y, z et q ou p. Supposons que cette équ. soit réductible à être une différentielle exacte, en prenant pour constante p ou q, ou une fonction θ de cette lettre; et soit $f(x, y, z, \theta) = c$, l'intégrale dans cette hypothèse de θ constant. Il est visible que si l'on différentie cette équ., on reproduira celle d'où on l'a tirée, non-seulement θ et c demeurant constants; mais même, si θ et c sont des variables, pourvu qu'on ait $\frac{df}{d\theta} d\theta - dc = 0$. Ainsi, pour rendre à θ son état de fonction variable quelconque dans l'équ. différentielle, et que cependant l'équ. $f = c$ en soit toujours l'intégrale, il suffira de supposer que c est une fonction arbitraire de θ, telle, qu'on ait ensemble

$$f(x, y, z, \theta) = \varphi\theta, \quad \frac{df}{d\theta} = \varphi'\theta.$$

Dans le cas où la proposée est différentielle exacte, *θ étant pris pour constant, on intégrera dans cette hypothèse, et l'on aura la* 1[re] *de ces équ., qu'on différentiera ensuite relativement à θ seul, pour former la* 2[e]; le système de ces deux équ. satisfera à la proposée, φ étant une fonction arbitraire. Quand on aura déterminé φ (n° 919), il restera à éliminer θ entre elles, et l'on aura l'intégrale demandée.

Il suit de ce qu'on a vu (n° 805), que si la 1[re] équ. est considérée comme appartenant à une surface courbe dont θ serait un paramètre variable, ces deux équ. sont celles de la caractéristique; la recherche de cette courbe revient, comme on voit, à l'intégration de l'équ. proposée.

Soit donnée l'équ. $z = pq$; on trouve

$$dz = \frac{zdx}{q} + qdy, \quad dy = \frac{qdz - zdx}{q^2} = \frac{(\theta + x)\,dz - zdx}{(\theta + x)^2},$$

en posant $q = \theta + x$; l'intégrale est, pour θ constant,

$$y = \frac{z}{x + \theta} + \varphi\theta, \quad \text{d'où} \quad \frac{z}{(x + \theta)^2} = \varphi'\theta,$$

en différentiant relativement à θ seul. Le système de ces deux équ. est l'intégrale de la proposée $z = pq$.

907. On facilite souvent l'intégration en introduisant une indéterminée θ, qui permette de partager l'équation proposée en deux. Soit $f(p, x) = F(q,y)$; faisons $f(p, x) = \theta$; d'où $F(q, y) = \theta$; résolvons ces équ. par rapport à p et q, nous aurons

$$p = \psi(x, \theta), \quad q = \chi(y, \theta), \quad dz = \psi dx + \chi dy.$$

Intégrons en prenant θ constant, d'après ce qu'on vient de dire;

$$z + \varphi\theta = \int\psi dx + \int\chi dy:$$

il restera à différentier relativement à θ seul, et à éliminer θ entre ces équ., après avoir déterminé la fonction φ.

Par ex., pour l'équ. $a^2pq = x^2y^2$, on a

$$\frac{ap}{x^2} = \frac{y^2}{aq} = \theta, \quad p = \frac{x^2\theta}{a} = \psi, \quad q = \frac{y^2}{a\theta} = \chi.$$

Donc

$$3az + \varphi\theta = x^3\theta + \frac{y^3}{\theta}, \quad \varphi'\theta = x^3 = \frac{y^3}{\theta^2}.$$

908. Quand l'équ. $Pp + Qq = V$, est homogène en x, y, z, on fait $x = tz$, $y = uz$; P, Q, V se changent en P_1z^n, Q_1z^n, V_1z^n (nº 855), et les équ. (3) donnent

$$(P_1 - tV_1)\,dz = zV_1dt, \quad (Q_1 - uV_1)\,dz = zV_1du;$$

d'où
$$(P_1 - tV_1)\,du = (Q_1 - uV_1)\,dt.$$

L'intégrale de cette équ. en t et u étant trouvée, on s'en servira pour éliminer soit t, soit u, de l'une des précédentes, qu'on sait alors intégrer; enfin, éliminant u et t par $x = tz$, $y = uz$, on a les solutions π et ρ des équ. (3), et par suite l'intégrale $\pi = \varphi\rho$.

Pour l'équ. $pxz + qyz = x^2$, on trouve

$$(1-t^2)\,dz = ztdt, \quad u(1-t^2)\,dz = zt^2du;$$

d'où $$udt = tdu, \quad t = \alpha u, \quad z\sqrt{(1-t^2)} = \beta;$$

enfin, $$x = \alpha y, \quad \sqrt{(z^2 - x^2)} = \beta, \quad z^2 = x^2 + \varphi\left(\frac{x}{y}\right).$$

Équations différentielles partielles du deuxième ordre.

909. Outre les coefficients p et q du 1[er] ordre, l'équation peut contenir

$$\frac{d^2z}{dx^2} = r, \quad \frac{d^2z}{dxdy} = \frac{d^2z}{dydx} = s, \quad \frac{d^2z}{dy^2} = t; \ldots \quad (A)$$

d'où $$dp = rdx + sdy, \quad dq = sdx + tdy, \quad \ldots \quad (B)$$

$$d^2z = dpdx + dqdy = rdx^2 + 2sdxdy + tdy^2.$$

Il s'agit d'intégrer l'équ. $f(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0$.

Remarquons d'abord qu'on doit considérer y comme constant dans l'équation qui a la forme $r = Pp + Q$, qui revient à $\frac{d^2z}{dx^2} = P\frac{dz}{dx} + Q$, P et Q étant des fonctions de x, y et z; car les différentielles partielles q, s et t, qui se rapportent à la variation de y, n'entrent pas ici (n° 902) : on a alors à intégrer une équ. aux différentielles ordinaires du 2[e] ordre entre x et z; mais au lieu de la constante additive, on prendra une fonction arbitraire φy.

Par exemple, si z n'entre pas dans P et Q, en substituant $\frac{dz}{dx}$ pour p, on a $\frac{dp}{dx} = Pp + Q$; la fonction $(Pp + Q)\,dx$ est linéaire entre les variables p et x; y est d'ailleurs constant; l'intégrale est donc (n° 857), en faisant $u = \int Pdx$,

$$p = \frac{dz}{dx} = e^u\left(\int e^{-u}\, Qdx + \varphi y\right);$$

intégrant de nouveau, et ajoutant une nouvelle fonction arbitraire ψy, on a l'intégrale demandée.

Lorsque $P = 0$, on a $p = \int Qdx + \varphi y$; d'où

$$z = \int dx \int Qdx + x\varphi y + \psi y.$$

Pour l'équ. $xyr = (n-1)py + a$, comme dans cet exemple on a

$$P = \frac{n-1}{x}, \quad Q = \frac{a}{xy},$$

on obtient

$$\frac{dz}{dx} = \frac{-a}{(n-1)y} + x^{n-1}\varphi y, \quad z = \frac{-ax}{(n-1)y} + \frac{x^n}{n}\varphi y + \psi y.$$

Enfin soit $xr = (n-1)p$, on a $nz = x^n \varphi y + \psi y$.

910. Pour intégrer $t = Pq + Q$, ou $\frac{d^2z}{dy^2} = P\frac{dz}{dy} + Q$, il faut prendre x constant, et ajouter φx et ψx.

Soit $at = xy$; on a d'abord $q = \frac{dz}{dy} = \frac{y^2x}{2a} + \varphi x$; puis

$$6az = y^3x + y\varphi x + \psi x.$$

911. L'intégrale de $s = M$, ou $\frac{d^2z}{dxdy} = M$, rentre dans la théorie des cubatures (n° 852);

$$z = \int dx \int M dy + \varphi x + \psi y.$$

C'est ainsi que $s = ax + by$, donne

$$z = \tfrac{1}{2}xy(ax + by) + \varphi x + \psi y.$$

912. Soit $s = Mp + N$, M et N étant connus en x et y, ou

$$\frac{d^2z}{dxdy} = \frac{dp}{dy} = Mp + N;$$

p et y sont ici seules variables, et l'on retombe sur une équ. linéaire (n° 857); donc, faisant $u = \int M dy$, on a

$$p = \frac{dz}{dx} = e^u(\varphi' x + \int e^{-u} \cdot N dy).$$

Intégrant ensuite, par rapport à x, il vient

$$z = \int (e^u dx \int e^{-u} N dy) + \int e^u \varphi' x \cdot dx + \psi y.$$

Par ex., pour $sxy = bpx + ay$, on trouve

$$p = \frac{-ay}{(b-1)x} + y^b\varphi' x, \quad z = \frac{ay\,lx}{1-b} + y^b \cdot \varphi x + \psi y.$$

913. Prenons l'équ. *linéaire du 2ᵉ ordre.*

$$Rr + Ss + Tt = V, \quad \text{ou} \quad R\frac{d^2z}{dx^2} + S\frac{d^2z}{dxdy} + T\frac{d^2z}{dy^2} = V,$$

R, S, T, V sont donnés en x, y, z, p et q. Éliminant r et t par les équ. (B), qui servent de définition à ces fonctions, on a

$$Rdpdy + Tdqdx - Vdxdy = s(Rdy^2 - Sdxdy + Tdx^2).$$

Supposons qu'on connaisse deux fonctions π, ρ, qui rendent nul chaque membre respectif, ou qu'on ait $\pi = \alpha$, $\rho = \beta$, avec

$$Rdy^2 + Tdx^2 = Sdxdy,$$
$$Rdpdy + Tdqdx = Vdxdy.$$

Il s'agit de prouver qu'ici, comme au nº 903, $\pi = \varphi\rho$ satisfera à la proposée, quelle que soit la fonction φ, π et ρ contenant x, y, z, p et q. Pour le démontrer, ramenons d'abord ces équ. au 1ᵉʳ ordre, en posant $dy = \Omega dx$, il vient

$$R\Omega^2 - S\Omega + T = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

$$dy = \Omega dx, \quad R\Omega dp + Tdq = V\Omega dx \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

La 1ʳᵉ de ces équ. donne pour Ω deux valeurs en x, y, z, p, q; et l'on suppose que $\pi = \alpha$ et $\rho = \beta$ ont été déterminés de manière à satisfaire aux équ. (2). Formons donc les différentielles complètes $d\pi = 0$, $d\rho = 0$, sous la forme

$$Adx + Bdy + Cdz + Ddp + Edq = 0, adx + bdy \ldots edq = 0.$$

Mettons $pdx + qdy$ pour dz, Ωdx pour dy; enfin, pour dq sa valeur tirée de (2), nous aurons deux sortes de termes dans chaque équ., les uns facteurs de dx, les autres de dp; en les égalant séparément à zéro (attendu que la proposée $Rr + Ss \ldots = V$, ne pouvant déterminer qu'une des quantités r, s, t, en fonction des autres, et de x, y, z, p et q, dx et dp restent indépendants), il vient

$$A + \Omega B + (p + q\Omega)\, C + \frac{EV\Omega}{T} = 0, \quad D = \frac{ER\Omega}{T},$$

$$a + \Omega b + (p + q\Omega)\, c + \frac{eV\Omega}{T} = 0, \quad d = \frac{eR\Omega}{T}.$$

Ces équ. expriment la condition que π et ρ satisfont aux conditions (2). Cela posé, pour reconnaître si en effet l'équation $\pi = \varphi\rho$

satisfait à la proposée, prenons sa différentielle complète $d\pi = \varphi'\rho \,.\, d\rho$, ou

$$Adx + Bdy \ldots Edq = \varphi'\rho \,.\, (adx + bdy \ldots edq);$$

substituons-y pour A, D, a, d, leurs valeurs tirées des quatre équ. précédentes, et $pdx + qdy$ pour dz; enfin, réunissant les termes qui ont pour coefficients B, C, E, b, c, e, nous voyons qu'ils ont pour facteur l'une ou l'autre des quantités

$$R\Omega dp + Tdq - V\Omega dx, \quad dy - \Omega dx,$$

lesquelles sont nulles en vertu des équ. (2), et cela quelle que soit la fonction φ; donc $\pi = \varphi\rho$ *est l'intégrale première de la proposée, φ désignant une fonction arbitraire de* x *et* y.

On se trouve ainsi conduit à traiter les équ. (2); mais il faut remarquer qu'outre ces deux relations, on ait $dz = pdx + qdy$, ce qui ne fait que trois équ. entre les cinq variables x, y, z, p et q. Il pourrait donc se faire que l'équ. qu'on obtiendrait entre trois de ces quantités, par l'élimination, ne remplît pas la condition d'intégrabilité (n° 897); dans ce cas, elle ne proviendrait pas d'une équ. unique. On serait alors conduit à une intégration inexécutable, sans que pour cela on fût en droit de conclure qu'elle n'est pas possible, et que l'équ. différentielle proposée ne résulte pas d'une seule primitive.

Concluons de là que, pour intégrer l'équ. linéaire du 2e ordre $Rr + Ss + Tt = V$, on posera les équ. (1) et (2); la 1re fera connaître Ω, dont la valeur, substituée dans (2), donnera deux équ. auxquelles il faudra satisfaire par des intégrales $\pi = \alpha$, $\rho = \beta$: on fera $\pi = \varphi\rho$, et il restera à intégrer cette équ. du 1er ordre.

Comme l'équ. (1) est du 2e degré, on en tire deux valeurs de Ω; on préférera celle qui se prêtera mieux aux calculs ultérieurs.

914. Prenons, par exemple, $q^2r - 2pqs + p^2t = 0$; $R = q^2$, $S = -2pq$, $T = p^2$, $V = 0$, donnent, pour l'équation (1), $q^2\Omega^2 + 2pq\Omega + p^2 = 0$; d'où $q\Omega + p = 0$; et chassant Ω des équ. (2),

$$pdx + qdy = 0, \quad qdp = pdq.$$

Celle-ci donne $p = \beta q$; l'autre revient à $dz = 0$, $z = \alpha$; et $\beta = \varphi\alpha$, ou $p = q\varphi z$, reste à intégrer de nouveau.

Appliquons la méthode du nº 903, qui donne

$$dz = 0, \quad dy = -dx \cdot \varphi z; \quad \text{d'où} \quad z = \alpha, \quad y + x\varphi\alpha = \beta;$$

posant $\beta = \psi\alpha$, il vient enfin pour l'intégrale cherchée, φ et ψ étant les deux fonctions arbitraires, $y + x\varphi z = \psi z$.

L'équation $rx^2 + 2xys + y^2t = 0$, où $R = x^2$, $S = 2xy \ldots$, donnent $\Omega x = y$, et les équ. (2) deviennent $ydx = xdy$, $xdp + ydq = 0$. La 1re donne $y = \alpha x$; chassant y de la 2e, elle devient $dp + \alpha dq = 0$; d'où $p + \alpha q = \beta$; enfin, $\beta = \varphi\alpha$ donne pour l'intégrale première, $px + qy = x\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$.

Les équ. (2) du nº 903 sont ici $dz = dx \cdot \varphi$, $xdy = ydx$; on tire de cette dernière $y = \alpha x$; chassant y de l'autre, $dz = dx \cdot \varphi\alpha$, $z = x\varphi\alpha + \beta$; enfin, $\beta = \psi\alpha$, donne $z = x\varphi\left(\frac{y}{x}\right) + \psi\left(\frac{y}{x}\right)$.

Dans l'exemple suivant on a fait $p + q = m$,

$$r(1 + qm) + s(q - p)m = t(1 + pm).$$

L'équation (1) est

$$(1 + qm)\Omega^2 - (q - p)m\Omega = 1 + pm;$$

d'où $\Omega = 1$. Quant à l'autre racine de Ω, comme elle conduirait à une intégrale première, contenant $p + q$ sous le signe φ, et hors ce signe, elle ne peut être employée. Les équ. (2) sont

$$dy = dx, \quad (1 + qm)\,dp = (1 + pm)\,dq.$$

On a $x - y = \alpha$; pour intégrer la 2e faisons $p - q = n$, et $p + q = m$; on en tire les valeurs de p, q, dp, dq, et l'on a cette équation séparable $mndm = (2 + m^2)\,dn$, qui donne $n = \beta\sqrt{(2 + m^2)}$; ainsi, $\beta = \varphi\alpha$ devient

$$n = \sqrt{2 + m^2} \cdot \varphi'(x - y), \quad p = q + \sqrt{2 + (p + q)^2} \cdot \varphi'(x - y).$$

Pour intégrer de nouveau cette équ., mettons pour p et q leurs valeurs en m et n dans $dz = pdx + qdy$; il vient

$$2dz = (m + n)\,dx + (m - n)\,dy$$

$$= m(dx + dy) + (dx - dy)\sqrt{(2 + m^2)} \cdot \varphi'(x - y).$$

Intégrons, en supposant m constant, par la méthode du n° 906, et nous trouvons que l'intégrale cherchée est représentée par le système des deux équations

$$2z + \psi m = m(x+y) + \sqrt{(2+m^2)}\,\varphi(x-y),$$

$$\psi' m = (x+y) + \frac{m}{\sqrt{(2+m^2)}}\,\varphi(x-y).$$

915. La complication de ces calculs empêche très-souvent qu'ils ne réussissent ; mais dans le cas où les coefficients R, S et T sont constants, et V fonction de x et y, l'équ. (1) donne pour Ω deux valeurs numériques, telles que m et n : et les relations (2), auxquelles $\pi = \alpha$ et $\rho = \beta$ doivent satisfaire, s'intègrent et donnent, pour la racine m,

$$y = mx + \alpha \quad \text{et} \quad Rmp + Tq = m\int V\mathrm{d}x :$$

On devra substituer dans V, pour y, sa valeur $mx + \alpha$; puis $\int V\mathrm{d}x$ ne dépendra plus que des quadratures. L'intégration faite, on ajoutera une constante β, et l'on remettra pour α sa valeur $y - mx$. On aura donc les équ. cherchées $\pi = \alpha$, $\rho = \beta$, en sorte que $\rho = \varphi'\pi = \varphi'(y - mx)$, deviendra

$$Rmp + Tq = m\int V\mathrm{d}x + \varphi'(y - mx).$$

On raisonnera de même pour la 2ᵉ racine n de Ω, ou plutôt on changera ici m en n : mais il suffit de traiter l'un de ces deux cas, parce que l'autre conduit au même résultat. On choisit celui qui se prête le mieux au calcul.

Il s'agit maintenant d'intégrer de nouveau : pour cela, reprenons notre 1ʳᵉ intégrale, et tirons-en la valeur de p pour la mettre dans $\mathrm{d}z = p\mathrm{d}x + q\mathrm{d}y$: remarquant que par la nature des deux racines m et n de Ω, on a $Rmn = T$, on trouve

$$R\mathrm{d}z - \mathrm{d}x\int V\mathrm{d}x - \mathrm{d}x\varphi'(y - mx) = Rq(\mathrm{d}y - n\mathrm{d}x);$$

en comprenant dans φ' le diviseur constant m. Or, pour intégrer cette équ. (n° 903), on égalera à zéro chaque membre séparément; d'où

$$y = nx + c, \quad Rz - \int\mathrm{d}x\int V\mathrm{d}x - \int\mathrm{d}x \,.\, \varphi'(y - mx) = b.$$

Il convient, avant tout, de faire quelques remarques :

1° On devra mettre $nx + c$ pour y dans la 2ᵉ équ., et intégrer par rapport à x; puis on remettra $y - nx$ pour c dans le résultat.

2° Les deux intégrales $\int dx \int V dx$ nécessitent une distinction importante, puisqu'on a d'abord mis $mx + \alpha$ pour y dans V, et $y - mx$ pour α dans le résultat; tandis qu'on doit faire $y = nx + c$ dans $dx \int V dx$, et restituer $y - nx$ pour c.

3° $\int dx \,.\, \varphi'(y - mx)$ devient $\int dx \,.\, \varphi'[x(n-m) + c]$, ou $\frac{\varphi}{n-m}$, ou plutôt $\varphi[(n-m)x + c]$, en comprenant la constante $n - m$ dans φ; ainsi, l'on a $\varphi(y - mx)$.

4° Enfin, la constante b est une fonction quelconque ψ de c, ou $b = \psi(y - nx)$. Donc

$$Rz = \int dx \int V dx + \varphi(y - mx) + \psi(y - nx).$$

Par ex., pour $r - s - 2t = ky^{-1}$, on a

$$\Omega^2 + \Omega = 2, \text{ d'où } m = 1, \; n = -2 \text{ et } y = x + \alpha, \; y = \alpha' - 2x.$$

Donc

$$\int V dx = \int \frac{k dx}{x + \alpha} = k\,\mathrm{l}\,(x + \alpha) = k\,\mathrm{l}\,y,$$

$$\int dx \int V dx = \int k dx\,\mathrm{l}\,y = \int k dx \,.\, \mathrm{l}\,(\alpha' - 2x).$$

Cette intégrale s'obtient aisément (nº 827, ou 809, V); elle devient $-kx - ky \,.\, \mathrm{l}\sqrt{y}$, en remettant $2x + y$ pour α'. Ainsi,

$$z + k(x + y\,\mathrm{l}\sqrt{y}) = \varphi(y - x) + \psi(y + 2x).$$

Pour $r = b^2 t$ ou $\frac{d^2z}{dx^2} = b^2 \frac{d^2z}{dy^2}$, qui est l'équ. des cordes vibrantes (*voy.* ma *Mécanique*, nº 310), on a $R = 1$, $T = -b^2$, $S = 0 = V$, d'où $\Omega^2 = b^2$, $m = b = -n$, $y = bx + \alpha$, ou $y = \alpha' - bx$; enfin $\int dx \int V dx = 0$. Donc

$$z = \varphi(y - bx) + \psi(y + bx).$$

Nous renvoyons, pour de plus amples détails sur cette matière, au *Calcul intégral* de M. Lacroix.

916. On intègre quelquefois en suivant le procédé du nº 907, qui consiste à partager la proposée en deux équ. à l'aide d'une in-

déterminée θ. Par ex., l'équ. $rt = s^2$, des surfaces développables (n° 806), donne $\frac{r}{s} = \theta = \frac{s}{t}$, d'où $r = s\theta$, $s = t\theta$,

$$r\mathrm{d}x + s\mathrm{d}y = \theta(s\mathrm{d}x + t\mathrm{d}y), \quad \text{ou} \quad \mathrm{d}p = \theta\mathrm{d}q \quad (B, \text{n° } 909).$$

Cette équ. n'est intégrable qu'autant que θ est fonction de q; donc $p = \varphi q$ est l'intégrale 1re. L'équ. $\mathrm{d}z = p\mathrm{d}x + q\mathrm{d}y$ devient $\mathrm{d}z = \mathrm{d}x \cdot \varphi q + q\mathrm{d}y$: supposant q constant, par la méthode du n° 906, il vient

$$z = x\varphi q + qy + \psi q, \quad x\varphi' q + y + \psi' q = 0.$$

Toutes les surfaces développables sont comprises dans le système de ces deux équ., et pour l'une d'elles qu'on déterminerait en particulier, il faudrait trouver les fonctions φ et ψ, puis éliminer q entre les deux équ. résultantes.

Intégration des Équations différentielles partielles par les séries.

917. Prenons le 2e ordre pour ex. des intégrales approchées. Soit donnée une équ. entre $r, s, t \ldots . x$; choisissons l'une des variables, telle que x, et posons la formule de Maclaurin (n° 746),

$$z = f + xf' + \tfrac{1}{2}x^2 f'' + \tfrac{1}{6}x^3 f''' + \ldots .$$

$f, f'\ f'' \ldots .$ désignent ici des fonctions cherchées de y, qui sont ce que deviennent l'intégrale $z = f(x, y)$ et ses dérivées relatives à x, lorsqu'on fait $x = 0$ *. Qu'on tire de la proposée $r = F(r, s, t, p, q, x, y)$, il est clair que si l'on change x en zéro, z en f, p en f', enfin s ou $\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$ en $\frac{\mathrm{d}f'}{\mathrm{d}y}$, il n'entrera dans la valeur de r que f, f', et leurs dérivées par rapport à y, puisque q devient $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}y}$, et $t = \frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}y^2}$: ainsi, r deviendra f''. De même la dérivée de r, relative à x, donnera f''', à l'aide des mêmes fonctions f et f', qui demeurent quel-

* Si la fonction $f(x, y)$ devait être de nature à donner l'infini pour quelque valeur de $f, f', f'' \ldots$, il faudrait, comme on l'a fait n° 871, changer x en $x - a$; dans la proposée, a étant une constante qu'on prend à volonté, de manière à ne plus rencontrer de dérivées infinies dans les calculs qu'on va exposer.

conques : et ainsi pour f^{IV}, f^{V}.... en sorte que la série contiendra deux fonctions arbitraires de y.

Pour le 3e ordre, le même raisonnement prouve que la série ci-dessus est l'intégrale et contient les trois fonctions quelconques f, f', f''. En général, *toute équ. differ. partielle d'ordre* n *a une intégrale qui contient* n *fonctions arbitraires.*

918. Lagrange a encore proposé d'approcher des intégrales par la méthode des coefficients indéterminés. On pose

$$z = \varphi + x\psi + x^2\chi + x^3\vartheta + x^4\omega \ldots$$

En prenant les différentielles convenables, substituant dans la proposée, et égalant entre eux les termes où x entre au même degré, on a diverses équ. qui servent à trouver celles des fonctions de y qui ne doivent pas rester arbitraires.

Par ex., pour $r = q$, on trouve

$$\frac{d^2z}{dx^2} = r = 2\chi + 6x\vartheta + 12x^2\omega \ldots,$$

$$\frac{dz}{dy} = q = \varphi' + x\psi' + x^2\chi' \ldots;$$

substituant dans $r = q$ et comparant, on trouve

$$z = \varphi + x\psi + \tfrac{1}{2}x^2\varphi' + \tfrac{1}{6}x^3\psi' + \tfrac{1}{24}x^4\varphi'' \ldots$$

De même pour l'équ. $\dfrac{d^2z}{dx^2} + \dfrac{d^2z}{dy^2} + \dfrac{d^2z}{dt^2} = 0$, on trouve

$$z = \varphi + x\psi - \frac{x^2}{2}\left(\frac{d^2\varphi}{dy^2} + \frac{d^2\varphi}{dt^2}\right) - \frac{x^3}{2\,.\,3}\left(\frac{d^2\psi}{dy^2} + \frac{d^2\psi}{dt^2}\right) \ldots$$

Des fonctions arbitraires.

919. On dira pour les fonctions arbitraires φ, ψ.... des équ. differ. partielles, ce qu'on a dit (n° 839) pour les constantes introduites dans les intégrations ordinaires. Tant qu'on ne veut qu'intégrer, c'est-à-dire composer une expression qui, soumise aux règles du Calcul différentiel, satisfasse à la proposée, ces fonctions φ, ψ...., sont en effet quelconques. Mais si les résultats doivent être appliqués à des questions de Géométrie, de Mécanique, etc., ces fonc-

tions peuvent cesser d'être arbitraires. Quelques exemples suffiront pour l'intelligence de cet exposé.

On a vu (n[os] 660, 745) que l'équ. des surfaces cylindriques est

$$y - bz = \varphi(x - az), \quad \text{ou} \quad ap + bq = 1.$$

La 1[re] est l'intégrale de la 2[e], la forme de la fonction φ dépendant de la courbe directrice. Or, si la base du cylindre sur le plan xy est donnée par son équ. $y = fx$, il faudra que φ soit telle, que cette base soit comprise parmi les points de l'espace que désigne l'équ. $y - bz = \varphi(x - az)$. Si donc on y fait $z = 0$, les équ. $y = \varphi x$, $y = fx$ seront identiques. Donc les fonctions φ et f ont même forme, c'est-à-dire que si l'on change dans $y = fx$, y en $y - bz$, et x en $x - az$, l'équ. qu'on obtiendra sera celle du cylindre particulier dont il s'agit (n° 788, I).

Généralement, soient $M = 0$, $N = 0$ les équ. de la directrice : on fera $x - az = u$, et éliminant entre ces trois équ., on en tirera les valeurs de x, y et z, et par suite celle de $y - bz$ ou φu, en fonction de u, c'est-à-dire qu'on aura la manière dont φu est composé en u. Il ne restera plus qu'à mettre $x - az$ pour u, dans $y - bz = \varphi u$, pour avoir l'équ. de la surface cylindrique particulière dont il s'agit.

Pareillement les surfaces de révolution autour de l'axe des z ont pour équ. $py = qx$, dont l'intégrale est $x^2 + y^2 = \varphi z$ (n[os] 662, 745); la fonction φ demeure indéterminée tant que la génératrice de la surface reste quelconque : mais si cette courbe est donnée par ses équ. $M = 0$, $N = 0$, dans toutes ses situations elle sera sur la surface ; les x, y et z seront les mêmes. Posons $z = u$, éliminons x, y et z entre ces trois équations, puis substituons leurs valeurs dans $x^2 + y^2 = \varphi u$, nous saurons comment la fonction φ est composée en u ; remettant donc z pour u, et $x^2 + y^2$ pour φu, nous aurons particularisé φ, de manière que l'équ. appartiendra exclusivement à la surface proposée.

Et si le corps est engendré par la révolution d'une surface mobile, qui serait invariablement liée à l'axe des z, et dont on aurait l'équ. $M = 0$, en la considérant dans l'une de ses positions, différentiant, on trouvera les expressions de p et q en x, y et z ; substituées dans $py - qx = 0$, on aura l'équ. $N = 0$ de la courbe de contact du corps générateur avec la surface engendrée, puisque les plans tangents sont communs à l'une et à l'autre. On a ainsi les équ.

d'une courbe qu'on peut regarder comme génératrice, et l'on retombe sur le cas précédent.

Le conoïde a pour équation $px + qy = 0$, dont l'intégrale est $y = x \cdot \varphi z$ (p. 390, 504). Faisons $z = u$, et tirons x, y et z en u, à l'aide des équations $M = 0$, $N = 0$ de la courbe directrice ; enfin, mettons pour x et y leurs valeurs dans $y = x \cdot \varphi u$, et nous saurons comment φu est composé en u. Enfin, remplaçant u par z, nous aurons $\varphi \cdot z$, et l'équ. particulière $y = x \cdot \varphi z$ du conoïde proposé.

Quand la directrice est un cercle tracé dans un plan parallèle aux yz, dont les équations sont $x = a$, $y^2 + z^2 = b^2$, on trouve $a^2y^2 + z^2x^2 = b^2x^2$.

L'équ. des cônes est $z - c = p(x - a) + q(y - b)$, dont l'intégrale est $\dfrac{y - b}{z - c} = \varphi\left(\dfrac{x - a}{z - c}\right)$ (n[os] 661, 745). Pour que la base soit un cercle tracé sur le plan xy et le centre à l'origine, on a

$$z = 0, \quad x^2 + y^2 = r^2, \quad \text{et } x - a = u(z - c),$$

d'où

$$z = 0, \quad x = a - cu, \quad y = \sqrt{[r^2 - (a - cu)^2]}.$$

Substituant dans $y - b = (z - c)\varphi u$, pour x, y et z ces valeurs, on a $c\varphi u = b - \sqrt{[r^2 - (a - cu)^2]}$. Enfin, remettant pour u et φu leurs valeurs, on a pour l'équ. du cône, comme page 275,

$$(cy - bz)^2 + (az - cx)^2 = r^2(z - c)^2.$$

920. Ces ex. suffisent pour montrer comment on doit déterminer les fonctions arbitraires, lorsqu'on veut appliquer les calculs généraux aux cas particuliers. Soit en général $K = \varphi(L)$ une intégrale contenant une fonction arbitraire φ, K et L étant des fonctions données de x, y et z : la condition prescrite établit que l'équ. devient $F(x, y, z) = 0$, lorsqu'on suppose $f(x, y, z) = 0$. Cette condition revient, en Géométrie, à demander que la surface cherchée dont l'équ. est $K = \varphi L$, passe par la courbe donnée dont les équ. sont $F = 0$, $f = 0$. Pour satisfaire à cette condition, on fera $L = u$; et l'on tirera x, y et z en u de ces trois équ. : puis, substituant ces valeurs dans K, on aura pour résultat une fonction K_1, qui sera $= \varphi u$ exprimé en u, ce qui déterminera la composition de la fonction φ. Enfin, on remettra L pour u, dans $K = K_1$, et l'on aura l'intégrale cherchée.

S'il y avait deux fonctions arbitraires à déterminer, il faudrait

donner deux conditions. Un calcul semblable au précédent ferait connaître ces fonctions.

921. Mais si la nature de la question, et cela a lieu dans un grand nombre de problèmes de Physique et de Géométrie transcendante, ne permet pas de déterminer les fonctions arbitraires, elles restent quelconques, et les propriétés qu'on découvre, sans particulariser ces fonctions, ont lieu en général. Pour tirer nos explications de la Géométrie, s'il entre un terme de la forme φx, et qu'on décrive sur le plan xy la ligne qui a pour équ. $y = \varphi x$, toutes ses ordonnées y seront les valeurs de la fonction φ, en sorte que cette courbe soit non-seulement quelconque, mais même puisse être tracée à la main par un mouvement libre et irrégulier ; la courbe peut même être *Discontinue,* c'est-à-dire formée de branches différentes placées bout à bout, ou *Discontiguë,* c'est-à-dire formée de parties isolées et séparées les unes des autres. C'est Euler qui a mis ces principes hors de doute, même contre l'avis de d'Alembert, qu'on peut regarder comme l'inventeur du calcul aux différences partielles ; calcul dont les ressources sont immenses, les applications d'une utilité sans bornes, et qui, comme on voit, est le moyen dont on se sert pour soumettre les fonctions irrégulières à l'analyse mathématique.

CHAPITRE VI.

CALCUL DES VARIATIONS.

922. Les problèmes des *Isopérimètres* avaient déjà été résolus par divers géomètres avant la découverte du Calcul des variations; mais les procédés dont on se servait ne formaient pas un corps de doctrine, et chacun de ces problèmes n'était résolu que par une méthode qui lui était particulière, et par des artifices d'analyse souvent très-détournés. Il appartenait au célèbre Lagrange de ramener toutes les solutions à une méthode uniforme. Voici en quoi elle consiste :

Étant donnée une fonction $Z = F(x, y, y', y''....)$, en désignant par $y', y''....$ les dérivées de y considéré comme fonction de x, $y = \varphi x$, on peut se proposer de faire jouir Z de diverses propriétés (telle que d'être un *maximum,* ou toute autre), soit en assi-

gnant aux variables x, y, des *valeurs numériques*, soit en établissant des relations entre ces variables, et les *liant par des équations*. Quand l'équ. $y = \varphi x$ est donnée, on en déduit y, y', y''.... en fonction de x, et substituant, Z devient $= fx$. On peut assigner, par les règles connues du Calcul différentiel, quelles sont les valeurs de x qui rendent fx un *maximum* ou un *minimum*. On détermine ainsi quels sont les points d'une courbe donnée, pour lesquels la fonction proposée Z est plus grande ou moindre que pour tout autre point de la même courbe voisin du premier.

Mais si l'équ. $y = \varphi x$ n'est point donnée, alors, prenant successivement pour φx différentes formes, la fonction $Z = fx$ prendra elle-même différentes expressions en x; on peut se proposer d'assigner à φx une forme propre à rendre Z plus grande ou plus petite que pour toute autre forme de φx, *pour la même valeur numérique de* x, *quelle qu'elle soit d'ailleurs*. Cette dernière espèce de problème appartient au calcul des *Variations*. Il s'en faut de beaucoup qu'il se borne à la théorie des *maxima* et *minima*; mais nous nous contenterons de traiter cette matière, parce qu'elle suffit pour l'intelligence complète des règles de ce calcul. N'oublions pas toutefois que, dans ce qui va être dit, les *variables* x *et* y *ne sont pas indépendantes*, mais seulement que l'équ. $y = \varphi x$, qui les lie entre elles, est inconnue, et qu'on ne la suppose donnée que pour faciliter la résolution du problème. x doit être regardée comme une quantité quelconque qui reste la même pour les différentes formes $y = \varphi x$; les formes de $\varphi, \varphi', \varphi''$.... sont donc variables, tandis que x est constant.

923. Dans $Z = F(x, y, y', y''....)$ mettons $y + k$ pour y, $y' + k'$ pour y'...., k étant une fonction arbitraire de x, et k', k''.... ses dérivées. Or, Z deviendra

$$Z_1 = F(x, y + k, y' + k', y'' + k''....).$$

Le théorème de Taylor (n° 743) a lieu, que les quantités x, y, i, k soient indépendantes ou dépendantes: ainsi l'on a

$$Z_1 = Z + \left(k \cdot \frac{dZ}{dy} + k' \frac{dZ}{dy'} + k'' \frac{dZ}{dy''} + \text{etc.} \right) + \text{etc.},$$

de sorte qu'on peut regarder x, y, y', y''.... comme autant de variables indépendantes, en tant qu'il ne s'agit que de trouver ce développement.

Cela posé, la nature de la question exige que l'équ. $y = \varphi x$ ait été

déterminée de manière que, pour la même valeur de x, on ait toujours $Z_1 > Z$, ou $Z_1 < Z$: en raisonnant comme dans la théorie des *maxima* et *minima* ordinaires (nº 757), on voit qu'il faut que les termes du 1[er] ordre soient nuls, et qu'on ait

$$k \cdot \frac{dZ}{dy} + k' \cdot \frac{dZ}{dy'} + k'' \cdot \frac{dZ}{dy''} + \text{etc.} = 0.$$

Puisque k est arbitraire pour chaque valeur de x, et qu'il n'est pas nécessaire que sa valeur, ou sa forme, restent les mêmes, quand x varie ou est constant, k', k''.... sont aussi arbitraires que k. Car, pour une valeur quelconque $x = X$, on peut supposer

$$k = a + b\,(x - X) + \tfrac{1}{2}\,c\,(x - X)^2 + \text{etc.},$$

$X, a, b, c, \ldots$ étant prises à volonté ; et comme cette équ. et ses différentielles doivent avoir lieu, quel que soit x, elles devront subsister lorsque $x = X$, ce qui donne $k = a$, $k' = b$, $k'' = c$.... Donc, notre équ. $Z_1 = Z + \ldots$ ne peut être satisfaite, vu l'indépendance de a, b, c..., à moins que chaque terme ne soit nul. Ainsi, elle se partage en autant d'autres qu'elle renferme de termes, et l'on a

$$\frac{dZ}{dy} = 0, \quad \frac{dZ}{dy'} = 0, \quad \frac{dZ}{dy''} = 0\ldots, \quad \frac{dZ}{dy^{(n)}} = 0,$$

(n) étant l'ordre le plus élevé de y dans Z. Ces diverses équ. devront s'accorder toutes entre elles, et subsister en même temps, quel que soit x. Si cet accord a lieu, il y aura *maximum* ou *minimum*, et la relation qui en résultera entre y et x sera l'équation cherchée, $y = \varphi x$, qui aura la propriété de rendre Z plus grand ou plus petit que ne pourrait faire toute autre relation entre x et y. On distinguera le *maximum* du *minimum*, suivant les théories ordinaires, d'après les signes des termes du 2[e] ordre de Z_1 (*voy.* page 360).

Mais si toutes ces équ. donnent des relations différentes entre x et y, le problème sera impossible dans l'état de généralité qu'on lui a donné ; et s'il arrive que quelques-unes seulement de ces équations s'accordent entre elles, alors la fonction Z aura des *maxima* et *minima*, relatifs à quelques-unes des quantités y, y', y''...., sans en avoir d'absolus et de communs à toutes ces quantités. Les équations qui s'accordent entre elles donneront les relations qui établissent les *maxima* et *minima* relatifs. Et si l'on ne veut rendre

X un *maximum* ou un *minimum* que par rapport à l'une des quantités y, y', y''...., comme alors il ne faudra satisfaire qu'à une équ., le problème sera toujours possible.

924. Il suit des considérations précédentes, que,

1° Les quantités x et y sont dépendantes l'une de l'autre, et que néanmoins on doit les faire varier comme si elles étaient indépendantes, puisque ce n'est qu'un procédé de calcul pour parvenir au résultat.

2° Ces variations ne sont pas infiniment petites ; et si l'on emploie le Calcul différentiel pour les obtenir, ce n'est que comme un moyen expéditif d'avoir le second terme du développement, le seul qui soit ici nécessaire.

Appliquons ces notions générales à des exemples.

I. Prenons sur l'axe des x d'une courbe deux abscisses m et n, et menons des parallèles indéfinies à l'axe des y. Soit $y = \varphi x$ l'équ. de cette courbe : si par un point quelconque on mène une tangente, elle coupera nos parallèles en des points qui ont (n° 762) pour ordonnées $l = y + y'(m - x)$ et $h = y + y'(n - x)$. Si la forme de φ est donnée, tout est ici connu; mais si elle ne l'est point, on peut demander quelle est la courbe qui jouit de la propriété d'avoir, pour chaque point de tangence, le produit de ces deux ordonnées plus petit que pour toute autre courbe. On a ici $Z = l \times h$, ou

$$Z = [y + (m - x)\,y'] \, [y + (n - x)\,y'].$$

D'après l'énoncé du problème, les courbes *qui passent par un même point* (x, y), ont des tangentes de directions diverses ; et celle qu'on cherche doit avoir une tangente telle, que la condition $Z =$ *maximum* soit remplie. On doit donc regarder x et y comme constants dans $\mathrm{d}Z = 0$; d'où

$$\frac{\mathrm{d}Z}{\mathrm{d}y'} = 0, \quad \frac{2y'}{y} = \frac{2x - m - n}{(x - m)\,(x - n)} = \frac{1}{x - m} + \frac{1}{(x - n)};$$

puis intégrant, $\qquad y^2 = C(x - m)\,(x - n).$

La courbe est une ellipse ou une hyperbole, selon que C est négatif ou positif, les sommets sont donnés par $x = m$ et $= n$: dans le 1er cas, le produit $l \,.\, h$, ou Z, est un *maximum*, parce que y'' a le signe $-$; dans le 2e, Z est un *minimum*, ou plutôt un *maximum* négatif : ce produit est d'ailleurs constant, $lh = -\frac{1}{4}\,C(m - n)^2$,

carré du demi-second axe ; c'est ce qu'on trouve en substituant dans Z pour y' et y leurs valeurs.

II. Quelle est la courbe pour laquelle, en chacun de ses points, le carré de la sous-normale augmentée de l'abscisse, est un *minimum?* On a $Z = (yy' + x)^2$, d'où l'on tire deux équ., qui s'accordent en faisant $yy' + x = 0$, et par suite $x^2 + y^2 = r^2$. Donc tous les cercles décrits de l'origine comme centre satisfont seuls à la question.

925. La théorie que nous venons d'exposer n'est pas d'une grande étendue ; mais elle sert de développement préliminaire, utile pour l'intelligence du problème beaucoup plus intéressant qui nous reste à résoudre. Il s'agit d'appliquer tous les raisonnements précédents à une fonction de la forme $\int Z$: le signe $\int$ indique que la fonction Z est différentielle, et qu'après l'avoir intégrée entre les limites désignées, on veut la faire jouir des propriétés précédentes. La difficulté qui se rencontre ici vient donc de ce qu'il faut résoudre le problème sans faire l'intégration ; car on voit assez qu'il est en général impossible de l'exécuter.

Lorsqu'un corps se meut, on peut comparer entre eux, soit les divers points du corps dans l'une de ses positions, soit le lieu qu'occupe successivement un point désigné dans les instants suivants. Dans le 1[er] cas, le corps est considéré comme fixe, et le signe d se rapportera aux changements des coordonnées de sa surface ; dans le 2[e], on doit exprimer, par un signe nouveau, des *variations* tout à fait indépendantes des 1[res], et nous nous servirons de δ. Quand nous considérons une courbe immobile, ou même variable, mais prise dans l'une de ses positions, $\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}y$.... annoncent une comparaison entre ses coordonnées ; mais, pour avoir égard aux divers lieux qu'occupe un même point d'une courbe, variable de forme selon une loi quelconque, nous écrirons δx, δy . . . ., qui désignent les accroissements considérés sous ce point de vue, et sont des fonctions de x, y.... Pareillement $\mathrm{d}x$ devenant $\mathrm{d}(x + \delta x)$, croîtra de $\mathrm{d}\delta x$; d^2x croîtra de $\mathrm{d}^2\delta x$, etc.

Observons que les variations indiquées par le signe δ sont finies, et tout à fait indépendantes de celles que désigne la caractéristique d : les opérations auxquelles ces signes se rapportent étant pareillement indépendantes, l'ordre dans lequel on les exécutera doit être indifférent pour le résultat. De sorte que $\delta\,.\,\mathrm{d}x$ et $\mathrm{d}\,.\,\delta x$ sont deux choses identiques, aussi bien que $\mathrm{d}^2\,.\,\delta x$ et $\delta\,.\,\mathrm{d}^2x$ . . . ., et que $\int\delta U$ et $\delta\int U$.

Il s'agit maintenant d'établir des relations entre x, y, z. . . ., de manière que $\int Z$ soit un *maximum* ou un *minimum entre des limites désignées*. Afin de rendre les calculs plus symétriques, nous ne supposerons aucune différentielle constante : d'ailleurs nous n'introduirons ici que trois variables, parce qu'il sera aisé de généraliser les résultats, et que cela suffit pour entendre la théorie. Pour abréger, remplaçons dx, d^2x...., dy, d^2y...., etc., par $x_{,}$, $x_{,,}$...., $y_{,}$, $y_{,,}$...., etc., de sorte que

$$Z = F(x, x_{,}, x_{,,}...., y, y_{,}, y_{,,}.... z, z_{,}, z_{,,}....).$$

x, y et z recevant les accroissements arbitraires et finis δx, δy, δz, dx ou $x_{,}$ devient $d(x + \delta x) = dx + \delta dx$ ou $x_{,} + \delta x_{,}$; de même $x_{,,}$ croît de $\delta x_{,,}$, et ainsi des autres ; de sorte qu'en développant Z_1, par le théorème de Taylor, et intégrant, $\int Z$ devient

$$\int Z_1 = \int Z + \int \left(\frac{dZ}{dx} . \delta x + \frac{dZ}{dy} . \delta y + \frac{dZ}{dz} . \delta z + \frac{dZ}{dx_{,}} . \delta x_{,} + \frac{dZ}{dy_{,}} dy_{,} \right.$$
$$\left. + \frac{dZ}{dz_{,}} . \delta z_{,} + \frac{dZ}{dx_{,,}} . \delta x_{,,} + \frac{dZ}{dy_{,,}} . \delta y_{,,} + \frac{dZ}{dz_{,,}} . \delta z_{,,} + \ldots . \right) + \int \text{etc.}$$

La condition du *maximum* et du *minimum* exige que l'intégrale des termes du 1[er] ordre soit nulle entre les limites désignées, *quels que soient* δx, δy et δz, ainsi qu'on l'a vu précédemment. Prenons la différentielle de la fonction connue Z, en regardant x, $x_{,}$, $x_{,,}$. . . ., y, $y_{,}$, $y_{,,}$ . . . . , comme autant de variables indépendantes ; nous aurons

$$dZ = m dx + n dx_{,} + p dx_{,,} ... + M dy + N dy_{,} ... + \mu dz + \nu dz_{,} ...,$$

m, n..., M, N..., μ, ν..., étant les coefficients des différences partielles de Z par rapport à x, $x_{,}$..., y, $y_{,}$..., z, $z_{,}$..., traités comme autant de variables ; ce sont donc des fonctions connues pour chaque valeur proposée de Z.

En pratiquant cette différentiation absolument de la même manière par le signe δ, on a

$$\left.\begin{aligned} \delta Z = m . \delta x + n . \delta dx + p . \delta d^2x + q . \delta d^3x + \ldots \\ + M . \delta y + N . \delta dy + P . \delta d^2y + Q . \delta d^3y + \ldots \\ + \mu . \delta z + \nu . \delta dz + \pi . \delta d^2z + \chi . \delta d^3z + \ldots \end{aligned}\right\} \ldots . (A)$$

Or, cette quantité connue, et dont le nombre des termes est

limité, est précisément celle qui est sous le signe $\int$, dans les termes du 1[er] ordre de notre développement : en sorte que la condition du *maximum* ou du *minimum* demandée, est que $\int \delta Z = 0$, entre les limites désignées, quelles que soient les variations δx, δy, δz. Observons qu'ici, comme précédemment, le calcul différentiel n'est employé que comme un moyen facile d'obtenir l'assemblage des termes qu'il faut égaler à zéro ; de sorte que les variations sont encore finies et quelconques.

Nous avons dit qu'on pouvait mettre $\mathrm{d}\,.\,\delta x$ au lieu de $\delta\,.\,\mathrm{d}x$; ainsi la 1[re] ligne de l'équ. équivaut à

$$m\,.\,\delta x + n\,.\,\mathrm{d}\delta x + p\,.\,\mathrm{d}^2\delta x + q\,.\,\mathrm{d}^3\delta x + \text{etc.}$$

m, n.... contiennent des différ., de sorte que le défaut d'homogénéité n'est ici qu'apparent. Il s'agit maintenant d'intégrer ; or, la suite du calcul fera voir qu'il est nécessaire de dégager du signe $\int$, autant que possible, les termes qui contiennent $\mathrm{d}\delta$. Pour y parvenir, on emploie la formule de l'intégration par parties (p. 408) ;

$$\int n\,.\,\mathrm{d}\delta x = n\,.\,\delta x - \int \mathrm{d}n\,.\,\delta x,$$
$$\int p\,.\,\mathrm{d}^2\delta x = p\,.\,\mathrm{d}\delta x - \mathrm{d}p\,.\,\delta x + \int \mathrm{d}^2 p\,.\,\delta x,$$
$$\int q\,.\,\mathrm{d}^3\delta x = q\,.\,\mathrm{d}^2\delta x - \mathrm{d}q\,.\,\mathrm{d}\delta x + \mathrm{d}^2 q\,.\,\delta x - \int \mathrm{d}^3 q\,.\,\delta x, \text{ etc.}$$

En réunissant ces résultats, on a cette suite dont la loi est facile à saisir,

$$\int(m - \mathrm{d}n + \mathrm{d}^2 p - \mathrm{d}^3 q = \mathrm{d}^4 r - \ldots.)\,\delta x$$
$$+ (n - \mathrm{d}p + \mathrm{d}^2 q - \mathrm{d}^3 r\ldots)\,\delta x + (p - \mathrm{d}q + \mathrm{d}^2 r\ldots)\,\mathrm{d}\delta x + (q - \mathrm{d}r\ldots)\,\mathrm{d}^2\delta x\ldots$$

L'intégrale de (A), ou $\int\,.\,\delta Z = 0$, devient donc

$$(B)\ldots \int [m - \mathrm{d}n + \mathrm{d}^2 p\ldots)\,\delta x + (M - \mathrm{d}N + \mathrm{d}^2 P\ldots)\,\delta y + (\mu - \mathrm{d}\nu\ldots)\,\delta z] = 0,$$

$$(C)\ldots.\ \left\{\begin{array}{l} n - \mathrm{d}p + \mathrm{d}^2 q\ldots)\,\delta x + (N - \mathrm{d}P + \mathrm{d}^2 Q\ldots)\,\delta y + (\nu - \mathrm{d}\pi + \ldots)\,\delta z \\ + (p - \mathrm{d}q + \mathrm{d}^2 r\ldots)\,\mathrm{d}\delta x + (P - \mathrm{d}Q\ldots\ldots\ldots)\,\mathrm{d}\delta y + (\pi - \mathrm{d}\chi\ldots.)\,\mathrm{d}\delta z \\ + (q - \mathrm{d}r\ldots.)\,\mathrm{d}^2\delta x + (\text{etc}\ldots\ldots\ldots.) + K = 0, \end{array}\right.$$

K étant la constante arbitraire. Nous avons coupé notre équ. en deux, parce que les termes qui restent sous le signe $\int$ ne pouvant être intégrés, à moins qu'on ne donne à δx, δy, δz, des valeurs particulières, ce qui est contre l'hypothèse, $\int \delta Z$ ne peut devenir $= 0$, qu'autant que ces termes sont nuls à part ; et même si la nature de la question n'établit entre δx, δy et δz, aucune relation, l'indépen-

dance de ces variations exige que l'équation (B) se partage en trois autres,

$$\left.\begin{array}{l} 0 = m - \mathrm{d}n + \mathrm{d}^2p - \mathrm{d}^3q + \mathrm{d}^4r - \ldots \\ 0 = M - \mathrm{d}N + \mathrm{d}^2P - \mathrm{d}^3Q + \mathrm{d}^4R - \ldots \\ 0 = \mu - \mathrm{d}\nu + \mathrm{d}^2\pi - \mathrm{d}^3\chi + \mathrm{d}^4\rho - \ldots \end{array}\right\} \ldots\ldots\ (D)$$

926. Donc pour trouver les relations entre x, y et z, qui rendent $\int Z$ un *maximum*, on prendra la différentielle de la fonction donnée Z, en considérant x, y, z, $\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}y$, $\mathrm{d}z$, d^2x.... comme autant de variables indépendantes, et en se servant de la lettre δ pour désigner les accroissements; c'est ce qu'on appelle *prendre la variation* de Z. Comparant le résultat à l'équation (A), on en tirera les valeurs de m, M, μ, n, N...., en x, y, z, et leurs différentielles exprimées par d. Il faudra ensuite les substituer dans les équ. C et D; la 1re se rapporte aux limites entre lesquelles le *maximum* doit exister; les équ. (D) constituent les relations cherchées : elles sont différentielles entre x, y, z; et, sauf le cas d'absurdité, elles ne peuvent former des conditions distinctes, puisqu'elles détermineraient des valeurs numériques pour les variables. Si la question proposée se rapporte à la Géométrie, ces équ. sont celles de la courbe ou de la surface qui jouit de la propriété demandée.

927. Comme l'intégration est effectuée et doit être prise entre des limites désignées, les termes qui restent et composent l'équation (C) se rapportent à ces limites; elle est devenue de la forme $K + L = 0$, L étant une fonction de x, y, z, δx, δy, δz... Marquons d'un accent les valeurs numériques de ces variables à la 1re limite, et de deux à la 2e. Comme l'intégrale doit être prise entre ces limites, il faut marquer les divers termes de L, qui composent l'équ. (C), d'abord d'un, puis de deux accents; retrancher le 1er résultat du 2e, et égaler à zéro (n° 839); de sorte que l'équation $L_{\prime\prime} - L_{\prime} = 0$ ne renfermera plus de variables, puisque x, δx.... auront pris les valeurs $x_{\prime}$, $\delta x_{\prime}$...., $x_{\prime\prime}$, $\delta x_{\prime\prime}$...., assignées par les limites de l'intégration. On ne doit pas oublier que ces accents se rapportent aux limites de l'intégrale, et ne désignent pas des dérivées.

Il se présente maintenant quatre cas :

1° *Si les limites sont données et fixes* *, c'est-à-dire si les valeurs

* Ce cas revient, en Géométrie, à celui où l'on cherche une courbe qui, outre qu'elle doit jouir de la propriété de *maximum* ou *minimum* demandée, doit encore passer par

extrêmes de x, y et z sont constantes, comme $\delta x_{,}$, $d\delta x_{,}$, etc., $\delta x_{,,}$, $d\delta_{,,}x$, etc., sont nuls, tous les termes de $L_{,}$ et $L_{,,}$ sont zéro, et l'équation (C) est satisfaite d'elle-même. Alors on détermine les constantes que l'intégration introduit dans les équ. (D), par les conditions que comportent les limites.

2° *Si les limites sont arbitraires et indépendantes*, alors chacun des coefficients de $\delta x_{,}$, $\delta x_{,,}$ . . . ., dans l'équation (C), est nul en particulier.

3° *S'il existe des équ. de conditions* pour les limites *, c'est-à-dire si la nature de la question lie entre elles, par des équ., quelques-unes des quantités $x_{,}$, $y_{,}$, $z_{,}$, $x_{,,}$, $y_{,,}$, $z_{,,}$, on se servira des différ. de ces équ. pour obtenir plusieurs des variations $\delta x_{,}$, $\delta y_{,}$, $\delta z_{,}$, $\delta x_{,,}$...., en fonction des autres ; en substituant dans $L_{,,} - L_{,} = 0$, ces variations se trouveront réduites au plus petit nombre possible : ces dernières étant absolument indépendantes, l'équ. se partagera en plusieurs autres, en égalant leurs coefficients à zéro.

Au lieu de cette marche, on peut prendre la suivante, qui est plus élégante. Soient $u = 0$, $v = 0$...., les équ. de condition données ; on multipliera leurs variations δu, δv...., par des indéterminées λ, λ'.... ; ce qui donnera $\lambda\delta u + \lambda'\delta v + ...$, fonction connue de $\delta x_{,}$, $\delta x_{,,}$, $\delta y_{,}$.... Ajoutons cette somme à $L_{,,} - L_{,}$, on aura

$$L_{,,} - L_{,} + \lambda\delta u + \lambda'\delta v + \ldots = 0 \quad \ldots \ldots \quad (E)$$

On traitera toutes les variations $\delta x_{,}$, $\delta x_{,,}$...., comme indépendantes, et égalant leurs coefficients à zéro, on éliminera entre ces équ. les indéterminées λ, λ'.... On parviendra par ce calcul au même résultat que par la méthode précédente ; car on n'a fait que des opérations permises, et l'on obtient ainsi le même nombre d'équ. finales. Ce calcul revient à la méthode d'élimination donnée dans l'Algèbre (n° 111).

Il faut observer qu'on ne doit pas conclure des équ. $u = 0$, $v = 0$...., qu'aux limites on ait $du = 0$, $dv = 0$.... ; ces conditions sont indépendantes, et peuvent fort bien ne pas coexister. Si

deux points donnés. Les équ. (D) sont celles de la courbe cherchée ; on en détermine les constantes par la condition que cette courbe passe par les deux points dont il s'agit.

* Cela signifie, en Géométrie, que la courbe cherchée doit être terminée à des points qui ne sont plus fixes, mais qui doivent être situés sur deux courbes ou deux surfaces données.

toutefois la chose avait eu lieu ainsi *, il faudrait regarder $du = 0$, $dv = 0$...., comme de nouvelles conditions, et outre le terme $\lambda\delta u$, il faudrait aussi comprendre $\lambda'\delta du$....

4° Nous ne dirons rien pour le cas où l'une des limites est fixe et l'autre assujettie à certaines conditions, ou même tout à fait arbitraire **, parce qu'il rentre dans les trois cas précédents.

928. Il pourrait aussi arriver que la nature de la question assujettît les variations δx, δy et δz à de certaines conditions données par des équ. $\varepsilon = 0$, $\theta = 0$...., et cela indépendamment des limites; comme, par ex., lorsque la courbe cherchée doit être tracée sur une surface courbe donnée. Alors l'équ. (B) ne se partagerait plus en trois, et les équ. (D) n'auraient plus lieu. Il faudrait d'abord réduire, comme ci-dessus, les variations au plus petit nombre possible dans la formule (B) à l'aide des équ. de condition, et égaler à zéro les coefficients des variations restantes; ou, ce qui revient au même, ajouter à (B) les termes $\lambda\delta\varepsilon + \lambda'\delta\theta + ...$; partager cette équ. en d'autres en y regardant δx, δy, δz comme indépendantes; enfin, éliminer les indéterminées λ, λ'....

Nous ferons observer que, dans les cas particuliers, il est souvent préférable de faire, sur la fonction donnée Z, tous les calculs qui ont conduit aux équ. (B) et (C), au lieu de comparer chaque cas particulier aux formules générales précédemment données.

Tels sont les principes généraux du calcul des variations : appliquons-les à des exemples.

929. *Quelle est la courbe* CMK *plane* (fig. 44) *dont la longueur* MK, *comprise entre deux rayons vecteurs* AM *et* AK, *est la plus petite possible?*

On a (n°s 803, 769) $$s = \int \sqrt{(r^2 d\theta^2 + dr^2)} = Z,$$

il s'agit de trouver la relation $r = \varphi\theta$, qui rend Z un *minimum*. La variation est

$$\delta Z = \frac{r d\theta^2 . \delta r + r^2 d\theta . \delta d\theta + dr . \delta dr}{\sqrt{(r^2 d\theta^2 + dr^2)}},$$

* S'il s'agit d'une question de Géométrie, la courbe cherchée doit, dans ce cas, avoir à sa limite un contact d'un certain ordre avec la courbe ou la surface dont l'équ. est $u = 0$.

** Alors la courbe cherchée a l'une de ses extrémités assujettie à passer par un point fixe, tandis que l'autre doit être ou quelconque, ou située sur une courbe ou sur une surface donnée.

comparant à l'équation (A), où l'on supposera $x = r$, $y = \theta$, on a

$$m = \frac{r\mathrm{d}\theta^2}{\mathrm{d}s},\ n = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}s},\ M = 0,\ N = \frac{r^2\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s},\ 0 = p = P = \pi = \ldots$$

les équ. (D) sont

$$\frac{r\mathrm{d}\theta^2}{\mathrm{d}s} = \mathrm{d}\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}s}\right),\quad \frac{r^2\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s} = c.$$

En éliminant $\mathrm{d}\theta$, puis $\mathrm{d}s$, entre ces équ. et $\mathrm{d}s^2 = r^2\mathrm{d}\theta^2 + \mathrm{d}r^2$, on reconnaît qu'elles s'accordent ; en sorte qu'il suffit d'intégrer l'une. Mais la perpend. AI, abaissée de l'origine A sur une tangente quelconque TM, est

$$AI = AM \times \sin AMT = r \sin \beta,$$

qui équivaut (page 422) à

$$AI = \frac{r \operatorname{tang} \beta}{\sqrt{(1 + \operatorname{tang}^2 \beta)}},\quad \text{ou}\ \frac{r^2\mathrm{d}\theta}{\sqrt{(r^2\mathrm{d}\theta^2 + \mathrm{d}r^2)}} = \frac{r^2\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s} = c\ ;$$

comme cette perpend. est ici constante, la ligne cherchée est droite. Les limites M et K étant indéterminées, l'emploi des équ. (C) n'a pas été nécessaire.

930. *Trouver la plus courte ligne entre deux points donnés, ou entre deux courbes données.*

La longueur s de la ligne est $\int Z = \int \sqrt{(\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2)}$, (n° 791) ; il s'agit de rendre cette quantité un *minimum ;* on a

$$\delta Z = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}\delta\mathrm{d}x + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}\delta\mathrm{d}y + \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s}\delta\mathrm{d}z\ ;$$

et comparant avec la formule (A), on trouve

$$m = 0,\ \ M = 0,\ \ \mu = 0,\ \ n = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s},\ \ N = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s},\ \ \nu = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s}\ :$$

les autres coefficients P, p, π.... sont nuls. Les équations (D) deviennent donc ici

$$\mathrm{d}\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}\right) = 0,\quad \mathrm{d}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}\right) = 0,\quad \mathrm{d}\left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s}\right) = 0;$$

d'où l'on conclut $\mathrm{d}x = a\mathrm{d}s$, $\mathrm{d}y = b\mathrm{d}s$ et $\mathrm{d}z = c\mathrm{d}s$. En carrant et ajoutant, on obtient $a^2 + b^2 + c^2 = 1$, condition que les con-

stantes a, b, c doivent remplir pour que ces équ. soient compatibles entre elles. Par la division, on trouve

$$\frac{dy}{dx}=\frac{b}{a},\ \frac{dz}{dx}=\frac{c}{a};\ \text{d'où } bx=ay+a',\ cx=az+b';$$

les projections de la ligne cherchée sont donc des droites; ainsi cette ligne est elle-même une droite.

Pour en déterminer la position, il faut connaître les cinq constantes a, b, c, a' et b'. S'il s'agit de trouver la plus courte distance entre deux points fixes donnés (fig. 85), $A(x_{,}\,y_{,}\,z_{,})$, $C(x_{,,}\,y_{,,}\,z_{,,})$, il est clair que $\delta x_{,}$, $\delta y_{,,}$, $\delta y_{,}$.... sont nuls, et que l'équ. (C) a lieu d'elle-même. En assujettissant nos deux équations à être satisfaites lorsqu'on y substitue $x_{,}$, $x_{,,}$, $y_{,}$, etc., pour x, y et z, on obtiendra quatre équ., qui, avec $a^2+b^2+c^2=1$, détermineront nos cinq constantes.

Supposons que la 2[e] limite soit un point fixe C dans le plan xy, et la 1[re] une courbe AB, située aussi dans ce plan; l'équation $bx=ay+a'$ suffit alors. Soit $y_{,}=fx_{,}$, l'équ. de AB; on tire $\delta y_{,}=A\delta x_{,}$; l'équ. ($C$) devient $L=\frac{dx}{ds}.\delta x+\frac{dy}{ds}.\delta y$; et comme la 2[e] limite C est fixe, il suffit de combiner ensemble les équations $\delta y_{,}=A\delta x_{,}$, et $dx_{,}.\delta x_{,}+dy_{,}.\delta y_{,}=0$. En éliminant $\delta y_{,}$, on obtient

$$dx_{,}+Ady_{,}=0.$$

On aurait pu aussi multiplier l'équ. de condition $\delta y_{,}-A\delta x_{,}=0$ par l'indéterminée λ, et ajouter à $L_{,}$, ce qui eût donné

$$\frac{dx_{,}}{ds_{,}}.\delta x_{,}+\frac{dy_{,}}{ds_{,}}.\delta y_{,}+\lambda\delta y_{,}-\lambda A.\delta x_{,}=0,$$

d'où $$\frac{dx_{,}}{ds_{,}}-\lambda A=0,\quad \frac{dy_{,}}{ds_{,}}+\lambda=0.$$

Éliminant λ, on obtient de même $dx_{,}+Ady_{,}=0$.

Mais puisque le point $A(x_{,}, y_{,})$ est sur notre droite AC, on a aussi $bdx_{,}=ady_{,}$; d'où $a=-bA$, et $\frac{dy}{dx}=-\frac{1}{A}=\frac{b}{a}$; ce qui fait voir que la droite AC est normale (n° 762) à la courbe proposée AB. La constante a' se détermine par la considération de la 2[e] limite qui est fixe et donnée.

Il serait facile d'appliquer le raisonnement précédent aux trois

dimensions, on parviendrait à la même conséquence ; on peut donc conclure qu'en général, la plus courte distance *AC* (fig. 86), entre deux courbes *AB*, *CD*, est la droite *AC* qui est normale à l'une et à l'autre.

Si la plus courte ligne demandée devait être tracée sur une surface courbe, dont $u = 0$ serait l'équ., alors l'équ. (*B*) ne se décomposerait plus en trois, à moins qu'on n'y ajoutât le terme $\lambda\delta u$; alors on pourrait regarder δx, δy et δz comme indépendants, et l'on trouverait les relations

$$\mathrm{d}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} + \lambda\,\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = 0, \quad \mathrm{d}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s} + \lambda\,\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y} = 0, \quad \mathrm{d}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s} + \lambda\,\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}z} = 0.$$

Éliminant λ, on a les deux équations

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}z}\,\mathrm{d}\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}\right) = \left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right)\mathrm{d}\left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s}\right), \quad \left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}\right)\mathrm{d}\left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s}\right) = \left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}z}\right)\mathrm{d}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}\right),$$

qui sont celles de la courbe cherchée.

Prenons pour exemple la moindre distance *A'C'* mesurée sur une sphère qui a son centre à l'origine : d'où

$$u = x^2 + y^2 + z^2 - r^2 = 0, \quad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = 2x, \quad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y} = 2y, \quad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}z} = 2z.$$

Nos équations deviennent, en prenant d*s* constant,

$$z\mathrm{d}^2x = x\mathrm{d}^2z, \quad z\mathrm{d}^2y = y\mathrm{d}^2z, \quad \text{d'où} \quad y\mathrm{d}^2x = x\mathrm{d}^2y.$$

Intégrant, on a

$$z\mathrm{d}x - x\mathrm{d}z = a\mathrm{d}s, \quad z\mathrm{d}y - y\mathrm{d}z = b\mathrm{d}s, \quad y\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y = c\mathrm{d}s.$$

En multipliant la 1re de ces équ. par $-y$, la 2e par x, la 3e par z, et ajoutant, on trouve $ay = bx + cz$, équ. d'un plan qui passe par l'origine des coordonnées. Ainsi, la courbe cherchée est le grand cercle *A'C'* (fig. 86), qui passe par les deux points donnés *A'* et *C'*, ou qui est normale aux deux courbes *A'B* et *C'D*, qui servent de limites, et sont données sur la surface sphérique.

931. Lorsqu'un corps se meut dans un fluide, il en éprouve une résistance qui dépend de sa forme, toutes circonstances égales d'ailleurs : si ce corps est de révolution et se meut dans le sens de son

axe, la Mécanique prouve que la résistance est la moindre possible, quand l'équ. de la courbe génératrice remplit la condition,

$$\int\frac{y\mathrm{d}y^3}{\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2}=minimum,\ \text{d'où}\ Z=\frac{yy'^3\mathrm{d}x}{1+y'^2}.$$

Déterminons cette courbe génératrice du *solide de moindre résistance*. En prenant la variation, on trouve

$$m=0,\quad n=\frac{-2y\mathrm{d}y^3\mathrm{d}x}{(\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2)^2}=\frac{-2yy'^3}{(1+y'^2)^2},\quad p=0\ldots,$$

$$M=\frac{\mathrm{d}y^3}{\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2}=\frac{y'^3\mathrm{d}x}{1+y'^2},\quad N=\frac{yy'^2(3+y'^2)}{(1+y'^2)^2}\ldots$$

la 2ᵉ équ. (D) est $M-\mathrm{d}N=0$; et il suit du calcul qu'on vient de faire sur Z, que

$$\mathrm{d}\left(\frac{y'^3y}{1+y'^2}\right)=M\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+N\mathrm{d}y'=y'\mathrm{d}N+N\mathrm{d}y',$$

à cause de $M=\mathrm{d}N$. Ainsi, en intégrant, on a

$$a+\frac{y'^3y}{1+y'^2}=Ny'=\frac{yy'^3(3+y'^2)}{(1+y'^2)^2}.$$

Donc $a(1+y'^2)^2=2yy'^3$. Observez que la 1ʳᵉ des équ. (D), ou $m-\mathrm{d}n=0$, aurait donné de suite ce même résultat, savoir, $-\mathrm{d}n=0$, ou $-n=a$; en sorte que ces deux équ. conduisent au même but. On a

$$y=\frac{a(1+y'^2)^2}{2y'^3},\quad x=\int\frac{\mathrm{d}y}{y'}=\frac{y}{y'}+\int\frac{y\mathrm{d}y'}{y'^2};$$

en substituant pour y sa valeur, cette intégrale est facile à obtenir; il reste ensuite à éliminer y' entre ces valeurs de x et de y, et l'on obtient l'équ. de la courbe demandée, contenant deux constantes qu'on déterminera d'après des conditions données.

932. *Quelle est la courbe* ABM (fig. 46), *dans laquelle l'aire* BODM, *comprise entre l'arc* BM, *les rayons de courbure* BO, MD, *qui le terminent, et l'arc* OD *de la développée, est un minimum?* L'élément de l'arc AM est $\mathrm{d}s=\mathrm{d}x\sqrt{(1+y'^2)}$; le rayon de courbure MD est $\frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''}$, (nº 773, p. 371) ; le produit est l'élément de l'aire

proposée,

$$Z = \frac{(1+y'^2)^2 \, . \, dx}{y''} = \frac{(dx^2+dy^2)^2}{dx \, . \, d^2y}.$$

Il s'agit de trouver l'équ. $y = fx$, qui rend $\int Z$ un *minimum*. Prenons la variation δZ, et nous bornant à la 2e des équations (D), qui suffit à notre objet, nous trouvons

$$M=0, \quad N - dP = 4a,$$

$$N = \frac{dx^2+dy^2}{dx \, . \, d^2y} \, . \, 4dy = \frac{1+y'^2}{y''} \, . \, 4y', \quad P = -\frac{(1+y'^2)^2}{y''^2 \, . \, dx}.$$

Or,

$$d\left(\frac{(1+y'^2)^2}{y''}\right) = Ndy' + Pdy'' \, . \, dx = 4ady' + dP \, . \, dy' + Pdy'' \, . \, dx,$$

en mettant $4a + dP$ pour N. D'ailleurs $y''dx = dy'$, change ces deux derniers termes en

$$(y''dP + Pdy'')\,dx = d(Py'') \, . \, dx = -d\left(\frac{(1+y'^2)^2}{y''}\right).$$

Donc, en intégrant, $\dfrac{(1+y'^2)^2}{2y''} = ay' + b$,

$$y'' = \frac{(1+y'^2)^2}{2(ay'+b)} = \frac{dy'}{dx}, \quad dx = \frac{2(ay'+b)dy'}{(1+y'^2)^2},$$

enfin, $$x = c + \frac{by'-a}{1+y'^2} + b \, . \, \text{arc}\,(\text{tang} = y').$$

D'un autre côté, $y = \int y'dx = y'x - \int xdy'$, ou

$$y = y'x - cy' - \int \frac{by'-a}{1+y'^2}\,dy' - \int bdy' \, . \, \text{arc}\,(\text{tang} = y'),$$

ce dernier terme s'intègre par parties, et l'on a

$$y = y'x - cy' - (by'-a) \, . \, \text{arc}\,(\text{tang} = y') + f.$$

Éliminons l'arc tang. entre ces valeurs de x et de y :

$$by = a(x-c) + \frac{(by'-a)^2}{1+y'^2} + bf,$$

$$\sqrt{(by - ax + g)} = \frac{(by'-a)dx}{ds}, \quad ds = \frac{bdy - adx}{\sqrt{(by-ax+g)}};$$

enfin (IV, p. 408), $s = 2\sqrt{(by-ax+g)} + h$.

Cette équation, rapprochée de celle de la page 443, V, montre que la courbe cherchée est une cycloïde, dont on déterminera les quatre constantes d'après un égal nombre de conditions données.

933. Prenons pour 3e ex. la fonction $Z=\frac{ds}{\sqrt{(z-h)}}$, s étant un arc de courbe, ou $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$: il s'agit de rendre $\int Z$ un *minimum*. Ce problème revient à trouver la courbe AC' (fig. 85) suivant laquelle un corps pesant doit tomber, pour mettre le moins de temps possible à passer de C' en A (*voy.* ma *Mécanique*, n° 192). Formant la variation δz, nous trouvons

$$\mu=\frac{-ds}{2\sqrt{(z-h)^3}},\ n=\frac{dx}{ds\sqrt{(z-h)}},N=\frac{dy}{ds\sqrt{(z-g)}},\ \nu=\frac{dz}{ds\sqrt{(z-h)}},$$

enfin, $m=M=P\ldots\ldots=0$. Les équ. D deviennent

$$d\left(\frac{dx}{ds\sqrt{(z-h)}}\right)=0,\quad d\left(\frac{dy}{ds\sqrt{(z-h)}}\right)=0\ldots\ldots(1)$$

Nous omettons ici la 3e équ., qu'on peut démontrer être comprise dans les deux autres; condition sans laquelle le problème proposé serait absurde. En intégrant, et divisant l'un par l'autre les résultats, on obtient $dy=adx$; ce qui prouve que la projection de la courbe sur le plan xy est une droite, et que, par conséquent, cette courbe est décrite dans un plan perpend. aux xy. Prenons ce plan pour celui des xz; la 1re des équations (1) suffira, et nous aurons $kdx = ds\sqrt{(z-h)}$; et comme $ds^2 = dx^2 + dz^2$, on trouve $dx = \frac{dz.\sqrt{(z-h)}}{\sqrt{(k^2+h-z)}}$. En posant $z=k^2+h-u$, on reconnaît que cette équ. est elle d'une cycloïde (*voy.* p. 363, VI) dont k^2 est le diamètre du cercle générateur.

Quand les limites sont deux points fixes A et C' (fig. 85), il n'y a aucune autre condition à remplir, si ce n'est de faire passer la cycloïde AC' par ces deux points, ce qui détermine les valeurs des constantes k et h.

Si la 2e limite est un point fixe C', et si la 1re est une courbe AB, située, ainsi que le point fixe, dans le plan vertical des xz, on a

$$\delta x_{\prime\prime}=\delta z_{\prime\prime}=0,$$

et $$L_{\prime}=\frac{dx_{\prime}}{ds_{\prime}\sqrt{(z_{\prime}-h)}}\cdot\delta x_{\prime}+\frac{dz_{\prime}}{ds_{\prime}\sqrt{(z_{\prime}-h)}}\cdot\delta z'.$$

Il suffit de rendre $L_{,}$ nul, en ayant égard à la 1[re] limite qui est une courbe AB dont $x_{,} = fz_{,}$ est l'équation donnée. On en déduit $\delta x' - A\delta z_{,} = 0$; multipliant par λ, ajoutant à L, on trouve les deux équ.

$$\frac{dx_{,}}{ds_{,}\sqrt{(z_{,}-h)}} + \lambda = 0, \quad \frac{dz_{,}}{ds_{,}\sqrt{(z_{,}-h)}} - A\lambda = 0.$$

En éliminant λ, on obtient $dz_{,} + Adx' = 0$. La cycloïde devra donc couper à angle droit la courbe donnée AB; la constante k sera déterminée en comparant l'équ. de la cycloïde à la précédente.

On trouvera dans les trois dimensions la même conséquence, de sorte que la courbe de plus vite descente, en partant d'une courbe quelconque CD (fig. 86), pour aller à une autre AB, est une cycloïde $A'C'$, normale à ces deux dernières. La même chose aurait aussi lieu si les deux limites étaient prises sur deux surfaces courbes, ainsi qu'on peut s'en convaincre.

Quand la courbe doit être tracée sur une surface donnée par son équation $u = 0$, l'équ. (B) ne se partage en trois équ. qu'après avoir ajouté $\lambda\delta u$, ce qui donne, au lieu des équ. (1), trois équ. entre lesquelles, éliminant λ, on aurait celles de la courbe cherchée. Si l'on avait pour limites deux points fixes, les constantes seraient déterminées par la condition que la courbe passât par ces deux points : lorsqu'on a pour limites deux courbes, celle qu'on cherche doit les couper à angle droit comme ci-dessus. Ainsi, le reste du problème est le même dans les deux cas.

934. *Quelle est la courbe* BM (fig. 78) *dont la longueur est donnée, qui passe en* B *et en* M, *et qui intercepte entre ses ordonnées terminales* BC, PM *et l'axe* Ax, *l'aire la plus grande ?* $\int y dx$ doit être un *maximum*, l'arc s étant constant : il faut donc combiner la variation de $\int Z = \int y dx$ avec celle de $\int\sqrt{(dx^2 + dy^2)} - \text{const.} = 0$, suivant ce qu'on a vu n° 928, afin de pouvoir partager l'équ. B en deux autres. On trouve pour la variation complète

$$\int\left(y \cdot \delta dx + dx \cdot d\delta y + \frac{\lambda dx \cdot \delta dx + \lambda dy \cdot \delta dy}{ds}\right) = 0.$$

d'où $$m = 0,\ n = y + \lambda\frac{dx}{ds},\quad M = dx,\ N = \lambda \cdot \frac{dy}{ds},$$

et $$y + \lambda \cdot \frac{dx}{ds} = c,\quad x - \lambda \cdot \frac{dy}{ds} = c'.$$

Ces équ. sont identiques, puisqu'en intégrant l'une ou l'autre on parvient au même résultat ; on ne doit donc pas éliminer λ entre elles. La 1re donne, en mettant $\sqrt{(dx^2+dy^2)}$ pour ds,

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\sqrt{[\lambda^2-(y-c)^2]}}{y-c},\ \text{d'où}\ (x-c')^2+(y-c)^2=\lambda^2.$$

La courbe cherchée est donc un cercle ; et suivant qu'il tourne sa convexité ou sa concavité à l'axe des x, l'aire est un *minimum* ou un *maximum*. On doit déterminer les constantes c, c' et λ par la condition que le cercle passe par les points B et M, et que l'arc BM ait la longueur exigée. Tel est le plus simple des problèmes d'*Isopérimètres*.

935. *Quelle est la courbe* BM (fig. 78) *pour laquelle l'aire* BCMP *soit donnée, l'arc* BM *étant le plus court possible?* On a ici

$$\int\sqrt{(dx^2+dy^2)}=minimum,$$

avec la condition $\int y\,dx-\text{const.}=0$. En imitant le raisonnement ci-dessus, on obtient

$$\frac{dy}{ds}+\lambda y=c,\quad \lambda x-\frac{dy}{ds}=c',$$

équ. visiblement les mêmes que celles que nous venons de trouver : le cercle est donc encore la courbe demandée.

936. *On demande quelle doit être la courbe* MK (fig. 44) *la plus courte possible, l'aire* MAK *comprise entre les deux rayons vecteurs* AM, AK *étant donnée ?*

On doit avoir $s=\int\sqrt{(dx^2+dy^2)}=minimum$, avec la condition (n° 769), $\int\frac{1}{2}(x\,dy-y\,dx)=\text{const.}$: ce qui donne

$$\frac{dx\,.\,\delta dx+dy\,.\,\delta dy}{ds}+\tfrac{1}{2}\lambda\,(dy\,.\,\delta x+x\,.\,\delta dy-dx\,.\,\delta y-y\,.\,\delta dx)=0.$$

$$\tfrac{1}{2}\lambda dy-d\left(\frac{dx}{ds}-\tfrac{1}{2}\lambda y\right)=0,\quad \tfrac{1}{2}\lambda dx+d\left(\frac{dy}{ds}+\tfrac{1}{2}\lambda x\right)=0.$$

Ces équ. s'accordent visiblement, et il suffit d'intégrer la 1re, λ étant une constante arbitraire ; il vient

$$\lambda y+c=\frac{dx}{ds},\ \text{ou}\ (\lambda y+c)\,dy=dx\sqrt{[1-(\lambda y+c)^2]}.$$

On fera $\lambda y + c = z$, et l'intégration sera facile (n° 809, IV) : on trouvera $(\lambda x + b)^2 + (\lambda y + c)^2 = 1$, ou, si l'on veut,

$$(x + b')^2 + (y + c')^2 = k^2.$$

La courbe cherchée est donc un cercle, assujetti à passer par les points M et K, et à former l'aire MAK de grandeur donnée. En sorte que toute autre courbe, passant par deux points M et K de cette circonférence, et formant la même aire, aurait l'arc intercepté dans l'angle MAK plus long que l'arc de cercle, quels que soient les points M et K. On verra de même que le cercle répond aussi au problème inverse : *de toutes les courbes, d'égale longueur entre deux points donnés, quelle est celle dont l'aire* MAK *est un* maximum ?

937. *Parmi toutes les courbes planes, terminées par deux ordonnées* BC, PM (fig. 71), *qui engendrent dans leurs révolutions des corps dont l'aire est la même, on demande quelle est celle qui produit le plus grand volume?*

On a $\int \pi y^2 dx =$ *maximum*, et $\int 2\pi y \sqrt{(dx^2 + dy^2)} =$ const.

D'où il est facile de tirer

$$\frac{2\lambda y dx}{ds} + y^2 = c, \quad y dx + \lambda ds = d\left(\frac{\lambda y dy}{ds}\right).$$

Ces équ. s'accordent entre elles, et la 1re donne

$$dx = \frac{(c - y^2)\, dy}{\sqrt{[4\lambda^2 y^2 - (c - y^2)^2]}} \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

Si la constante $c = 0$, on trouve $dx = \dfrac{-y dy}{\sqrt{(4\lambda^2 - y^2)}}$, d'où $(x - b)^2 + y^2 = 4\lambda^2$; équ. d'un cercle dont le centre est en un lieu quelconque de l'axe des x, et qui doit passer par les deux points donnés. Toutefois ce cercle ne répond au problème qu'autant que l'aire engendrée par la révolution de l'arc CM se trouve avoir l'étendue exigée : en effet, l'équ. intégrale ne renferme que deux constantes, qu'on déterminera par la condition que la ligne passe par les points C et M. La solution générale du problème est donnée par l'équ. (1).

938. *De toutes les courbes planes, d'égale longueur entre deux points donnés, quelle est celle qui, dans sa révolution, engendre un volume ou une aire* maximum ?

Dans les deux cas, $\int \sqrt{(dx^2 + dy^2)} = \text{const}$. En outre, dans l'un $\int \pi y^2 dx$, et dans l'autre $\int 2\pi y ds$ (n° 792), doit être un *maximum*. D'abord, dans le 1[er] cas, $Z = \pi y^2 dx$. En raisonnant comme ci-dessus, on trouve

$$\pi y^2 + \frac{\lambda dx}{ds} = c, \quad \text{d'où} \quad dx = \frac{(c - \pi y^2)\,dy}{\sqrt{[\lambda^2 - (c - \pi y^2)^2]}}.$$

La courbe dont il s'agit ici jouit de la propriété que son rayon de courbure R est $= \frac{\lambda}{2\pi y}$ (n° 774, 6°) ; en effet, on a

$$y' = \sqrt{\left[\left(\frac{\lambda}{c - \pi y^2}\right)^2 - 1\right]}, \quad y'' = \frac{2\lambda^2 \pi y}{(c - \pi y^2)^3}, \quad s' = \frac{\lambda}{c - \pi y^2}.$$

Cette courbe est l'*Élastique*, dont le rayon de courbure est en raison inverse de l'ordonnée. Outre c et λ, on a une 3[e] constante ; les conditions que la courbe passe par les deux points donnés, et ait la longueur exigée, servent à déterminer ces trois quantités.

Dans le 2[e] cas, $Z = \int 2\pi y \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$, d'où

$$\frac{2\pi y dx + \lambda dx}{ds} = c, \quad dx = \frac{c dy}{\sqrt{[(2\pi y + \lambda)^2 - c^2]}}.$$

La courbe demandée est une *Chaînette* (p. 417), dont l'axe est horizontal : il y a *maximum* ou *minimum*, suivant qu'elle présente à l'axe des x sa concavité ou sa convexité.

939. *Quelle est la courbe de longueur donnée* s, *entre deux points fixes, pour laquelle* $\int y ds$ *est un* maximum ? On trouvera aisément

$$(y + \lambda)\frac{dx}{ds} = c, \quad \text{d'où} \quad dx = \frac{c dy}{\sqrt{[(y + \lambda)^2 - c^2]}}.$$

On obtient la même courbe que ci-dessus. Comme $\frac{\int y ds}{s}$ est l'ordonnée verticale du centre de gravité d'un arc de courbe dont s est la longueur (*voy.* ma *Mécanique*, n° 64), on voit que le centre de gravité d'un arc quelconque de la chaînette est plus bas que celui d'un arc de toute autre courbe terminé aux mêmes points.

940. En raisonnant de même pour $\int y^2 dx = minimum$, et $\int y dx = \text{const.}$, on trouve $y^2 + \lambda y = c$, ou plutôt $y = c$: on a une droite parallèle aux x. Comme $\frac{\int y^2 dx}{2\int y dx}$ est l'ordonnée verticale du

centre de gravité de toute aire plane (*voy.* ma *Mécanique*, n° 68), celui d'un rectangle vertical dont un côté est horizontal, est le plus bas possible. En sorte que toute masse d'eau dont la surface supérieure est horizontale, a son centre de gravité le plus profondément situé.

Consultez l'ouvrage d'Euler, intitulé : *Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes.*

CHAPITRE VII.

CALCUL DES DIFFÉRENCES.

Méthode directe des Différences. Interpolation.

941. Étant donnée une série $a, b, c, d \ldots$, retranchons chaque terme du suivant ; $a' = b - a$, $b' = c - b$, $c' = d - c \ldots$ formeront la série $a', b', c', d' \ldots$ des *différences premières.*

On trouve de même la série $a'', b'', c'', d'' \ldots$ des *différences secondes*, $a'' = b' - a'$, $b'' = c' - b'$, $c'' = d' - c' \ldots$; celles-ci donnent les *différences troisièmes* $a''' = b'' - a''$, $b''' = c'' - b'' \ldots$; et ainsi de suite. Ces différences sont indiquées par Δ, et l'on donne à cette caractéristique un exposant qui en marque l'ordre ; Δ^n est un terme de la suite des différences n^{es}. On conserve d'ailleurs à chaque différence son signe, lequel est —, quand on la tire d'une suite décroissante.

Par exemple, la fonction $y = x^3 - 9x + 6$, en faisant successivement $x = 0, 1, 2, 3, 4 \ldots$ donne une série de nombres, dont y est le terme général, et d'où l'on tire les différences, ainsi qu'il suit :

pour	$x =$	0,	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7.	
série	$y =$	6,	— 2,	— 4,	6,	34,	86,	168,	286.	
diff. 1res	$\Delta y =$	— 8,	— 2,	10,	28,	52,	82,	118. . . .		
diff. 2es	$\Delta^2 y =$		6,	12,	18,	24,	30,	36.		
diff. 3es	$\Delta^3 y =$			6,	6,	6,	6,	6,	6.	

942. On voit que les différences troisièmes sont ici constantes, et que les différences deuxièmes font une équidifférence : on arrive

à des différences constantes toutes les fois que y est une fonction rationnelle et entière de x, ainsi que nous l'allons démontrer.

Que dans le monome kx^m on fasse $x = \alpha, \beta, \gamma \ldots \theta, \varkappa, \lambda$ (ces nombres ayant h pour différence constante), on a la série $k\alpha^m, k\beta^m, k\gamma^m \ldots k\theta^m, k\varkappa^m, k\lambda^m$. Comme $\varkappa = \lambda - h$, en développant $k\varkappa^m = k(\lambda - h)^m$, et désignant par $m, A', A'' \ldots$ les coefficients de la formule du binôme, on trouve

$$k(\lambda^m - \varkappa^m) = kmh\lambda^{m-1} - kA'h^2\lambda^{m-2} + kA''h^3\lambda^{m-3} \ldots$$

Telle est la différence première entre deux termes quelconques de la série $k\alpha^m, k\beta^m, k\gamma^m \ldots$ La différence entre les termes qui précèdent, ou $k(\varkappa^m - \theta^m)$, s'en déduit en changeant λ en $\varkappa$, $\varkappa$ en θ; et comme $\varkappa = \lambda - h$, il faut mettre $\lambda - h$ pour λ dans ce 2ᵉ membre :

$$kmh(\lambda-h)^{m-1} - kA'h^2(\lambda-h)^{m-2} \ldots = kmh\lambda^{m-1} - [A' + m(m-1)]kh^2\lambda^{m-2}.$$

Retranchant ces résultats, les deux premiers termes disparaissent, et il vient, pour la différence 2ᵉ d'un rang arbitraire,

$$km(m-1)h^2\lambda m^{m-2} - kB'h^3\lambda^{m-3} + \ldots$$

Changeant de même λ en $\lambda - h$ dans ce dernier développement, et retranchant, les deux 1ᵉʳˢ termes disparaissent, et l'on a pour différ. 3ᵉ,

$$km(m-1)(m-2)h^3\lambda^{m-3} - kB''h^4\lambda^{m-4} \ldots,$$

et ainsi de suite. Chacune de ces différences a un terme de moins dans son développement que la précédente ; la 1ʳᵉ a m termes ; la 2ᵉ en a $m - 1$, la 3ᵉ $m - 2 \ldots$, etc. ; d'après la forme du 1ᵉʳ terme, qui finit par rester seul dans la différence m^e, on voit que celle-ci se réduit à la quantité constante $1.2.3 \ldots mkh^m$.

Si dans les fonctions M et N, on prend pour x deux nombres, les résultats étant m et n, celui qui provient de $M + N$ est $m + n$. Soient de même m' et n' les résultats donnés par deux autres valeurs de x; la différence 1ʳᵉ, provenue de $M + N$, est visiblement $(m - m') + (n - n')$. Il faut en dire autant des différ. 3ᵉˢ, 4ᵉˢ.... : *la différ. de la somme est la somme des différ.*

Donc, si l'on fait $x = \alpha, \beta, \gamma \ldots$ dans $kx^m + px^{m-1} + \ldots$, la différ. $(m - 1)^e$ de px^{m-1} étant constante, la m^e sera nulle, donc

pour notre polynôme la différ. m^e est la même que s'il n'y avait que son 1er terme kx^m. Donc, *la différence* m^e *est constante, lorsqu'on substitue à* x *des nombres équidifférents, dans une fonction rationnelle et entière de degré* m.

943. On voit donc que, si l'on est conduit à substituer des nombres équidifférents, ainsi qu'on le fait pour résoudre une équ. numérique (pages 82 et 196), il suffira de chercher les $(m+1)$ 1ers résultats, d'en former les différences 1res, 2es.... : la m^e n'aura qu'un terme ; comme on sait qu'elle est constante et $=1.2.3....mkh^m$, on prolongera cette série à volonté. On prolongera ensuite, par des additions successives, la série des différ. $(m-1)^{es}$ au delà des deux termes connus ; celle de $(m-2)^{es}$ sera de même prolongée.... ; enfin la série des résultats provenus de ces substitutions, le sera aussi, autant qu'on voudra, par de simples additions.

C'est ce qu'on voit dans cet ex. : $x^3 - x^2 - 2x + 1$.

$x =$ 0.	1.	2.	3	
donne....	1.	— 1.	1.	13
1re diff.	— 2.	2.	12	
2e..........	4.	10		
3e...........	6			

Diff. 3es	6.	6.	6.	6.	6.	6.	6....
2es	4.	10.	16.	22.	28.	34.	40....
1res	— 2.	+ 2.	12.	28.	50.	78.	112....
Résultats	1.	— 1.	1.	13.	41.	91.	169....
Pour $x =$	0.	1.	2.	3.	4.	5.	6....

Ces séries se déduisent de celle qui est constamment 6 . 6 . 6.... et des termes initiaux déjà trouvés pour chacune : *un terme s'obtient en ajoutant celui qui est à sa gauche, avec le nombre écrit au-dessus de ce dernier*. On peut aussi continuer les séries dans le sens contraire, pour obtenir les résultats de $x = -1, -2, -3$. . . . *Un terme s'obtient alors en retranchant le nombre inscrit au-dessus de l'inconnue de celui qui est à droite de celle-ci.*

Dans le but qu'on se propose, de résoudre une équ., il n'est plus besoin de pousser la série des résultats au delà du terme où l'on ne doit rencontrer que des nombres de même signe, ce qui arrive dès que tous les termes d'une colonne quelconque sont positifs du côté gauche, et alternatifs dans le sens opposé, puisque les additions ou soustractions qui servent à prolonger les séries conservent constamment ces mêmes signes aux résultats. On obtient donc, par cette voie, des limites des racines soit positives, soit négatives.

944. A l'avenir, nous désignerons par y_x la fonction de x qui est le terme général de la série proposée, et engendre tous les termes, en faisant $x = 0, 1, 2, 3....$; par ex., y_5 désignera, qu'on y a

fait $x = 5$, ou qu'on a égard au terme qui en a 5 avant lui (le nombre 91, dans le dernier ex.). D'après cela,

$$y_1 - y_0 = \Delta y_0, \quad y_2 - y_1 = \Delta y_1, \quad y_3 - y_2 = \Delta y_2 \ldots.$$
$$\Delta y_1 - \Delta y_0 = \Delta^2 y_0, \quad \Delta y_2 - \Delta y_1 = \Delta^2 y_1, \quad \Delta y_3 - \Delta y_2 = \Delta^2 y_2 \ldots.$$
$$\Delta^2 y_1 - \Delta^2 y_0 = \Delta^3 y_0, \quad \Delta^2 y_2 - \Delta^2 y_2 = \Delta^3 y_1, \quad \Delta^2 y_3 - \text{etc.}$$

En général,

$$y_x - y_{x-1} = \Delta y_{x-1},$$
$$\Delta y_x - \Delta y_{x-1} = \Delta^2 y_{x-1},$$
$$\Delta^2 y_x - \Delta^2 y_{x-1} = \Delta^3 y_{x-1}, \text{ etc.}$$

945. Formons les différences de la série quelconque

$a \,.\, b \,.\, c \,.\, d \,.\, e \ldots.$	$b = a + a', \quad c = b + b', \quad d = c + c' \ldots.,$
$\Delta^1 \,.\, a' \,.\, b' \,.\, c' \,.\, d' \,.\, e' \ldots.$	$b' = a' + a'', \quad c' = b' + b'', \quad d' = c' + c'' \ldots.,$
$\Delta^2 \ldots a'' \,.\, b'' \,.\, c'' \,.\, d'' \ldots.$	$b'' = a'' + a''', \quad c'' = b'' + b''', \quad d'' = c'' + c''' \ldots.,$
$\Delta^3 \ldots a''' \,.\, b''' \,.\, c'''$ etc.	$b''' = a''' + a^{\text{IV}}, \quad c''' = b''' + b^{\text{IV}}, \quad d''' = c''' + c^{\text{IV}} \ldots.,$

En éliminant b, b', c, c'. . . ., des équations de la 1re ligne, on réduit le 2e membre à ne contenir que a, a', a''. . . . On peut aussi obtenir des valeurs de a', a'', a'''. . . ., qui ne renferment aucune lettre accentuée : on trouve

$$b = a + a', \quad c = a + 2a' + a'', \quad d = a + 3a' + 3a'' + a''',$$
$$e = a + 4a' + 6a'' + 4a''' + a^{\text{IV}}, \quad f = a + 5a' + 10a'' \text{ etc.}$$
$$a' = b - a, \quad a'' = c - 2b + a, \quad a''' = d - 3c + 3b - a \ldots.$$

Comme les initiales a', a'', a'''. . . . sont Δy_0, $\Delta^2 y_0$, $\Delta^3 y_0$. . . ., et que a, b, c, d. . . . sont y_0, y_1, y_2, y_3. . . ., on trouve

$y_1 = y_0 + \Delta y_0,$	$\Delta y_0 = y_1 - y_0,$
$y_2 = y_0 + 2\Delta y_0 + \Delta^2 y_0,$	$\Delta^2 y_0 = y_2 - 2y_1 + y_0,$
$y_3 = y_0 + 3\Delta y_0 + 3\Delta^2 y_0 + \Delta^3 y_0,$	$\Delta^3 y_0 = y_3 - 3y_2 + 3y_1 - y_0,$
$y_4 = y_0 + 4\Delta y_0 + 6\Delta^2 y_0$ etc.	$\Delta^4 y_0 = y_4 - 4y_3 + 6y_2$ etc.

En général,

$$y_x = y_0 + x\Delta y_0 + x\frac{x-1}{2}\Delta^2 y_0 + x\frac{x-1}{2} \cdot \frac{x-2}{3}\Delta^3 y_0, \ldots \quad (A)$$

$$\Delta^n y_0 = y_n - ny_{n-1} + n\frac{n-1}{2}y_{n-2} - n\frac{n-1}{2} \cdot \frac{x-2}{3}y_{n-3} + \ldots. \quad (B)$$

946. Ces équ. donnent, l'une un terme quelconque de rang x (le terme général de la série), quand on connaît le 1er terme de tous les ordres de différences ; l'autre l'initial de la série des n^{es} différences, connaissant tous les termes de la série y_0, y_1, y_2.... Pour appliquer la 1re à l'ex. du n° 943, on fera

$$y_0=1,\quad \Delta y_0=-2,\quad \Delta^2 y_0=4,\quad \Delta^3=6,\quad \Delta^4=0\ldots.$$

d'où $y_x=1-2x+2x(x-1)+x(x-1)(x-2)=x^3-x^2-2x+1.$

On se grave dans la mémoire les équations (A) et (B), en remarquant que

$$y_x=(1+\Delta y_0)^x,\quad \Delta^n y_0=(y-1)^n,$$

pourvu que, dans les développements de ces puissances, on transforme les puissances de Δy^0, en exposants de Δ, pour marquer l'ordre des différences, et les puissances de y en indices, mais il faut qu'on mette y^0 au lieu du 1er terme 1.

947. Quelle que soit la série proposée a, b, c, d...., on peut toujours la concevoir tirée d'une autre dont on aurait omis périodiquement certains termes, par ex., dont on aurait pris les termes de 2 en 2, ou de 3 en 3, ou de 4 en 4.... Étant donnée la 1re série a, b, c.... ou plutôt son terme général y_x (équ. A), proposons-nous de retrouver cette suite primitive, que nous désignerons par

$$a\,.\,a'\,.\,a''\ldots.\,a^{h-1}\,.\,b\,.\,b'\,.\,b''\ldots.\,b^{h-1}\,.\,c\,.\,c'\,.\,c''\ldots.\ \text{etc}\ldots.(C).$$

On voit qu'on suppose ici que $h-1$ termes ont été supprimés entre a et b, autant entre b et c...., lesquels termes étaient soumis à la même loi de génération que la série $a\,.\,b\,.\,c$.... qui en fait partie. L'*interpolation* consiste à insérer entre les termes d'une suite proposée, un nombre désigné de termes soumis à la même loi : pour *interpoler*, il faut donc trouver ces intermédiaires, ou plutôt le terme général de la série (C). Il suffit visiblement de poser dans l'équ. (A), terme général de a, b, c.... la condition $x=\dfrac{z}{h}$, z marquant le rang d'un terme de la nouvelle série (C); car en faisant

$$z=0,\quad 1,\quad 2,\quad 3\ldots\ldots\ h,\ h+1,\ h+2\ldots\ldots 2h\ldots \text{ etc.},$$

on a $x=0$,.... $(h-1)$ termes.... 1.... $(h-1)$ termes,...., 2,..... etc.

On retrouve donc ainsi les mêmes nombres $a, b, c\ldots$ que si l'on eût fait $x = 0, 1, 2\ldots$ dans A, et en outre $h-1$ termes intermédiaires. Cette substitution conduit à

$$y_z = y_0 + \frac{z\Delta^1}{h} + \frac{z(z-h)\Delta^2}{2\,.\,h^2} + \frac{z(z-h)(z-2h)\Delta^3}{2\,.\,3\,.\,h^3} \text{ etc....}(D)$$

Cette équ. donnera y_x quand $x = z$, z étant entier ou fractionnaire. On tire de la série proposée, $a, b, c, d\ldots$, les différences de tous les ordres, et le terme initial de ces séries représente $\Delta^1, \Delta^2\ldots$

Mais, pour pouvoir appliquer cette formule, il faut qu'on soit conduit à des différences constantes, afin qu'elle soit terminée, ou au moins qu'elle ait pour $\Delta^1, \Delta^2\ldots$ des valeurs décroissantes qui rendent la suite D convergente : le développement donne alors la grandeur approchée d'un terme répondant à $x = z$; bien entendu qu'il ne faut pas que les facteurs de Δ croissent assez pour détruire cette convergence, ce qui restreint z à ne pas dépasser une limite.

Par ex., on trouve n° 364, X, que

l'arc de 60° a pour corde	1000,0	$\Delta^2 = 74{,}6$	$\Delta^a = -2{,}0$
65°	1074,6	72,6	$-2{,}3.$
70°	1147,2	70,3	
75°	1217,5		

Puisque la différence est à peu près constante, du moins de 60° à 75°, on peut, dans cette étendue, employer l'équ. (D) ; faisant $h = 5$, il vient, pour la quantité à ajouter à $y_0 = 1{,}000$,

$$\tfrac{1}{5}\,.\,74{,}6\,.\,z - \tfrac{2}{50}\,z\,(z-5) = 15{,}12\,.\,z - 0{,}04\,.\,z^2.$$

Ainsi, en prenant $z = 1, 2, 3\ldots$, puis ajoutant 1000, on en tire les cordes de 61°, 62°, 63°. . . . ; et même prenant pour z des valeurs fractionnaires, on a la corde d'un arc quelconque intermédiaire entre 60° et 75°. Mais on ne doit guère étendre l'usage des différences ainsi obtenues, au delà des limites d'où elles ont été tirées. Voici encore un ex. :

On a $\log 3100 = y_m$	$= 4913617$	$\Delta^1 = 13987$	$\Delta^2 = -45$
$\log 3110$	$= 4927604$	13942	$-45.$
$\log 3120$	$= 4941546$	13897	
$\log 3130$	$= 4955443$		

Nous considérons ici la partie décimale du log. comme étant un nombre entier. En faisant $h = 10$, il vient, pour la partie additive à log 3100,

$$1400,95 \,.\, z - 0,225 \,.\, z^2.$$

Pour avoir les log. de 3101, 3102, 3103...., on fera $z = 1, 2, 3....$, et même, si l'on veut log 3107,58, on prendra $z = 7,58$, d'où résultera 10606 pour quantité à ajouter au log. de 3100; savoir, log 310758 = 5,4924223. *Voy.* mon *Astronomie pratique*, n° 77, et ma *Géodésie*, n° 378.

948. Ces procédés s'emploient utilement pour abréger le calcul des tables de log. de sinus, de cordes, etc. On se borne à chercher directement des résultats d'espace à autre, et on comble ensuite l'intervalle par *Interpolation*.

Le plus souvent la série proposée $a, b, c....$, ou la table de nombres qu'on veut interpoler, répond aux rangs 1, 2, 3...., alors $h = 1$, et l'on cherche quelque terme intermédiaire à y_0 et y_1 répondant au rang z; l'équ. (D) devient alors

$$y_z = y_0 + z\Delta^1 + z \,.\, \frac{z-1}{2}\Delta^2 + z \,.\, \frac{z-1}{2} \,.\, \frac{z-2}{3}\Delta^3 + \text{etc}.... (E)$$

1° Quand il arrive que Δ^2 est nul, ou très-petit, la série se réduit à $y_0 + z\Delta^1$; d'où l'on tire que la diff. $z\Delta^1$ croît proportionnellement à z; c'est-à-dire, *qu'il faut ajouter à y_0 une partie de Δ^1 proportionnelle à* z. Nous avons fait souvent usage de cette remarque (n°s 91, III, et 626).

2° Lorsque Δ^2 est constant, ou Δ^3 très-petit, ce qui arrive le plus souvent,

$$y_z = y_0 + z\left[\Delta^1 + \tfrac{1}{2}(z-1)\,\Delta^2\right].$$

Ainsi *formez $\frac{1}{2}(z-1)\,\Delta^2$, et corrigez Δ^1 de cette quantité; puis considérez la série comme ayant ce résultat pour différ.* 1re, *et que la différ. seconde y fût nulle;* ce qui ramène la recherche au cas précédent. Par ex.

log 310 =	2,4913617 = y_0	13987 = Δ^1	
log 311 =	27604	13942	— 45 = Δ^2
log 312 =	41546	13897	— 45
log 313 =	55443		

Comme les Δ^2 sont constants, pour avoir log 310,758, on fait $z = 0{,}758$, d'où $\frac{1}{2}(z-1)\Delta^2 = 0{,}121 \,.\, 45 = 5{,}445$; ajoutant à Δ^1, on a 13992,445 qu'il faut multiplier par z; le produit est 10606,27; dont log 310,758 = 2,4924223.

3° Quand Δ^3 est constant, ou que Δ^4 est négligeable, la série (E) n'a que quatre termes, et l'on voit qu'il faut corriger Δ^2 de $\frac{1}{3}(z-2)\Delta^3$, et regarder cette quantité Δ^2 comme une différence 2e constante; et ainsi de suite.

On peut voir des applications de cette théorie à la p. 101 des tables de log. de Callet, où l'on calcule ces log. avec 20 décimales.

4° Réciproquement, si les termes y_z et y_0 sont donnés et qu'on demande le rang z du 1er, la différ. 2e étant constante, on a

$$z = \frac{y_z - y_0}{\Delta^1 + \frac{1}{2}(z-1)\Delta^2} \quad \ldots\ldots \quad (F)$$

On fait d'abord le calcul en négligeant le 2e terme du dénom., ce qui donne une valeur approchée de z, qu'on substitue ensuite pour z dans la formule (F) sans y rien omettre.

Si l'on connaît le résultat du calcul, dans l'ex. précédent, on en tire le numér. $y_z - y_0 = 10606$, qui, divisé par $\Delta^1 = 13987$, donne une 1re approximation, $z = 0{,}758$: cette valeur mise pour z, dans F, donne $z = \dfrac{10606}{13992} = 0{,}758$.

Le problème inverse se résoudra de même lorsque Δ^3 sera constant, etc. (*voy. Conn. des Tems*, 1819, p. 303).

949. Voici une manière commode de diriger le calcul quand Δ^2 est constant, et qu'on veut trouver n nombres intermédiaires successifs entre y_0 et y_1. En changeant z en $z+1$ dans (D) et retranchant, on a la valeur générale de la différ. 1re pour la nouvelle série interpolée : faisant de même sur celle-ci, on obtient la différ. 2e, savoir :

$$\text{Différ. 1}^{\text{re}},\ \delta' = \frac{\Delta^1.}{h} + \frac{2z-h+1}{2h^2}\Delta^2., \quad \text{Différ. 2}^{\text{e}},\ \delta^2 = \frac{\Delta^2.}{h^2}.$$

On veut insérer n termes entre y_0 et y_1; il faut prendre $h = n+1$; puis faisant $z = 0$, on a le terme initial des différences

$$\delta^2 = \frac{\Delta^2}{(n+1)^2}, \quad \delta' = \frac{\Delta^1}{n+1} - \tfrac{1}{2}n\delta^2;$$

on calculera δ^2, puis δ^1; ce terme initial δ^1 servira à composer la suite des différences 1res de la série interpolée (δ^2 en est la différence constante); puis, enfin, on a cette série par de simples additions.

Veut-on, dans l'ex. de la p. 544, calculer les log. de 3101, 3102, 3103...., on interpolera 9 nombres entre ceux qui sont donnés : d'où $n = 9$, $\delta^2 = -0,45$, $\delta^1 = 1400,725$. On forme d'abord l'équidifférence qui a δ^1 pour terme initial, et $-0,45$ pour différ. constante, les différ. premières sont

1400,725, 1400,275, 1399,825, 1399,375, 1398,925.....

Des additions successives, en partant de log 3100, donneront les log. consécutifs qu'on cherche.

Je suppose qu'on ait observé un phénomène physique de 12^h en 12^h, et que les résultats mesurés aient donné

à 0^h. . . . $y_0 =$	78	$\Delta^1 = 222$	$\Delta^2 = 144$
12.	300	366	144
24.	666	510	
36.	1176		

Si je veux trouver l'état qui répond à 4^h, 8^h, 12^h...., j'interpolerai 2 termes, d'où $n = 2$, $\delta^2 = 16$, $\delta^1 = 58$; composant l'équidifférence qui commence par 58, et dont la raison est 16, j'aurai les différences 1res de la nouvelle série, et par suite celle-ci :

Diff. 1res δ^1 . . .	58 .	74 .	90 .	106 .	122 .	138. . . .,		
Série.	78 .	136 .	210 .	300 .	406 .	528 .	666. . . .,	
	0^h,	4^h,	8^h,	12^h,	16^h,	20^h,	24^h. . . .,	

La supposition des différ. 2es constantes convient à presque tous les cas, lorsqu'on peut choisir des durées convenables.

On fait fréquemment usage de cette méthode en Astronomie; et même quand l'observation, ou le calcul, donne des résultats dont les différences 2es offrent une marche peu régulière, on impute ce défaut à des erreurs, qu'on corrige en rétablissant une marche uniforme.

950. Les tables astronomiques, géodésiques...., se forment d'après ces principes. On calcule directement divers termes, qu'on prend assez rapprochés pour que les différences 1res ou 2es soient

constantes ; puis on interpole pour obtenir les nombres intermédiaires. *V.* mon *Astronomie pratique*, n° 78.

Ainsi, quand une série convergente donne la valeur de y, à l'aide de celle d'une variable x; au lieu de calculer y chaque fois que x est connu, quand la formule est d'un fréquent usage, on détermine les résultats y pour des grandeurs de x graduellement croissantes, de manière que les y soient peu différents : on inscrit, en forme de table, chaque valeur de y près de celle de x, qu'on nomme l'*Argument* de cette table. Pour des nombres x intermédiaires, de simples proportions donnent y, comme on l'a vu pour les log. (1[er] vol., page 107), et à la simple inspection, on obtient les résultats cherchés.

Quand la série a deux variables, ou arguments, x et z, les valeurs de y se disposent en table à *double entrée*, comme celle de Pythagore (n° 14); en prenant pour coordonnées x et z, le résultat est contenu dans la case déterminée ainsi. Par ex., ayant pris $z = 1$, on rangera sur la 1[re] ligne toutes les valeurs de y correspondantes à $x = 1, 2, 3....$; on mettra sur une 2[e] ligne, celles que donne $z = 2$; dans une 3[e], celles de $z = 3....$ Pour obtenir le résultat qui répond à $x = 3$ et $x = 5$, on s'arrêtera à la case qui, dans la 3[e] colonne, occupe le 5[e] rang. Les valeurs intermédiaires s'obtiennent d'une manière analogue à ce qui a été dit (*voy.* p. 20 et 22).

951. Nous avons supposé jusqu'ici que les x croissent par des équidifférences. S'il n'en est pas ainsi, et qu'on connaisse les résultats $y = a, b, c, d....$ provenus des suppositions quelconques $x = \alpha, \beta, \gamma, \delta....$, on peut recourir à la théorie exposée n° 465, lorsqu'il s'agissait de faire passer une courbe parabolique par une suite de points donnés : ce problème n'est en effet qu'une interpolation. On peut aussi opérer comme il suit.

A l'aide des valeurs correspondantes connues $a, \alpha, b, \beta....$, formez les fractions consécutives :

$$A = \frac{b-a}{\beta-\alpha}, \quad A_1 = \frac{c-b}{\gamma-\beta}, \quad A_2 = \frac{d-c}{\delta-\gamma}, \quad A_3 = \frac{e-d}{\varepsilon-\delta}....,$$

$$B = \frac{A_1 - A}{\gamma-\alpha}, \quad B_1 = \frac{A_2 - A_1}{\delta-\beta}, \quad B_2 = \frac{A_3 - A_2}{\varepsilon-\gamma}....,$$

$$C = \frac{B_1 - B}{\delta-\alpha}, \quad C_1 = \frac{B_2 - B_1}{\varepsilon-\beta}\; ....., \qquad D = \frac{C_1 - C}{\varepsilon-\alpha}....$$

Éliminant entre ces équ., on trouve successivement

$$b = a + A(\beta - \alpha),$$
$$c = a + A(\gamma - \alpha) + B(\gamma - \alpha)(\gamma - \beta),$$
$$d = a + A(\delta - \alpha) + B(\delta - \alpha)(\delta - \beta) + C(\delta - \alpha)(\delta - \beta)(\delta - \gamma),$$

et en général

$$y_x = a + A(x - \alpha) + B(x - \alpha)(x - \beta) + C(x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma)\ldots.$$

On cherchera donc les différences 1res entre les résultats a, b, c...., et l'on divisera par les différences entre les suppositions α, β, γ...., ce qui donnera A, A_1, A_2.... ; traitant ces nombres d'une manière analogue, on en déduira B, B_1, B_2.... ; ceux-ci donnent C, C_1.... ; et enfin substituant, on a le terme général demandé.

En exécutant les multiplications, l'expression reçoit la forme $a + a'x + a''x^2$.... de tout polynôme rationnel et entier ; cela vient de ce qu'on a négligé les différences supérieures (n° 942).

Corde de 60°	$= 1000$				
		35	$A = 15$		
62.20′	$= 1035$			$-0,18$	$B = -0,035$
		42	$A_1 = 14,82$		
65.10	$= 1077$			$-0,21$	$B_1 = -0,031$
		56	$A_2 = 14,61$		
69.0	$= 1133$				

on a $\alpha = 0$, $\beta = 2\frac{1}{3}$, $\gamma = 5\frac{1}{6}$, $\delta = 9$.

On peut négliger les différences 3es, et poser

$$y_x = 1000 + 15,082 \cdot x - 0,035x^2.$$

952. En considérant toute fonction y_x, de x, comme étant le terme général de la série que donne $x = m$, $m + h$, $m + 2h$...., si l'on prend les différences entre ces résultats, pour obtenir une nouvelle série, le terme général sera ce qu'on nomme la *Différence première* de la fonction proposée y^x, qui est représentée par Δy_x. Ainsi, on obtient cette différ. en changeant x en $x + h$ dans y_x, et retranchant y_x du résultat ; le reste engendrera la série des différences 1res, en faisant $x = m$, $m + h$, $m + 2h$, etc. C'est ainsi que

$$y_x = \frac{x^2}{a + x} \quad \text{donne} \quad \Delta y_x = \frac{(x + h)^2}{a + x + h} - \frac{x^2}{a + x}.$$

Il restera à réduire cette expression, ou à la développer selon les puissances de h....

En général, il suit du théorème de Taylor, que

$$\Delta y_x = y'h + \tfrac{1}{2} y''h^2 + \tfrac{1}{6} y'''h^3 + \dots$$

Pour obtenir la différence 2[e], il faudrait opérer sur Δy_x, comme on a fait pour la proposée; et ainsi des différences 3[es], 4[es] ....

Intégration des Différences. Sommation des Suites.

953. L'intégration a ici pour but de remonter d'une différence donnée en x, à la fonction qui l'a produite; c'est-à-dire de retrouver le terme général y_x d'une série $y_m, y_{m+h}, y_{m+2h} \dots$, connaissant celui de la série d'une différence d'ordre quelconque connue. Cette opération s'indique par le signe Σ.

Par ex., $\Sigma(3x^2 + x - 2)$ doit rappeler l'idée suivante, sachant que $h = 1$: une fonction y_x engendre une série, en y faisant $x = 0, 1, 2, 3 \dots$; les différences 1[res] qui s'ensuivent forment une autre suite dont $3x^2 + x - 2$ est le terme général (elle est ici $-2, 2, 12, 28\dots$). L'objet qu'on se propose en intégrant est donc de trouver y_x, fonction qui, si l'on met $x + 1$ pour x, donnera, en retranchant, le reste $3x^2 + x - 2$.

Il est facile de voir que, 1° les signes Σ et Δ se détruisent (comme $\int$ et d); ainsi, $\Sigma\Delta fx = fx$.

2° $\Delta(ay) = a\Delta y$; donc $\Sigma ay = a\Sigma y$.

3° Comme $\Delta(At - Bu) = A\Delta t - B\Delta u$, de même, on a $\Sigma(At - Bu) = A\Sigma t - B\Sigma u$, t et u étant des fonctions de x.

954. Le problème de déterminer y_x par sa différence 1[re], ne renferme pas les données nécessaires pour être résolu complétement; car pour recomposer la série provenue de y_x, en partant de $-2, 2, 12, 28\dots$, faisons le 1[er] terme $y_0 = a$, nous trouvons, par des additions successives, $a, a - 2, a + 2, a + 12\dots$, et a demeure arbitraire.

Toute intégrale peut être considérée comme comprise dans l'équation (A) (p. 541); car en prenant $x = 0, 1, 2, 3\dots$, dans la différence 1[re] donnée en x, on formera la suite des différences 1[res]; retranchant celles-ci consécutivement, on aura les différences 2[es], puis les 3[es], 4[es].... Le terme initial de ces séries sera $\Delta^1 y_0, \Delta^2 y_0 \dots$, et ces valeurs substituées dans (A) donnent y_x. Ainsi, dans l'exem-

ple ci-dessus (qui n'est que celui du n° 943, quand $a = 1$), on a (n° 946)

$$\Delta^1 y_0 = -2, \quad \Delta^2 y_0 = 4, \quad \Delta^3 y_0 = 6, \quad \Delta^4 y_0 = 0 \ldots;$$

d'où
$$y_x = y_0 - 2x - x^2 + x^3.$$

En général, le 1er terme y_0 de l'équ. (A) est une constante arbitraire, qui doit s'ajouter à l'intégrale. Si la fonction donnée est une différence 2e, il faudra, par une 1re intégration, remonter à la différence 1re, et de celle-ci à y_x; ainsi, l'on aura deux constantes arbitraires; et, en effet, l'équ. (A) fait connaître encore y_x, en trouvant Δ^2, Δ^3....; seulement y_0 et $\Delta^1 y_0$ restent quelconques. Et ainsi des ordres supérieurs.

955. Proposons-nous de trouver Σx^m, l'exposant m étant entier et positif. Représentons ce développement par

$$\Sigma x^m = px^a + qx^b + rx^c \ldots,$$

a, b, c.... étant des exposants décroissants qu'il s'agit de déterminer, aussi bien que les coefficients p, q.... Prenons la différence 1re, en supprimant le Σ au 1er membre, puis changeant x en $x + h$ dans le 2e, et retranchant. En nous bornant aux deux 1ers termes, nous avons

$$x^m = pahx^{a-1} + \tfrac{1}{2}pa(a-1)h^2x^{a-2} \ldots + qbhx^{b-1} \ldots$$

Or, pour que l'identité soit établie, les exposants doivent donner les équ. $a - 1 = m$, $a - 2 = b - 1$; d'où $a = m + 1$, $b = m$; de plus, les coefficients donnent

$$1 = pah, \quad -\tfrac{1}{2}pa(a-1)h = qb; \quad \text{d'où } p = \frac{1}{(m+1)h}, \quad q = -\tfrac{1}{2}.$$

Quant aux autres termes, il est visible que les exposants sont tous entiers et positifs; et l'on peut même reconnaître qu'ils manquent de 2 en 2; c'est, au reste, ce qui suit du calcul ci-après. Posons donc

$$\Sigma x^m = px^{m+1} - \tfrac{1}{2}x^m + \alpha x^{m-1} + \beta x^{m-3} + \gamma x^{m-5} \ldots,$$

et déterminons α, β, γ.... Prenons, comme ci-dessus, la différence 1re, en mettant $x + h$ pour x, et retranchant : et d'abord en trans-

posant $px^{m+1} - \frac{1}{2}x^m$, on trouve que le 1er membre, à cause de $ph(m+1) = 1$, se réduit à

$$A' \cdot \frac{h^2}{2.3} \cdot x^{m-2} + A'' \cdot \frac{m-3}{4} \cdot \frac{3h^4}{2.5} \cdot x^{m-4} + A^{\text{IV}} \cdot \frac{m-5}{6} \cdot \frac{5h^6}{2.7} \cdot x^{m-6} \ldots$$

Pour abréger, nous omettons ici les termes du développement de 2 en 2, que le calcul prouverait s'entre-détruire ; et nous désignons par 1, m, A', A''.... les coefficients du binôme. Venons-en au deuxième membre, et faisons le même calcul sur $\alpha x^{m-1} + \beta x^{m-3}$... nous aurons, avec les mêmes puissances respectives de x et de h,

$$(m-1)\alpha + m-1 . \frac{m-2}{2} . \frac{m-3}{3}\alpha + m-1 . \frac{m-2}{2} \ldots \frac{m-4}{5}\alpha + \ldots$$

$$+ (m-3)\beta + m-3 . \frac{m-4}{2} . \frac{m-5}{3}\beta + \ldots$$

$$+ (m-5)\gamma + \ldots$$

En comparant terme à terme, on en tire aisément

$$\alpha = \frac{mh}{3.4}, \quad \beta = \frac{-A''h^3}{2.3.4.5}, \quad \gamma = \frac{A^{\text{IV}}h^5}{6.6.7} \ldots;$$

d'où l'on tire enfin

$$\Sigma x^m = \frac{x^{m+1}}{(m+1)h} - \frac{x^m}{2} + mahx^{m-1} + A''bh^3x^{m-3}$$

$$+ A^{\text{IV}}ch^5x^{m-5} + A^{\text{VI}}dh^7x^{m-7} + \ldots \quad (D)$$

Ce développement a pour coefficients ceux du binôme de deux en deux termes, multipliés par de certains facteurs numériques a, b, c...., qu'on a nommés *Nombres Bernoulliens*, parce que Jacques Bernoulli les a le premier déterminés. Ces facteurs sont d'un fréquent usage dans la théorie des suites ; nous donnerons un moyen plus facile de les évaluer (n° 957) : en voici d'avance les valeurs :

$$a = \tfrac{1}{12}, \quad b = -\tfrac{1}{120}, \quad c = \tfrac{1}{252}, \quad d = -\tfrac{1}{240}, \quad e = \tfrac{1}{132},$$
$$f = -\tfrac{691}{32760}, \quad g = \tfrac{1}{12}, \quad h = -\tfrac{3617}{8160}, \quad i = \tfrac{43867}{14364} \ldots$$

956. Concluons de là que, pour obtenir Σx^m, m étant un nombre donné entier positif, il faut, outre les deux premiers termes

$\frac{m^{m+1}}{(m+1)h} - \frac{x^m}{2}$, prendre le développement de $(x+h)^m$, en rejetant les termes de rangs impairs, 1er, 3e, 5e...., et multiplier les termes conservés, respectivement par $a, b, c....$ x *et* h *n'ont que des exposants pairs quand* m *est impair, et réciproquement;* en sorte qu'on doit aussi rejeter le dernier terme h^m, lorsqu'il vient en rang inutile; la quotité des termes est $\frac{1}{2}m+2$, quand m est pair; et $\frac{1}{2}(m+3)$ quand m est impair, c'est-à-dire la même pour un nombre pair et pour l'impair qui suit.

Veut-on Σx^{10}? outre $\frac{x^{11}}{11h} - \frac{1}{2}x^{10}$, on développera $(x+h)^{10}$, et conservant les 2es, 4es, 6es.... termes, on aura

$$10x^9ah + 120x^7bh^3 + 252....;$$

donc

$$\Sigma x^{10} = \frac{x^{11}}{11h} - \frac{1}{2}x^{10} + \frac{5}{6}x^9h - x^7h^3 + x^5h^5 - \frac{1}{2}x^3h^7 + \frac{5}{66}xh^9.$$

C'est ainsi qu'on obtient

$$\Sigma x^0 = \frac{x}{h}, \quad \Sigma x^1 = \frac{x^2}{2h} - \frac{x}{2},$$

$$\Sigma x^2 = \frac{3h}{x^3} - \frac{x^2}{2} + \frac{hx}{6},$$

$$\Sigma x^3 = \frac{x^4}{4h} - \frac{x^3}{2} + \frac{hx^2}{4},$$

$$\Sigma x^4 = \frac{x^5}{5h} - \frac{x^4}{2} + \frac{hx^3}{3} - \frac{h^3x}{30},$$

$$\Sigma x^5 = \frac{x^6}{6h} - \frac{x^5}{2} + \frac{5hx^4}{12} - \frac{h^3x^2}{12},$$

$$\Sigma x^6 = \frac{x^7}{7h} - \frac{x^6}{2} + \frac{hx^5}{2} - \frac{h^3x^3}{6} + \frac{h^5x}{42},$$

$$\Sigma x^7 = \frac{x^8}{8h} - \frac{x^6}{2} + \frac{hx^7}{12} - \frac{7h^3x^4}{24} + \frac{h^5x^2}{12},$$

$$\Sigma x^8 = \frac{x^9}{9h} - \frac{x^8}{2} + \frac{2hx^7}{3} - \frac{7h^3x^5}{15} + \frac{2h^5x^3}{9} - \frac{h^7x}{30},$$

$$\Sigma x^9 = \frac{x^{10}}{10h} - \frac{x^9}{2} + \frac{3hx^8}{4} - \frac{7h^3x^6}{10} + \frac{h^5x^4}{2} - \frac{3h^7x^2}{20},$$

Σx^{10} = etc. (*voyez ci-dessus*) etc.

957. Voici un moyen facile d'étendre aussi loin qu'on veut les valeurs des nombres bernoulliens a, b, c.... Qu'on fasse $x = h = 1$, dans l'équ. (D); Σx^m est le terme général de la série qui a x^m pour différence 1re; nous considérerons ici $\Sigma 1$, et cette série est la suite naturelle 0, 1, 2, 3.... Prenons zéro pour 1er membre, et transposons $\frac{1}{m+1} - \frac{1}{2} = \frac{1-m}{2(m+1)}$;

$$\frac{m-1}{2(m+1)} = am + bA'' + cA^{\text{IV}} + dA^{\text{VI}} \ldots + km.$$

En faisant $m = 2$, le 2e membre se réduit à am, d'où l'on tire $a = \frac{1}{12}$; $m = 4$ donne $am + bA''$, ou $4a + 4b$, pour 2e membre; on trouve $am + bA'' + 6c$, pour $m = 6$.... ; ainsi, en procédant selon les nombres pairs $m = 2, 4, 6, 8$...., on obtient chaque fois une équ. qui a un terme de plus, et sert à trouver de proche en proche le dernier terme $2a, 4b, 6c \ldots mk$.

958. Prenons la différence du produit

$$y_x = (x-h)\, x\, (x+h)\, (x+2h) \ldots (x+ih);$$

en mettant $x + h$ pour x, et retranchant, il vient

$$\Delta y_x = x\,(x+h)\,(x+2h) \ldots (x+ih) \times (i+2)h\,;$$

divisant par ce dernier facteur constant, intégrant, et remettant pour y_x sa valeur, on trouve

$$\Sigma x\,(x+h)\,(x+2h) \ldots (x+ih)$$
$$= \frac{x-h}{(i+2)h} \times x\,(x+h)\,(x+2h) \ldots (x+ih).$$

Cette équation donne *l'intégrale du produit de facteurs qui forment une équidifférence.*

959. En prenant la différence du 2e membre, on vérifie l'équ.

$$\Sigma \frac{1}{x\,(x+h)\,(x+2h) \ldots (x+ih)} = \frac{-1}{ihx\,(x+h) \ldots [x+(i-1)h]}.$$

960. Soit $y_x = a^x$; la différence est

$$\Delta y_x = a^x(a^h - 1)\,; \quad \text{d'où} \quad y_x = \Sigma a^x (a^h - 1) = a^x;$$

donc $$\Sigma a^x = \frac{a^x}{a^h - 1} + \text{const.}$$

961. L'équ. suivante est n° 8 dans la note de la p. 335, 1er vol.,

$$\cos B - \cos A = 2 \sin \tfrac{1}{2}(A + B) \,.\, \sin \tfrac{1}{2}(A - B);$$

or,

$$\Delta \cos x = \cos (x + h) - \cos x = -2 \sin (x + \tfrac{1}{2} h) \,.\, \sin \tfrac{1}{2} h;$$

intégrant et changeant $x + \frac{1}{2} h$ en z, on a

$$\Sigma \sin z = -\frac{\cos (z - \frac{1}{2} h)}{2 \sin \frac{1}{2} h} + \text{const.}$$

On trouverait de même

$$\Sigma \cos z = \frac{\sin (z - \frac{1}{2} h)}{2 \sin \frac{1}{2} h} + \text{const.}$$

Lorsqu'on veut intégrer des puissances de sinus et cosinus, on les traduit en sin. et cos. d'arcs multiples (*voy.* p. 235), et on a des termes de la forme $A \sin qx$, $A \cos qx$; faisant $qx = z$, l'intégration est donnée par les équ. précédentes.

962. Soit représentée l'intégrale d'un produit uz par

$$\Sigma (uz) = u\Sigma z + t,$$

u, z et t représentant des fonctions de x, celle-ci inconnue, u et z données. En changeant x en $x + h$ dans $u\Sigma z + t$, u devient $u + \Delta u$, z devient $z + \Delta z$, etc., et l'on a

$$u\Sigma z + uz + \Delta u \,.\, \Sigma (z + \Delta z) + t + \Delta t;$$

retranchant notre 2e membre $u\Delta z + t$, on en obtient la différence, ou celle de uz; de là résulte l'équation

$$0 = \Delta u \,.\, \Sigma (z + \Delta z) + \Delta t; \quad \text{d'où} \quad t = - \Sigma [\Delta u \,.\, \Sigma (z + \Delta z)].$$

Donc $$\Sigma (u \,.\, z) = u\Sigma z - \Sigma [\Delta u \,.\, \Sigma (z + \Delta z)];$$

cette formule répond à l'intégration par parties des fonctions différentielles, p. 408.

963. Il n'y a qu'un petit nombre de fonctions dont on sait trouver l'intégrale finie ; on a recours aux séries quand on ne sait pas intégrer exactement. Celle de Taylor, $\Delta y_x = y'h + \ldots$ (n° 952), donne

$$y_x = h\Sigma y' + \tfrac{1}{2} h^2\Sigma y'' + \tfrac{1}{6} h^3\Sigma y''' \ldots,$$

où y', y''.... sont les dérivées successives de y_x. Regardons y' comme une fonction z donnée en x; il faudra faire $y'=z$, $y''=z'$, $y'''=z''$...., et $y_x=\int y'\mathrm{d}x=\int z\mathrm{d}x$; d'où

$$\int z\mathrm{d}x = h\Sigma z + \tfrac{1}{2}h^2\Sigma z' + \tfrac{1}{6}h^3\Sigma z''....;$$

puis $$\Sigma z = h^{-1}\int z\mathrm{d}x - \tfrac{1}{2}h\Sigma z' - \tfrac{1}{6}h^2\Sigma z''....$$

Cette équ. donne Σz, quand on sait trouver $\Sigma z'$, $\Sigma z''$.... ; prenons la dérivée des deux membres; celle du 1er sera $\Sigma z'$, ainsi qu'on peut s'en assurer. On tirera de là $\Sigma z''$, puis $\Sigma z'''$....; et, même sans faire ces calculs, il est aisé de voir que le résultat de la substitution de ces valeurs sera de la forme

$$\Sigma z = h^{-1}\int z\mathrm{d}x + Az + Bhz' + Ch^2z''....$$

Il reste à déterminer les facteurs A, B, C.... Or, si $z=x^m$, on en tire $\int z\mathrm{d}x$, z', z''...., et, substituant, il vient une série qui doit être identique avec (D), et, par conséquent, privée des puissances $m-2$, $m-4$.... En sorte qu'on posera

$$\Sigma z = \frac{\int z\mathrm{d}x}{h} - \frac{z}{2} + \frac{ahz'}{1} + \frac{bh^3z'''}{1.2} + \frac{ch^5z^{\mathrm{v}}}{2.3.4} + \frac{dh^7z^{\mathrm{vii}}}{2...6}, \text{ etc.}$$

a, b, c.... étant les nombres bernoulliens.

Par ex., si $z=lx$, $h=1$, $\int lx.\mathrm{d}x = xlx - x$, $z'=x^{-1}$, $z''=$ etc.;

donc $\Sigma lx = C + xlx - x - \tfrac{1}{2}lx + ax^{-1} + bx^{-3} + cx^{-5}$ etc.

964. La série $a, b, c, d...., k, l$, ayant pour différ. 1re a', b', c'...., on a vu (n° 945) que

$$b=a+a',\quad c=b+b',\quad d=c+c'....l=k+k';$$

équ. dont la somme donne $l=a+a'+b'+c'....+k'$.

Si les nombres a', b', c'.... sont connus, on peut les considérer comme étant les différ. 1res d'une autre série a, b, c...., puisqu'il est aisé de composer celle-ci à l'aide de la 1re et du terme initial a. Par définition (n° 953) nous savons qu'un terme quelconque l', pris dans la série donnée a', b', c'...., n'est autre chose que Δl, puisque $l'=m-l$; en intégrant $l'=\Delta l$, on a $\Sigma l'=l$, ou

$$\Sigma l' = a'+b'+c'+....+k',$$

en supposant l'initial a compris dans la constante du signe Σ. Donc,

en prenant l'intégrale d'un terme quelconque d'une série, on obtient la somme de tous les termes qui le précèdent,

$$\Sigma y_x = y_0 + y_1 + y_2 \ldots . + y_{x-1}.$$

Bien entendu que pour avoir la somme de la série, y compris le terme général y_x, il faut ajouter y_x à l'intégrale, ou bien y changer x en $x+1$, ou enfin changer x en $x+1$ dans y_x avant d'intégrer. Du reste, on détermine la constante en rendant la somme $= y_0$ quand $x=1$.

965. *On sait donc trouver le terme sommatoire de toute série dont on connaît le terme général, en fonction rationnelle et entière de* x. Soit $y_x = Ax^m - Bx^n + C$, m et n étant entiers et positifs, on a $A\Sigma x^m - B\Sigma x^n + C\Sigma x^0$ pour somme des termes jusqu'à y_x exclusivement. Cette intégrale une fois trouvée par l'équ. *D*, on changera x en $x+1$, et l'on déterminera convenablement la constante.

Soit, par ex., $y_x = x(2x-1)$; changeons x en $x+1$, et intégrons le résultat ; nous trouvons

$$2\Sigma x^2 + 3\Sigma x + \Sigma x^0 = \frac{4x^3+3x^2-x}{2\,.\,3} = x\frac{x+1}{2}\cdot\frac{4x-1}{3};$$

on n'ajoute pas de constante, parce que $x=0$ doit rendre la somme nulle (*voy.* p. 23).

La série $1^m, 2^m, 3^m \ldots$ des puissances m^{es} des nombres naturels, se trouve en prenant Σx^m (équ. *D*) : mais il faut ensuite ajouter le xe terme qui est x^m, c'est-à-dire qu'il suffit de changer $-\frac{1}{2}x^m$, 2ᵉ terme de l'équ. *D*, en $+\frac{1}{2}x^m$: il reste ensuite à déterminer la constante, d'après le terme auquel on veut que la somme commence. Par ex., pour la suite des carrés, on prend Σx^2, p. 552, en changeant le signe du 2ᵉ terme, et l'on a

$$\tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{6}x = x\,.\,\frac{2x+1}{2}\cdot\frac{x+1}{3};$$

la constante est $=0$, parce que la somme est nulle quand $x=0$. Mais si l'on veut que la somme s'étende de n^2 à x^2, elle est nulle quand $x=n-1$; et l'on a const. $= -\,n\,\dfrac{n-1}{2}\cdot\dfrac{2n-1}{3}$.

Cette théorie s'applique à la sommation des nombres figurés. Par ex., pour ajouter les x 1ᵉʳˢ nombres pyramidaux 1.4.10.20.... (p. 20), il faut intégrer le terme général $\frac{1}{6}x(x+2)(x+1)$; on

trouve (n° 958) $\frac{1}{24}(x-1)x(x+1)(x+2)$: enfin il faut changer x en $x+1$, et l'on a, pour la somme demandée,

$$\tfrac{1}{24}x(x+1)(x+2)(x+3).$$

La constante est nulle.

966. *Les nombres figurés inverses* sont des fractions qui ont 1 pour numérateur, et pour dénominateur une suite figurée. Le xe terme de l'ordre p est (p. 20)

$$\frac{1.2.3\ldots.(p-1)}{x(x+1)\ldots.(x+p-2)};\ \text{donc}\ C-\frac{1.2.3\ldots.(p-1)}{(p-2)x(x+1)\ldots(x+p-2)}$$

est l'intégrale (n° 959). Changeons x en $x+1$, puis déterminons la constante en rendant la somme nulle quand $x=0$, nous aurons $C=\dfrac{p-1}{p-2}$; et la somme des x 1[ers] termes est

$$\frac{p-1}{p-2}-\frac{1.2.3\ldots.(p-1)}{(p-2)(x+1)(x+2)\ldots.(x+p-2)}.$$

Faisons successivement $p=3, 4, 5\ldots.$, et nous aurons

$$\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{6}+\tfrac{1}{10}\ldots.\quad\frac{1.2}{x(x+1)}\quad=\tfrac{2}{1}-\frac{2}{x+1},$$

$$\tfrac{1}{5}+\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{10}+\tfrac{1}{20}\ldots.\frac{1.2.3}{x(x+1)(x+2)}=\tfrac{3}{2}-\frac{3}{(x+1)(x+2)},$$

$$\tfrac{1}{1}+\tfrac{1}{9}+\tfrac{1}{15}+\tfrac{1}{35}\ldots.\frac{1.2.3.4}{x\ldots\ldots(x+3)}=\tfrac{4}{3}-\frac{2.4}{(x+1)\ldots(x+3)},$$

$$\tfrac{1}{1}+\tfrac{1}{6}+\tfrac{1}{21}+\tfrac{1}{56}\ldots.\frac{1.2.3.4.5}{x\ldots\ldots(x+4)}=\tfrac{5}{4}-\frac{2.3.5}{(x+1)\ldots(x+4)},$$

et ainsi de suite. Pour obtenir la somme totale de nos séries, il faut rendre x infini, ce qui donne $\dfrac{p-1}{p-2}$ pour la limite dont elles approchent sans cesse.

Pour la série $\sin a$, $\sin(a+h)$, $\sin(a+2h)$....., on a (n° 961)

$$\Sigma\sin(a+hx)=C-\frac{\cos(a+hx-\frac{1}{2}h)}{2\sin\frac{1}{2}h};$$

changeant x en $x+1$; et déterminant G par la condition que $x=-1$ rende la somme nulle, on trouve, pour terme sommatoire,

$$\frac{\cos(a-\frac{1}{2}h)-\cos(a+hx+\frac{1}{2}h)}{2\sin\frac{1}{2}h}.$$

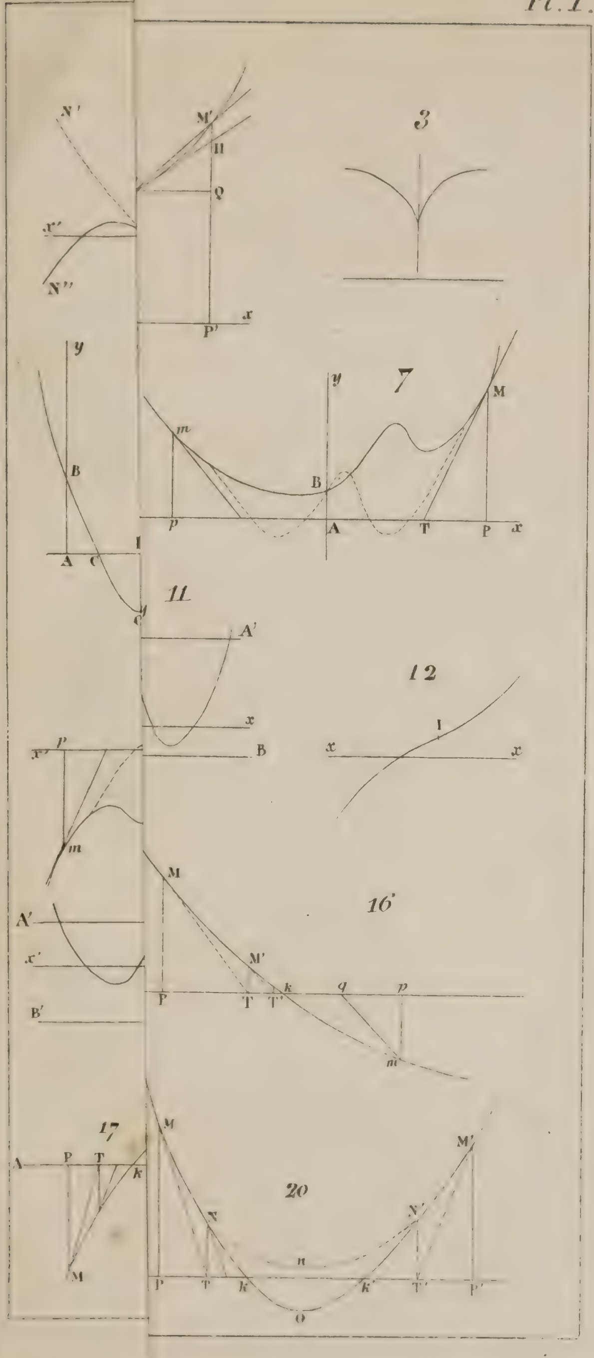
ou
$$\frac{\sin(a+\frac{1}{2}hx)\,.\,\sin[\frac{1}{2}h(x+1)]}{\sin\frac{1}{2}h},$$

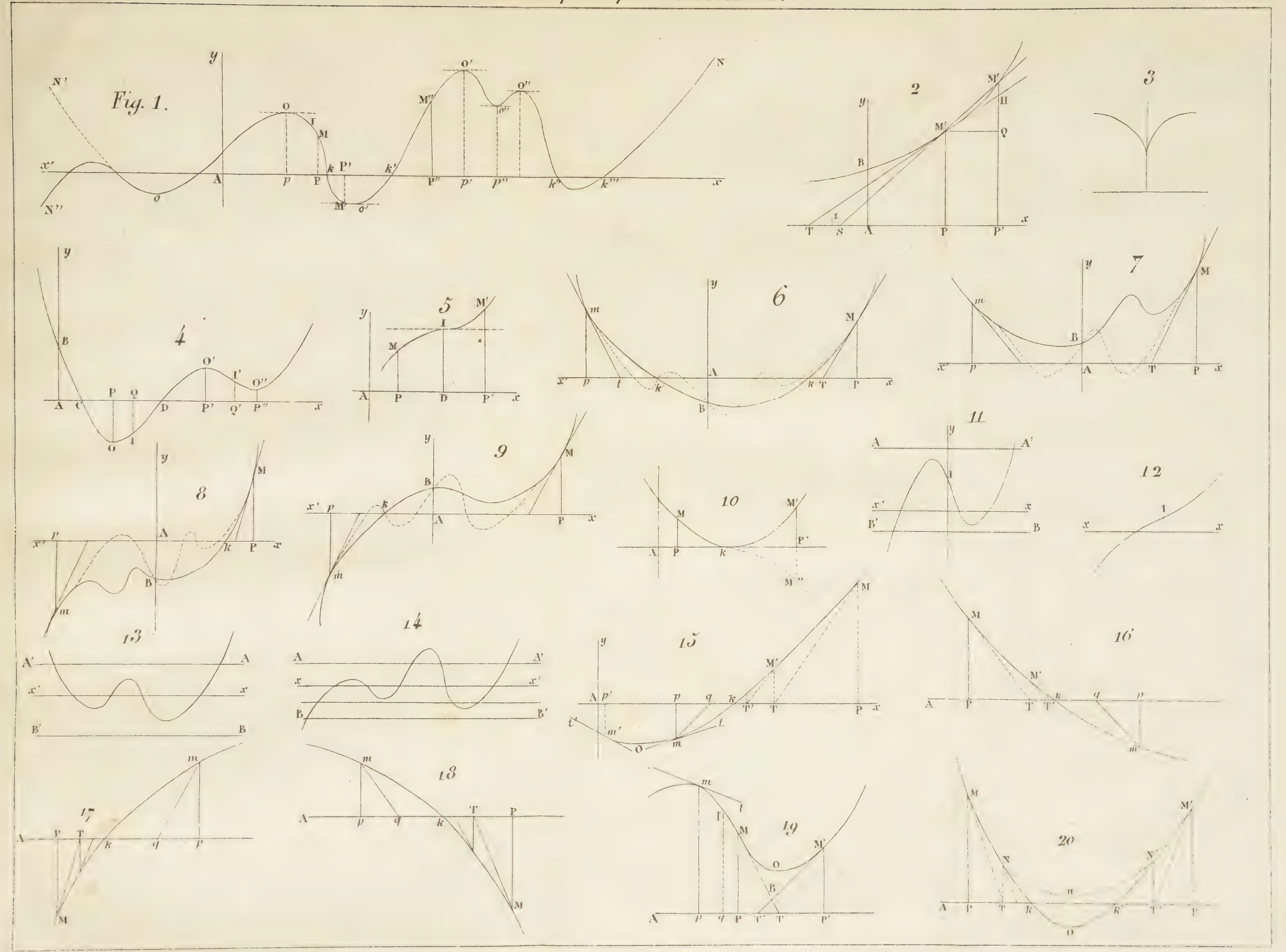
en vertu de l'équ. (8) de la note, p. 335, 1er vol.

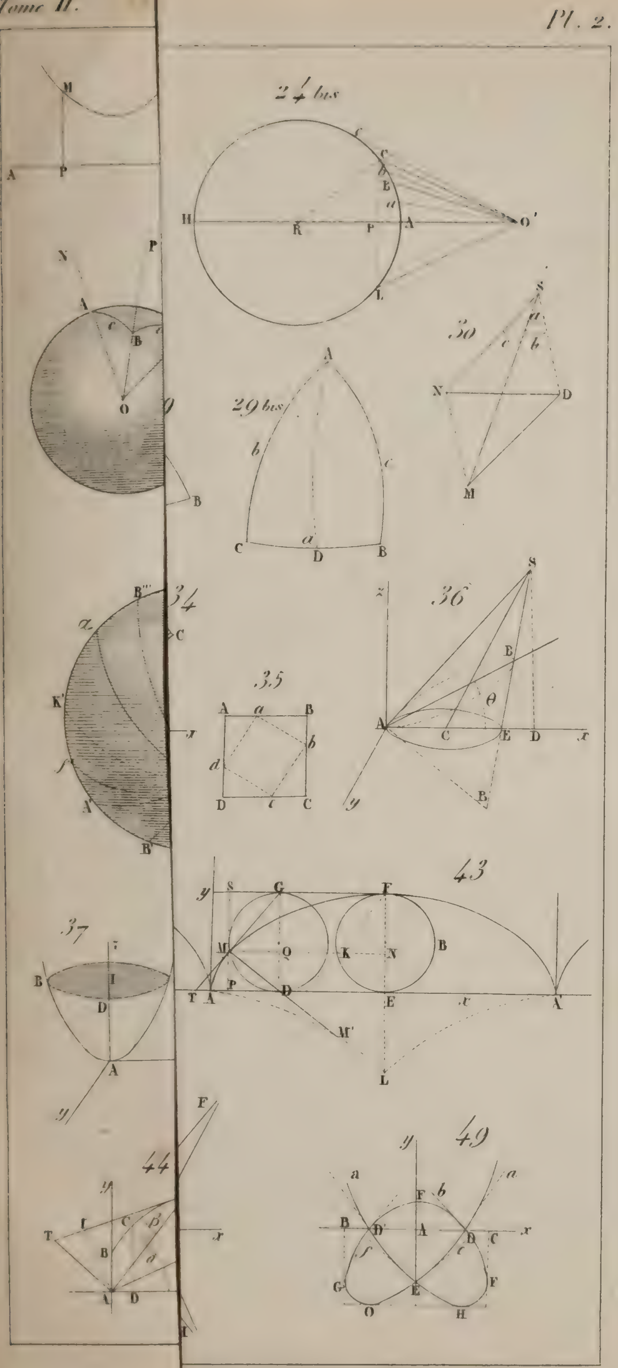
La suite $\cos a$, $\cos(a+h)$, $\cos(a+2h)$.... donne de même, pour terme sommatoire,

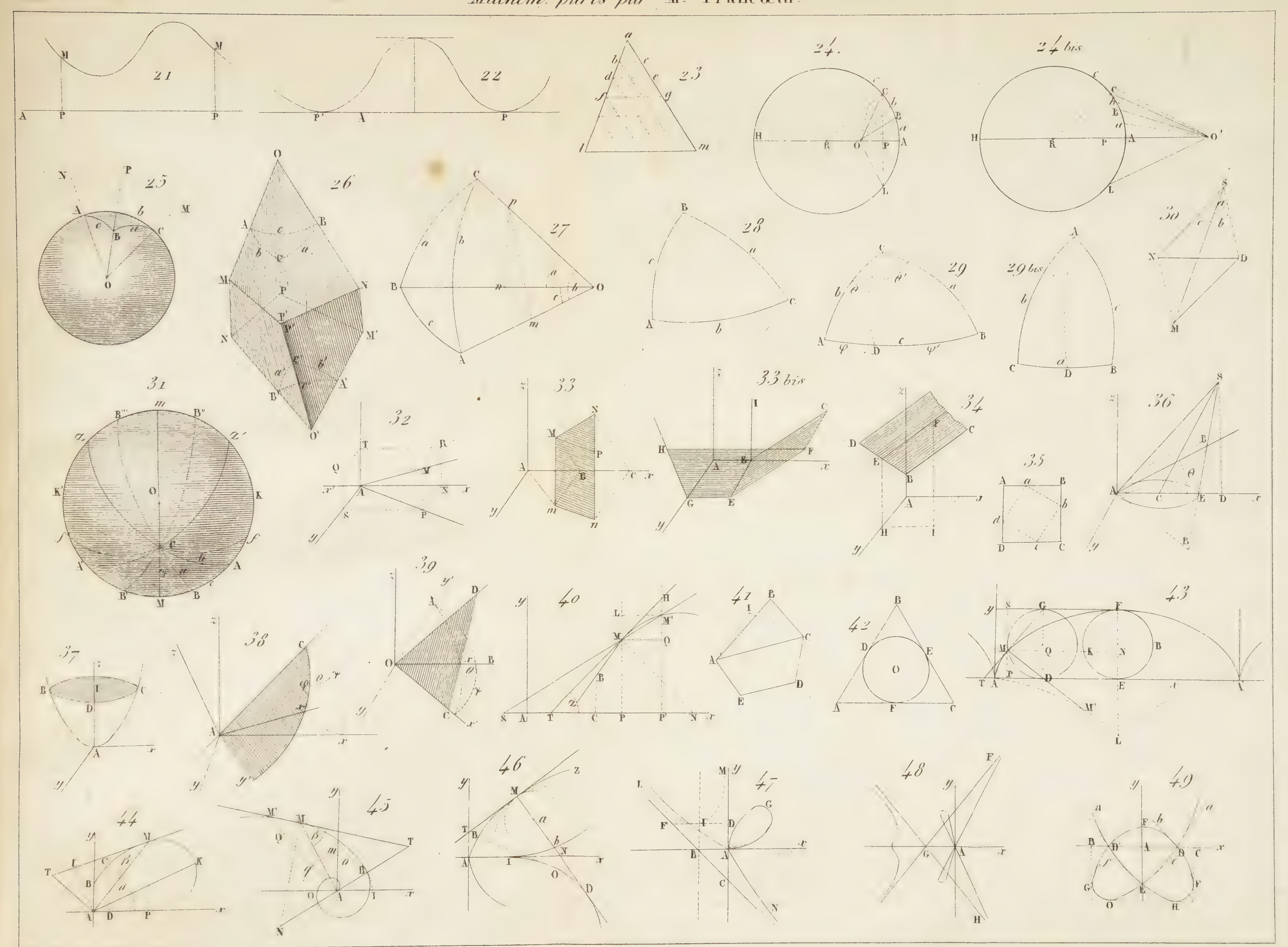
$$\frac{\cos(a+\frac{1}{2}hx)\,.\,\sin[\frac{1}{2}h(x+1)]}{\sin\frac{1}{2}h}.$$

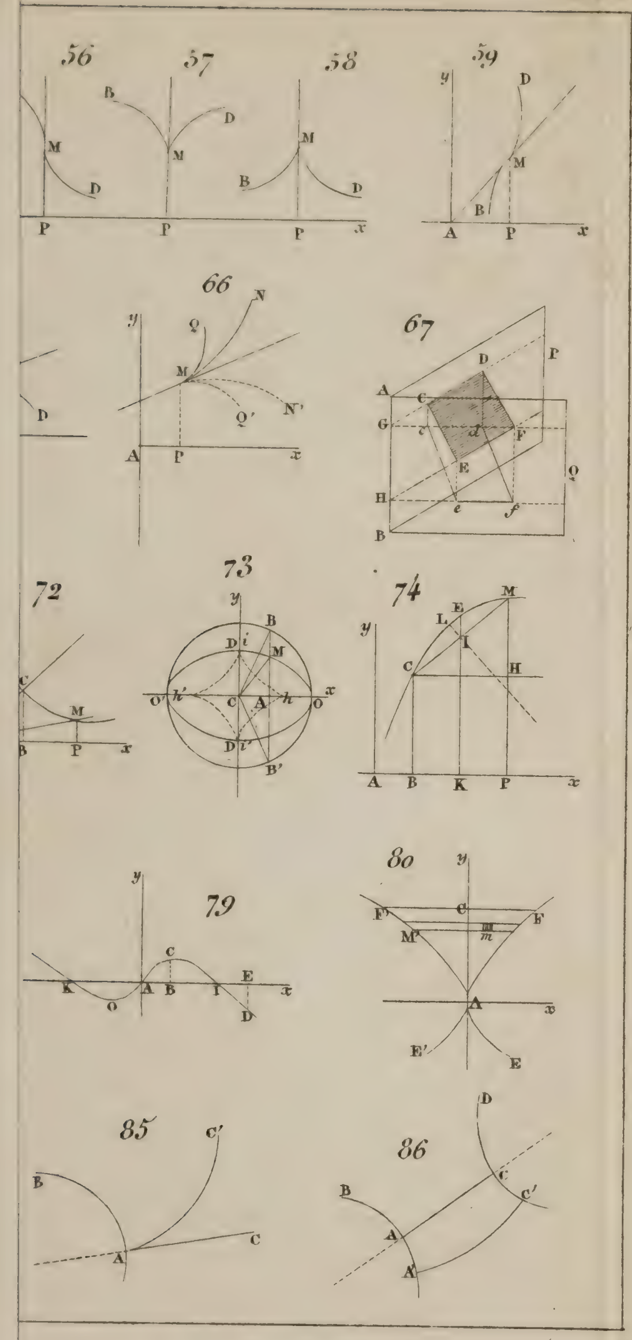
FIN.

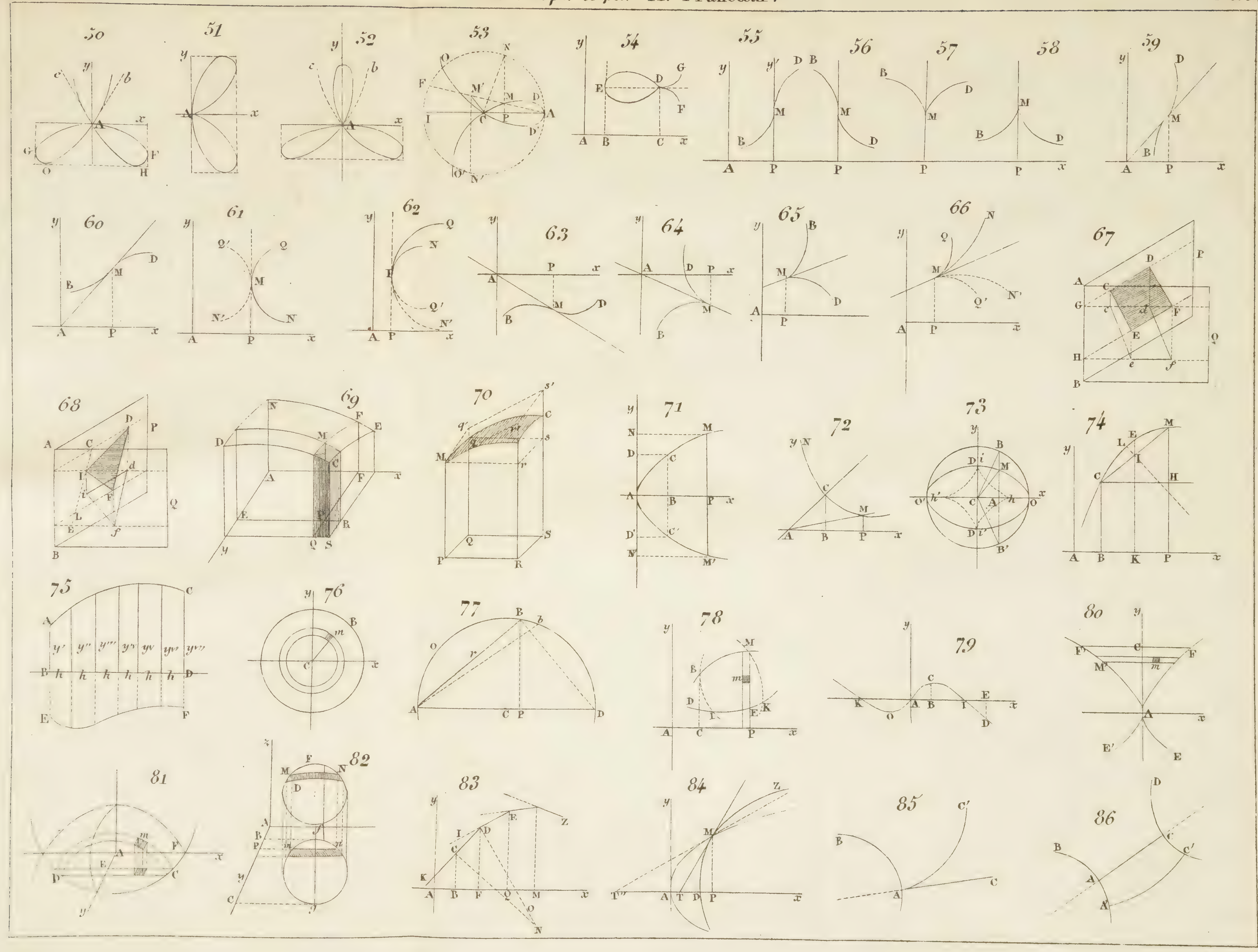

N'
M'
H
Q
x'
N''
x
P'
3
y
7
M
m
B
B
p
A
T
P
x
A
C
11
A'
x
12
I
x
x
p
x'
B
m
M
16
A'
M'
x'
P
T
T'
k
q
p
B'
m
17
M
M'
A
P
T
k
20
N
N'
M
n
P
T
k
k'
T'
P'
O

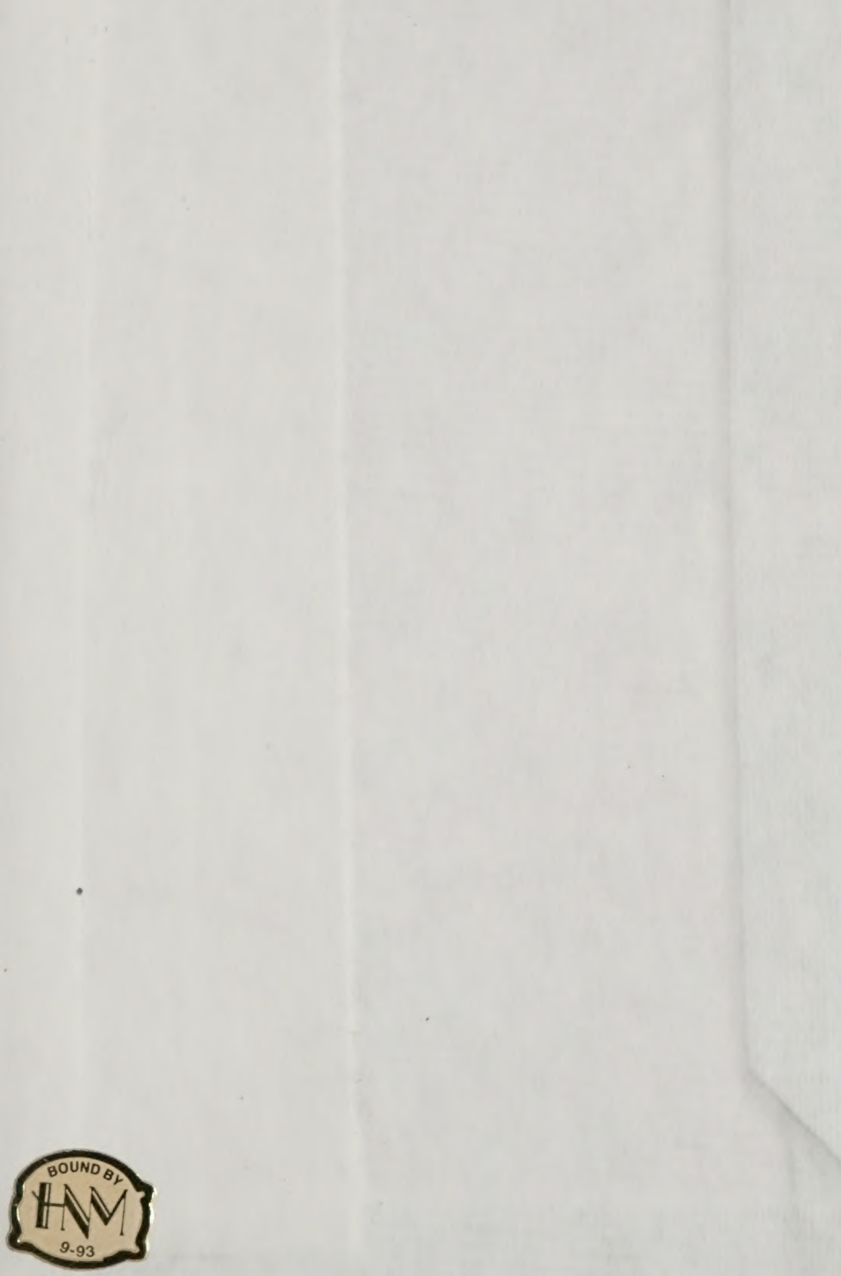

Fig. 1.
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
16
17
18
19
20


24 bis
29 bis
30
34
35
36
37
43
44
49




56
M
D
P
D
57
B
D
M
P
58
M
B
D
P
x
59
y
D
M
B
A
P
x
66
N
y
Q
M
Q′
N′
A
P
x
67
P
D
A
C
G
c
d
F
E
Q
H
e
f
B
72
C
M
B
P
x
73
y
B
D
i
M
O′
h′
C
A
h
O
x
D
i′
B′
74
M
E
L
I
y
C
H
A
B
K
P
x
80
y
C
F′
F
m
M′
m
A
x
E′
E
y
79
C
E
K
A
B
I
O
D
x
85
C′
B
C
A
86
D
C
B
C′
A
A′


50
51
52
53
54
55
56
57
58
59
60
61
62
63
64
65
66
67
68
69
70
71
72
73
74
75
76
77
78
79
80
81
82
83
84
85
86


BOUND BY
HNM
9-93

